NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Concours général de 1874

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 494-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__494_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874;

PAR M. MORET-BLANC.

Mathématiques spéciales. (Paris.)

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$, *satisfaisant aux relations*

$$F(1-x) = F(x),$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m},$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. X, p. 81 et 117.

est

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q$$
$$\times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2$$
$$+ A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}],$$

p, q, n étant des nombres entiers, et A_0, A_1, A_2,..., A_n des constantes quelconques.

En vertu de la première condition, à toute racine $x = a$ de l'équation $F(x) = 0$ correspond une racine $x = 1 - a$, et deux racines conjuguées fournissent dans le polynôme $F(x)$ un facteur de la forme $x^2 - x + k$, k étant un nombre entier ou fractionnaire. $F(x)$ est donc un produit de facteurs de cette forme multiplié par une constante arbitraire dont nous pouvons faire abstraction, puisqu'elle n'est pas altérée dans les transformations.

Pour satisfaire à la seconde condition, il faut qu'en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'expression $x^2 - x + k$, on retrouve cette expression même, ou tout au moins une expression de même forme, divisée par une puissance de x.

Posons

$$\varphi(x) = x^2 - x + k,$$

on aura

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - x + kx^2}{x^2} = \frac{x - x^2 + kx^3}{x^3}.$$

Le numérateur n'aura la forme de $\varphi(x)$ que si l'on fait $k = 1$ ou $k = 0$.

Dans le premier cas,

$$\varphi(x) = x^2 - x + 1,$$
$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2},$$

dans le second,

$$\varphi(x) = x^2 - x,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x - x^2}{x^3} = \frac{-\varphi(x)}{x^3};$$

$x^2 - x$ ne devra donc entrer dans le polynôme qu'à des puissances de degré pair.

Il résulte de ce qui précède que $F(x)$ doit être une fonction entière de $(x^2 - x)$ et de $(x^2 - x + 1)$.

Soient $2p$ et q les plus petits exposants de $(x^2 - x)$ et $(x^2 - x + 1)$ respectivement; on aura

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \times P,$$

P étant un polynôme entier en $(x^2 - x)^2$ et $(x^2 - x + 1)$, qui renferme nécessairement un terme indépendant de $(x^2 - x)^2$, et un terme indépendant de $x^2 - x + 1$, et tel qu'en y changeant x en $\frac{1}{x}$ chaque terme se trouve divisé par une même puissance de x.

Soit

$$A_s(x^2 - x)^{2s}(x^{2s} - x + 1)^r$$

le terme général. En y changeant x en $\frac{1}{x}$, il devient

$$\frac{A_s(x^2 - x)^{2s}(x^2 - x + 1)^r}{x^{6s+2r}}.$$

Il faut donc que $6s + 2r$ ait une valeur constante.

Soit

$$6s + 2r = 2t,$$

ou

$$3s + r = t.$$

Comme il y a un terme où $r = 0$, il faut que t soit un multiple de 3; soit $t = 3n$.

On pourra donner à s toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, et l'on aura

$$(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \sum_{s=0}^{s=n} A_s(x^2 - x)^{2s}(x^2 - x + 1)^{3(n-s)},$$

les coefficients A_i étant arbitraires, et p, q, n étant des entiers qui satisfont à la condition

$$6p + 2q + 3n = m.$$

En développant, on a le polynôme de l'énoncé. Il satisfait aux relations données, et c'est le polynôme le plus général qui y satisfasse, puisqu'on ne lui a imposé que des conditions strictement nécessaires.

Mathématiques spéciales. (Départements.)

Si l'on considère la fonction e^{-x^2} de la variable x, et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnaît que la dérivée de l'ordre n est égale au produit de la fonction e^{-x^2} par un polynôme entier en x, que l'on représentera par $\varphi_n(x)$.

1° *Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = -2x\,\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\,\varphi_{n-2}(x),\\
&\varphi'_n(x) = -2n\,\varphi_{n-1}(x),\\
&\varphi''_n(x) = -2x\,\varphi'_n(x) + 2n\,\varphi_n(x) = 0,
\end{aligned}$$

$\varphi'_n(x)$ désignant la dérivée première du polynôme $\varphi_n(x)$, et $\varphi''_n(x)$ la dérivée seconde.

2° *Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$, ordonné suivant les puissances de la variable x.*

On a

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = -2x,\\
&\varphi_2(x) = -2 + 4x^2,\\
&\varphi_3(x) = 12x - 8x^3,\\
&\varphi_4(x) = 12 - 48x^2 + 16x^4,
\end{aligned}$$

et l'on vérifie sans difficulté que ces valeurs satisfont aux relations données. Il suffit donc de démontrer que, si ces relations sont vérifiées jusqu'à une valeur n, elles le seront encore pour la valeur $n+1$.

Or on a, d'après la loi de formation du polynôme $\varphi(x)$,

$$\varphi_{n+1}(x) = -2x\,\varphi_n(x) + \varphi'_n(x) = -2x\,\varphi_n(x) - 2n\,\varphi_{n-1}(x),$$

puis

$$\varphi'_{n+1}(x) = -2x\,\varphi'_n(x) - 2\varphi_n(x) - 2n\,\varphi'_{n-1}(x);$$

or

$$-2n\,\varphi'_{n-1}(x) = 4n(n-1)\,\varphi_{n-2}(x),$$
$$-2x\,\varphi'_n(x) = 4nx\,\varphi_{n-1}(x);$$

donc

$$-2x\,\varphi'_n(x) - 2n\,\varphi'_{n-1}(x) = -2n\,\varphi_n(x),$$

et

$$\varphi'_{n+1}(x) = -2(n+1)\,\varphi_n(x),$$
$$\varphi''_{n+1}(x) = -2(n+1)\,\varphi'_n(x) = 4n(n+1)\,\varphi_{n-1}(x):$$

or

$$2n\,\varphi_{n-1}(x) = -\varphi_{n+1}(x) - 2x\,\varphi_n(x),$$

donc

$$\varphi''_{n+1}(x) = 2x\,\varphi'_{n+1}(x) - 2(n+1)\,\varphi_{n+1}(x).$$

Les valeurs de $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi'_{n+1}(x)$, $\varphi''_{n+1}(x)$ se déduisent de celles de $\varphi_n(x)$, $\varphi'_n(x)$, $\varphi''_n(x)$, en changeant n en $n+1$; donc les formules données sont générales.

2° On a, par la formule de Maclaurin,

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \frac{\varphi'_n(0)}{1}x + \frac{\varphi''_n(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}_n(0)}{1.2\ldots n}x^n.$$

D'après la relation $\varphi'_n(x) = -2n\,\varphi_{n-1}(x)$, on aura

$$\varphi^{(p)}_n(x) = -2n\,\varphi^{(p-1)}_{n-1}(x)$$

et, par suite,

$$\varphi^{(p)}_n(0) = -2n\,\varphi^{(p-1)}_{n-1}(0).$$

Pour n pair, les dérivées d'ordre impair renfermeront le facteur $\varphi_1(0) = 0$, et il en sera de même des dérivées d'ordre pair pour n impair ; le polynôme $\varphi_n(x)$ ne renfermera que des termes dont le degré sera de même parité que n.

On voit, par la relation ci-dessus, que, pour $x = 0$, une dérivée se déduit de la précédente en diminuant n d'une unité et multipliant par $-2n$. Cela posé, on aura

$$\varphi_n(0) = 1.3.5\ldots(n-1)(-2)^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi'_n(0) = 1.3.5\ldots(n-2)\,n\,(-2)^{\frac{n+2}{2}},$$

$$\varphi''_n(0) = 1.3.5\ldots(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\varphi'''_n(0) = 1.3.5\ldots(n-2)(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+3}{2}},$$

$$\varphi^{\text{IV}}_n(0) = 1.3.5\ldots(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+4}{2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi^{p)}_n(0) = 1.3.5\ldots(n-p+1)(n-p+2)\ldots n\,(-2)^{\frac{n+p}{2}},$$

n et p devant toujours être de même parité.

On aura donc

$$\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1.3.5\ldots(n-p+1)(n-p+2)\ldots n}{1.2.3\ldots p}(-2)^{\frac{n+p}{2}} x^p,$$

en donnant à p toutes les valeurs paires ou impaires, de zéro à n, suivant que n est lui-même pair ou impair.

Pour $p = 0$, le dénominateur est 1, et le numérateur s'arrête au facteur $n-1$

Mathématiques élémentaires.

Étant données les quatre arêtes AB, DA, BC, CD *d'un tétraèdre, déterminer le tétraèdre de manière que* *son volume soit maximum. Le tétraèdre ainsi déterminé, calculer les deux autres arêtes* BD *et* AC *et le volume dans les deux cas suivants :*

1° *Lorsque les arêtes opposées* AB *et* CD *sont égales, ainsi que les deux arêtes* BC *et* AD;

2° *Lorsque les deux arêtes consécutives* AB *et* BC *sont égales, ainsi que les deux arêtes* CD *et* DA.

Comparer les volumes en supposant que les deux arêtes AB *et* AD *ont respectivement des longueurs égales dans les deux cas.*

Le volume est évidemment susceptible d'un maximum, car il ne peut surpasser le sixième du produit des trois plus petites arêtes données. Il n'a pas atteint sa valeur maximum si l'un des dièdres AC, BD est aigu ou obtus; car, en prenant l'une des faces de ce dièdre pour base, on augmenterait la hauteur, et, par suite, le volume du tétraèdre, en rendant ce dièdre droit. Les deux dièdres AC, BD du tétraèdre maximum doivent donc être droits.

Ces deux conditions jointes aux quatre données forment six conditions qui déterminent le tétraèdre.

1° Soient $AB = CD = a$ et $BC = AD = b$.

Il est évident, d'après les données, que tout ce qu'on pourra dire de l'arête AC, dans le cas du maximum, s'appliquera aussi à l'arête BD, et réciproquement; donc ces deux arêtes doivent être égales. Appelons x leur longueur commune, et V_1 le volume du tétraèdre maximum.

Soient BE et DG perpendiculaires sur AC, on aura, par un théorème connu,

$$AG = EC = \frac{x^2 + b^2 - a^2}{2x},$$

puis

$$\overline{\mathrm{GE}}^2 = (x - 2\,\mathrm{EC})^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{x^2},$$

$$\overline{\mathrm{BE}}^2 = \overline{\mathrm{DG}}^2 = b^2 - \overline{\mathrm{EC}}^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 - (a^2 - b^2)^2}{4x^2},$$

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{BE}}^2 + \overline{\mathrm{GE}}^2 + \overline{\mathrm{DG}}^2 = 2\,\overline{\mathrm{BE}}^2 + \overline{\mathrm{EG}}^2,$$

ou

$$x^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 + (a^2 - b^2)^2}{2x^2},$$

et, en chassant le dénominateur,

$$3x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}}{3};$$

car on ne peut prendre pour x^2 que la valeur positive.

On a ensuite

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{6} x \overline{\mathrm{BE}}^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 - (a^2 - b^2)^2}{24x} = \frac{x^4 - (a^2 - b^2)^2}{12x},$$

et, en remplaçant x par sa valeur,

$$\mathrm{V}_1 = \frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4 + (a^2 + b^2)\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{27\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}}}.$$

2° Soient $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CD} = \mathrm{DA} = b$.

Posons $\mathrm{AC} = x$, $\mathrm{BD} = y$, et soit I le milieu de AC :

$$\mathrm{BI} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}, \quad \mathrm{DI} = \sqrt{b^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Soit V_2 le volume du tétraèdre maximum :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6} x\,\mathrm{BI}.\mathrm{DI} = \frac{1}{6} x \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \sqrt{b^2 - \frac{x^2}{4}},$$

d'où

$$9V^2 = \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)\left(b^2 - \frac{x^2}{4}\right);$$

V sera maximum en même temps que $9V^2$.

Multipliant les deux derniers facteurs respectivement par α et β, et déterminant α, β et x de manière à rendre la somme des facteurs constante et les facteurs égaux, ce qui rend leur produit maximum, on a les trois équations

$$\alpha + \beta = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} = \alpha\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right) = \beta\left(b^2 - \frac{x^2}{4}\right),$$

d'où, en éliminant α, β,

$$3x^4 - 8(a^2 + b^2)x^2 + 16a^2b^2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{4(a^2 + b^2) \pm 4\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}.$$

La première valeur est inadmissible, car elle donnerait

$$x^2 > 4b^2 \quad \text{ou} \quad x > 2b, \quad \text{si} \quad a > b,$$

et

$$x^2 > 4a^2 \quad \text{ou} \quad x > 2a, \quad \text{si} \quad b > a.$$

Le volume maximum sera donc donné par

$$\overline{AC}^2 = x^2 = \frac{4(a^2 + b^2) - 4\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3},$$

$$\overline{BD}^2 = y^2 = a^2 + b^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}.$$

On a alors

$$V_2^2 = \frac{-2a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2b^6 + 2(a^4 - a^2b^2 + b^4)\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{243}.$$

En faisant le carré de V_1, on trouve, en réduisant V_1^2

et V_2^2 au même dénominateur, que les deux valeurs sont identiques. Le volume maximum est donc le même dans les deux cas.

Philosophie.

Étant donnés un cercle de rayon R *et deux rayons rectangulaires* OA *et* OB, *déterminer les côtés* OC *et* OE *d'un rectangle* OCDE, *inscrit dans le quart de cercle* AO, *et tel que, si l'on fait tourner la figure autour du rayon* OA, *la surface totale du cylindre engendré soit égale à la surface d'une circonférence de rayon donné* a.

Soient x et y les côtés du rectangle respectivement situés sur OA et OB. On a les deux conditions

$$2\pi(y^2 + xy) = \pi a^2$$

ou

$$(1) \qquad 2y^2 + 2xy = a^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Substituant dans la seconde équation la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2y^2}{2y}$$

tirée de la première, il vient, en chassant le dénominateur,

$$8y^4 - 4(R^2 + a^2)y^2 + a^4 = 0,$$

d'où

$$y^2 = \frac{R^2 + a^2 \pm \sqrt{(R^2 + a^2)^2 - 2a^4}}{4}$$

ou

$$y^2 = \frac{R^2 + a^2 \pm \sqrt{\left[R^2 + (\sqrt{2} + 1)a^2\right]\left[R^2 - (\sqrt{2} - 1)a^2\right]}}{4}.$$

Pour que les valeurs de y^2 soient réelles, il faut qu'on ait

$$a^2 \leq \frac{R^2}{\sqrt{2}-1} = R^2(\sqrt{2}+1).$$

La valeur maximum de la surface totale du cylindre est donc

$$\pi R^2(\sqrt{2}+1).$$

Les valeurs correspondantes de y^2 et x^2 sont

$$y^2 = \frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}, \quad x^2 = \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}.$$

Pour construire géométriquement y dans le cas général, on posera

$$y^2 = az,$$

d'où

$$z^2 - \frac{R^2+a^2}{2a}z + \frac{a^2}{8} = 0.$$

On obtiendra les valeurs de z en construisant deux lignes dont la somme est $\frac{R^2+a^2}{2a}$ et le produit $\frac{a^2}{8}$.

On trouvera ensuite y par une moyenne proportionnelle entre a et z.

Rhétorique.

On donne deux sphères tangentes extérieurement et dont l'une a un rayon double de celui de l'autre. A l'ensemble de ces deux sphères on circonscrit un tronc de cône dont on demande le volume et la surface totale, connaissant le rayon de la petite sphère.

Soient O, O' les centres des deux sphères, A, A' les points de contact d'une génératrice, S le sommet du cône, C, C' les centres des deux bases, CD, C'D' leurs rayons, et r le rayon O'A' de la petite sphère.

On a

$$OO' = SO' = 3r,$$

$$\overline{SA'}^2 = \overline{SO'}^2 - \overline{O'A'}^2 = 8r^2,$$

d'où

$$SA' = 2r\sqrt{2}.$$

Les triangles semblables $SC'D'$, $SA'O'$ donnent

$$C'D' = \frac{SC' \cdot O'A'}{SA'} = \frac{2r^2}{2r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2},$$

$$CD = 4C'D' = 2r\sqrt{2},$$

$$CC' = 6r,$$

$$DD' = CC' \cdot \frac{SO'}{SA'} = \frac{9r\sqrt{2}}{2},$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi CC'\left(\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 + CD \cdot C'D'\right) = 21\pi r^3,$$

$$S = \pi\left[\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 + (CD + C'D')DD'\right] = 31\pi r^3.$$

Seconde.

I. *Étant donné un tétraèdre, on suppose que l'on mène par chaque arête un plan parallèle à l'arête opposée, et l'on demande: 1° quel sera le solide ainsi obtenu; 2° quel sera le rapport de son volume à celui du tétraèdre.*

Soit ABCD le tétraèdre donné.

Le volume obtenu, étant limité par six plans parallèles deux à deux, est un parallélépipède, dont A, B, C, D sont quatre sommets, et les six arêtes du tétraèdre sont six diagonales des faces.

Appelons A', B', C', D' les sommets du parallélépipède respectivement opposés à A, B, C, D. On obtiendra le tétraèdre proposé en retranchant du parallélépipède les quatre tétraèdres $A'BCD$, $B'ACD$, $C'ABD$, $D'ABC$, dont chacun, ayant pour base la moitié d'une face du parallélépipède, et pour hauteur la hauteur correspondante, a pour volume le sixième du volume du parallélépipède ; le tétraèdre donné est donc le tiers du parallélépipède, et le volume de celui-ci est le triple de celui du tétraèdre.

II. *La différence de deux nombres est a, et la somme de leurs racines carrées est aussi égale à a; quels sont ces deux nombres?*

Soient x et y les deux nombres cherchés, on a les équations

$$(1) \qquad x - y = a,$$

$$(2) \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = a,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$(3) \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$$

Les équations (2) et (3), combinées par addition et soustraction, donnent, en divisant par 2,

$$\sqrt{x} = \frac{a+1}{2},$$

$$\sqrt{y} = \frac{a-1}{2};$$

d'où

$$x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2,$$

$$y = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2.$$

Troisième.

I. *On donne un cercle et deux points fixes* A *et* B *sur la circonférence; par ces deux points on mène deux cordes égales de longueur quelconque; trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.*

Soient AIB le plus grand, et AHB le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB, AC et BD deux cordes égales, et M leur point de rencontre.

Il y a deux cas à considérer, suivant que les arcs AC et BD sont comptés en sens contraires ou dans le même sens de rotation.

1° Les arcs AC et BD sont de sens contraires.

Les angles MAB, MBA sont égaux comme ayant même mesure $\frac{AHB \mp AC}{2} = \frac{AHB \mp BD}{2}$; le triangle MAB est isoscèle, et le lieu du point M se compose de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB et de la droite indéfinie AB elle-même, correspondant au cas où les deux cordes égales se confondent avec AB.

2° Les arcs AC et BD sont pris dans le même sens de rotation.

Si les cordes AC et BD sont plus petites que AB, le point M est extérieur au cercle, et l'angle AMB a pour mesure la demi-différence des arcs AIB et AHB, diminués chacun d'une même quantité (AC = BD), c'est-à-dire $\frac{AIB - AHB}{2}$, ce qui est la mesure de l'angle des tangentes en A et B.

Si les cordes AC et BD sont plus grandes que AB, le point M est intérieur au cercle, et l'angle AMB a pour mesure $\frac{2AHB}{2}$, valeur supplémentaire de la précédente.

Le lieu du point M dans le second cas est donc la circonférence circonscrite au triangle formé par la corde AB et les tangentes en A et B.

Cette dernière partie du lieu disparaît à l'infini, lorsque AB est un diamètre.

II. *Démontrer que, si la somme* $3^n + 1$, *dans laquelle* *n représente un nombre entier, est un multiple de* 10, *la somme* $3^{n+4}+1$ *sera aussi un multiple de* 10.

3^n+1 étant un multiple de 10, 3^n est terminé par le chiffre 9; or $3^4=81$; donc le produit $3^n \times 3^4 = 3^{n+4}$ est terminé par 9 et $3^{n+4}+1$ est un multiple de 10.