NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CHADU

Théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 561-563

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__561_0>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. C. CHADU,
Professeur au lycée de Mont-de-Marsan.

Soient α, β, γ, δ *quatre points pris sur chacun des côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD; *soient* P, P′ *les points d'intersection de la droite* $\alpha\gamma$ *avec chacun des plans* $BC\delta$, $AD\beta$. *Démontrer la relation*

$$\frac{A\alpha.B\beta.C\gamma.D\delta}{A\delta.B\alpha.C\beta.D\gamma} = \frac{P\alpha}{P\gamma} : \frac{P'\alpha}{P'\gamma}.$$

Plaçons en A un point matériel dont la masse A′ soit prise arbitrairement et en B, C, D trois autres points matériels dont les masses B′, C′, D′ soient telles que

α	soit le centre	de gravité de	A′ et B′,
β	»	»	B′ et C′,
γ	»	»	C′ et D′.

M. Peaucellier ou de M. Hart); le *paradoxe cinématique* de M. Sylvester à soixante-treize tiges obligeant deux points non liés entre eux à rester à une distance invariable et servant à réaliser le mouvement d'un ou de plusieurs points suivant la ligne des centres (combinaison de huit inverseurs de M. Peaucellier et de cinq extracteurs binômes quadratiques); les systèmes de M. Sylvester à vingt-cinq tiges, pour produire un mouvement suivant une parallèle à la ligne des centres (combinaison de deux inverseurs de M. Peaucellier avec deux extracteurs binômes quadratiques), et à quarante-trois tiges pour produire un mouvement suivant une droite formant un angle donné avec la ligne des centres (combinaison de quatre inverseurs de M. Peaucellier, de deux extracteurs binômes quadratiques et d'un élément pantographique); les divers systèmes servant à l'extraction des racines, etc. Il est évident que la théorie de ces systèmes multiples ne présente aucune difficulté dès que l'on connaît les propriétés des systèmes simples qui les constituent.

Ces conditions entraînent les relations

$$(1)\qquad \frac{A\alpha}{B\alpha} = \frac{B'}{A'}, \quad \frac{B\beta}{C\beta} = \frac{C'}{B'}, \quad \frac{C\gamma}{D\gamma} = \frac{D'}{C'}.$$

Le centre de gravité du système A′, B′, C′, D′ sera sur la droite $\alpha\gamma$; d'ailleurs il est dans le plan βAD; il devra donc se trouver en P à l'intersection de la droite et du plan.

Par conséquent

$$\frac{P\alpha}{P\gamma} = \frac{D' + C'}{A' + B'}.$$

En tenant compte des relations (1), on aura

$$(2)\qquad \frac{P\alpha}{P\gamma} = \frac{A\alpha . B\beta\,(C\gamma + D\gamma)}{C\beta . D\gamma\,(A\alpha + B\alpha)}.$$

P′ étant le point d'intersection de la droite $\alpha\gamma$ et du plan δBC, on aura de même

$$(3)\qquad \frac{P'\alpha}{P'\gamma} = \frac{A\delta . B\alpha (C\gamma + D\gamma)}{D\delta . C\gamma\,(A\alpha + B\alpha)}.$$

En divisant membre à membre les relations (2) et (3), on obtient l'égalité qui fait l'objet du théorème.

Si l'on suppose que les deux droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ soient dans un même plan, les deux points P et P′ se confondent :

$$\frac{P\alpha}{P\gamma} : \frac{P'\alpha}{P'\gamma} = 1,$$

et alors

$$\frac{A\alpha . B\beta . C\gamma . D\delta}{A\delta . B\alpha . C\beta . D\gamma} = 1.$$

On trouve donc comme cas particulier le théorème suivant :

Quand un plan rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, il y forme huit segments, tels que le *produit de quatre d'entre eux, qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des quatre autres.*

La méthode que nous venons d'employer pour établir le théorème précédent est due à Jean Ceva, géomètre italien (*Aperçu historique*, p. 294).