NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur la théorie des sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 458-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__458_0>

SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES

(voir même tome, p. 265);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

La méthode que nous avons employée précédemment permet de démontrer encore les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Les arêtes de deux trièdres trirectangles ayant le même sommet forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

En prenant, en effet, pour axes des coordonnées les trois arêtes du premier, et en désignant par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour $i = 1, 2, 3$, les équations des arêtes D_i du second, le cône cherché a pour équation

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{x} + \frac{b_1 b_2 b_3}{y} + \frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite D_1, par exemple. se trouve tout entière sur le cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites D_2 et D_3 sont rectangulaires.

THÉORÈME. — *Deux systèmes de trois diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

Désignons par

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1$$

l'équation de la surface du second ordre rapportée au premier système, et par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour $i = 1, 2, 3$, les trois diamètres D_i formant le second système. Le cône cherché a pour équation

$$M\frac{a_1 a_2 a_3}{x} + N\frac{b_1 b_2 b_3}{y} + P\frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite D_1 est située sur ce cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites D_2 et D_3 sont conjuguées par rapport à la surface donnée.

On démontre de la même manière les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *Les faces de deux trièdres trirectangles forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

Théorème. — *Deux systèmes de trois plans diamétraux conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

Si, en effet,

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0,$$

pour $i = 1, 2, 3$, représente l'équation d'un plan diamétral du second système dans la surface

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1,$$

rapportée aux trois plans du premier, le cône cherché a pour équation

$$\sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3 x}{M}} + \sqrt{\frac{b_1 b_2 b_3 y}{N}} + \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 z}{P}} = 0.$$

L'avantage de ce genre de démonstration, qui rentre dans la méthode synthétique, consiste non-seulement dans la brièveté, mais dans l'établissement de l'équation de la courbe ou de la surface, ce qui permet de déduire aisément les propriétés métriques correspondantes.

Théorème. — *Si, sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois diagonales, les six points seront situés sur une conique.*

En prenant pour triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère et les équations des côtés du quadrilatère sous la forme

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} \pm \frac{z}{z_1} = 0,$$

les deux sommets du quadrilatère situés sur l'axe des z sont donnés avec $z = 0$ par les équations

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} = 0,$$

et l'équation d'un faisceau de deux droites conjuguées harmoniques des deux précédentes est, quelle que soit la valeur de ν,

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

et les traces de ces droites sur l'axe des z sont situées sur la conique ayant pour équation

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} - 2\lambda \frac{yz}{y_1 z_1} - 2\mu \frac{zx}{z_1 x_1} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

dont la forme symétrique démontre immédiatement le théorème proposé.

On en déduit la proposition suivante :

Si une conique divise harmoniquement deux diagonales d'un quadrilatère complet, elle divise aussi harmoniquement la troisième.

On dit, dans ce cas, que le quadrilatère et la conique sont conjugués, et l'équation précédente, qui représente l'équation générale des coniques conjuguées au quadrilatère, contient trois paramètres arbitraires (*).

Théorème. — *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à deux points quelconques se coupent en de nouveaux points dont les projections sur les côtés correspondants forment six points situés sur une conique.*

Considérons deux points P_1 et P_2 dans le plan du triangle de référence ABC; les droites BP_1, CP_2 et BP_2, CP_1 se coupent en deux points distincts de P_1 et P_2, dont les projections sur l'axe des x sont données par l'équation

$$\frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_2 z_2} - yz\left(\frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2}\right) = 0;$$

par conséquent, en opérant de même pour les autres sommets, on obtient six points situés sur la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz\left(\frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2}\right) - \ldots = 0.$$

En retranchant cette équation de celle de la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz\left(\frac{1}{y_1 z_2} + \frac{1}{y_2 z_1}\right) - \ldots = 0,$$

qui passe par les six projections de P_1 et de P_2, on obtient l'équation d'une conique circonscrite au triangle de

---

(*) Chasles, *Traité des Sections coniques*, t. I, p. 96. — P. Serret, *Géométrie de direction*, p. 261.

référence, et dont la position du centre d'homologie donne lieu à diverses propriétés métriques.

Cette conique passe par les points d'intersection des deux premières.

THÉORÈME. — *Si, par les trois points conjugués d'un point par rapport aux trois côtés d'un triangle pris pour axes de référence, on mène des tangentes à une conique, leurs traces sur les axes correspondants forment six points d'une conique.*

Nous appelons *points conjugués* d'un point donné par rapport à un triangle les trois points d'intersection des polaires de ce point par rapport à deux des angles de ce triangle.

Désignons par

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de la conique donnée, et par P_1 (x_1, y_1, z_1) le point donné. Le point conjugué de ce point par rapport à l'axe des z a pour coordonnées proportionnelles $x_1, y_1, -z_1$; et les tangentes menées de ce point à la conique donnée ont pour traces sur l'axe des z les deux points fournis par les équations $z = 0$ et

$$\begin{aligned}x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1)&\\ - 2xy\,[A''x_1y_1 + z_1(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)] &= 0.\end{aligned}$$

Ces deux points et les quatre analogues sont situés sur la conique

$$\begin{aligned}x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1)&\\ + z^2(A'x_1^2 + Ay_1^2 + 2B''x_1y_1)&\\ - 2Ay_1z_1yz - 2A'z_1x_1zx - 2A''x_1y_1xy&\\ - z(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)(xyz_1 + yzx_1 + zxy_1) &= 0.\end{aligned}$$

Ce théorème comporte un grand nombre de cas particuliers, ainsi qu'en corrélation.

Théorème. — *Les droites qui joignent un point aux traces d'une droite sur les côtés du triangle de référence rencontrent les autres côtés en six points situés sur une conique.*

En désignant par P_1 (x_1, y_1, z_1) et par D_1 (u, v, w) le point et la droite donnés, la conique cherchée a pour équation

$$\begin{aligned}&\frac{u}{x_1}(vy_1 + wz_1)x^2 + \ldots \\ &\quad - \frac{yz}{y_1 z_1}\left[vwy_1 z_1 + (ux_1 + vy_1)(ux_1 + wz_1)\right] - \ldots = 0.\end{aligned}$$

Ce théorème est un cas particulier du suivant, généralisation du théorème de Pascal :

Si deux cubiques ont trois points communs en ligne droite, les six autres points d'intersection sont situés sur une conique.

Nous compléterons enfin le théorème de M. Chasles, démontré dans l'article précédent. Nous avons vu que, si, par les trois sommets d'un triangle, on mène des tangentes à une conique

$$f(x, y, z) = 0,$$

leurs traces sur les côtés opposés sont situées sur la conique

$$\begin{aligned}\Phi = {} & A'A''x^2 + A''Ay^2 + AA'z^2 \\ & - 2ABzy - 2A'B'zx - 2A''B''xy = 0.\end{aligned}$$

L'équation de la conique Φ peut s'écrire

$$\begin{aligned}&B^2x^2 + B'^2y^2 + B''^2z^2 - 2B'B''yz \\ &\quad - 2B''Bzx - 2BB'xy + \delta f(x, y, z) = 0,\end{aligned}$$

δ désignant le discriminant de f, et, par conséquent, les coniques f et φ ont leurs points d'intersection sur la conique

$$\sqrt{\mathrm{B}x} + \sqrt{\mathrm{B}'y} + \sqrt{\mathrm{B}''z} = 0,$$

inscrite dans le triangle de référence.