VACHETTE

Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales trois à trois, quand deux lettres consécutives sont toujours distinctes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 438-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__438_0>

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES TROIS A TROIS, QUAND DEUX LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES

(voir 2e série, t. XIV, p. 299),

PAR M. VACHETTE,
Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

I. *Distinction des diverses espèces; ordre d'une espèce; variétés d'une même espèce.*

Le nombre total des perturbations de $3q$ lettres égales trois à trois est

$$T_{3q} = \frac{P_{3q}}{(P_3)^q}.$$

On désigne par $B_{q,3}$ le nombre de ces permutations où deux lettres consécutives sont toujours distinctes. Les autres contiennent des *ternaires* $\underline{aaa}$, et des binaires $\underline{aa}$, groupes de trois ou de deux lettres consécutives pareilles : on désigne par $M_q(r, t)$ ce nombre et l'espèce des permutations qui contiennent r ternaires et t binaires, $r + t$ n'étant jamais supérieur à q.

On peut écrire

$$B_{q,3} = M_q(0, 0).$$

Certaines permutations de l'espèce $B_{q,3}$ sont des tournantes incomplètes; telle est

abcdeabcdeabcde,

tournante incomplète à q places, au lieu de $3q$.

Les $M_q(r, t)$ sont des tournantes complètes; le nombre des tournantes de cette espèce est

$$\frac{1}{3q} M_q(r, t).$$

Il faut en excepter $M_1(t, o)$, espèce qui n'a qu'une permutation et qu'une tournante *aaa*.

$\dfrac{B_{q.3} + 2P_q}{3q}$ représente le nombre des tournantes de l'espèce $B_{q,3}$; en effet P_q est le nombre des tournantes incomplètes, à q permutations distinctes; si donc on ajoute $2P_q$ à $B_{q,3}$, le quotient de cette somme par $3q$ sera bien le nombre des tournantes.

L'identité

$$T_{3q} = B_{q,3} + \sum_{r+t=1}^{r+t=q} M_q(r, t)$$

servira de vérification.

Il y a lieu de considérer l'ordre q d'une permutation et de s'occuper d'abaisser cet ordre. Il y a lieu aussi de considérer des variétés asymétriques, et des variétés symétriques de fraction $\frac{1}{n}$, et l'on établira, comme dans le premier article, la formule

$$M_q(r, t) = 3q\,P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

II. *Évaluation directe des nombres* $M_q(r, q-r)$ *et* $M_q(q-1, o)$.

1° L'espèce $M_q(r, q-r)$ contient r ternaires, et $q-r$ binaires avec $q-r$ lettres isolées, distinctes, semblables aux lettres des binaires. Si l'on y suppose condensées en deux les trois lettres d'un ternaire, et en une les deux lettres d'un binaire, on obtient l'espèce $M_q(r)$ de la première Partie. On peut passer de l'espèce $M_q(r)$ à l'espèce $M_q(r, q-r)$.

Soit une tournante d'espèce $M_q(r)$ pour $q = 8$ et $r = 6$

$$h\underline{cc}h\underline{dd}\,\underline{ee}bf\underline{f}\,\underline{aa}g\underline{g}b.$$

On n'altère pas le nombre des tournantes en transformant chaque binaire en ternaire; et il reste en outre $2(q-r)$ lettres isolées, égales deux à deux; chacune des $q-r$ lettres distinctes, ayant sa semblable, peut être doublée de deux manières, ce qui fournit 2^{q-r} tournantes à l'espèce cherchée. On a donc, pour le nombre des tournantes de cette espèce, soit

$$\frac{1}{3q}\mathrm{M}_q(r, q-r),$$

soit

$$2^{q-r}\frac{1}{2q}\mathrm{M}_q(r),$$

d'où la formule $(r, q-r)$

$$\mathrm{M}_q(r, q-r) = 3.2^{q-r-1}\mathrm{M}_q(r),$$

et pour $r=0$, on obtient la formule $(0, q)$

$$\mathrm{M}_q(0, q) = 3.2^{q-1}\mathrm{B}_{q,2}.$$

Pour $r=q-1$ et $r=q$, on obtient les formules $(q-1, 1)$ et $(q, 0)$

$$\mathrm{M}_q(q-1, 1) = 3\mathrm{M}_q(q-1) = 3q(q-2)\mathrm{P}_q,$$
$$\mathrm{M}_q(q, 0) = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}_q(q) = 3\mathrm{P}_q\ (*).$$

2° L'espèce $\mathrm{M}_q(q-1, 0)$ contient $q-1$ ternaires, qui forment un des arrangements de l'espèce $\mathrm{A}_{q,q-1}$, comme on le voit ici pour $q=6$, et il reste $q-1$ places :

$$\underline{aaa}\cdot\underline{bbb}\cdot\underline{ccc}\cdot\underline{ddd}\cdot\underline{eee}$$

à donner à l'une des trois lettres f entre deux ternaires consécutifs; il y a donc, pour ces trois lettres, un nombre de systèmes de places égal à $\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$. Or il y a

(*) *Voir* le premier article, II.

$\frac{1}{q-1}A_{q,q-1}$ tournantes de l'espèces $A_{q,q-1}$, et, comme chacune d'elles en fournit $\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$ à l'espèce cherchée, on en comptera $\frac{(q-2)(q-3)}{6}A_{q,q-1}$ ou $\frac{(q-2)(q-3)}{6}P_q$; puisqu'il y en a $\frac{1}{3q}M_q(q-1, 0)$ dans l'espèce cherchée, si l'on égale ces deux nombres de tournantes, on a la formule $(q-1, 0)$

$$M_q(q-1, 0) = \tfrac{1}{2}q(q-2)(q-3)P_q.$$

III. *Formule du nombre* $B_{q,3}$.

A la formation des $B_{q,3}$ ne peuvent concourir que des $M_{q-1}(0, t)$ et des $M_{q-1}(1, t)$, puisqu'il faut deux des trois lettres nouvelles h pour détruire un ternaire; dans les $M_{q-1}(0, t)$ on ne peut pas prendre $t > 3$, et dans les $M_{q-1}(1, t)$ on ne peut pas prendre $t > 1$. Le nombre $B_{q,3}$ sera la somme de six parts fournies par les $B_{q-1,3}$, les $M_{q-1}(0, 1)$, les $M_{q-1}(0, 2)$, les $M_{q-1}(0, 3)$, les $M_{q-1}(1, 0)$ et les $M_{q-1}(1, 1)$.

1° Part des $B_{q-1,3}$.

Soit une $B_{q-1,3}$ (pour $q = 5$) contenant $3q - 3$ lettres

$$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d\cdot c\cdot a\cdot b\cdot d.$$

Si l'une des trois lettres h est mise à l'une des deux places extrêmes, il reste $3q - 4$ places intérieures pour les deux autres h, ce qui donne $\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}$ systèmes de places pour ces deux h, et $(3q-4)(3q-5)$ pour les trois : si aucune lettre h n'occupe les places extrêmes, on a $\frac{(3q-4)(3q-5)(3q-6)}{6}$ systèmes de places; en tout, il y en a $\frac{1}{2}q(3q-4)(3q-5)$. La part sera

$$\tfrac{1}{2}q(3q-4)(3q-5)\,B_{q-1,3}.$$

2° Part des $M_{q-1}(0, 1)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q=5$)

$$b\cdot c\cdot a\cdot e\cdot b\cdot a\cdot e\cdot b\cdot \underline{cc}\cdot a\cdot e.$$

On ferme le binaire $\underline{cc}$ avec une des trois lettres h, et il reste $3q-4$ places pour les deux autres; d'où

$$\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}$$

systèmes; la part en tournantes est

$$\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}\;\frac{1}{3(q-1)}\,M_{q-1}(0, 1),$$

et en permutations, si l'on multiplie par $3q$,

$$\frac{q(3q-4)(3q-5)}{2(q-1)}\,M_{q-1}(0, 1);$$

comme il n'y a point de $M_1(0, 1)$, cette part sera toujours applicable.

3° Part des $M_{q-1}(0, 2)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q=5$)

$$b\cdot d\cdot c\cdot a\cdot b\cdot a\cdot \underline{dd}\cdot b\cdot \underline{cc}\cdot a.$$

On ferme chacun des binaires avec une lettre h, et il reste $3q-5$ places pour la troisième. La part en tournantes est $(3q-5)\,\frac{1}{3(q-1)}\,M_{q-1}(0, 2)$, et en permutations

$$\frac{q(3q-5)}{q-1}\,M_{q-1}(0, 2).$$

4° Part des $M_{q-1}(0, 3)$.

On ferme chacun des binaires. La part est

$$\frac{q}{q-1} \mathrm{M}_{q-1}(0, 3).$$

5° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(1, 0)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q = 5$)

$$b \cdot d \cdot c \cdot \underline{aaa} \cdot b \cdot d \cdot c \cdot b \cdot d \cdot c.$$

On ferme le ternaire avec deux h, et il reste $3q - 5$ places pour la troisième. La part est

$$\frac{q(3q-5)}{q-1} \mathrm{M}_{q-1}(1, 0).$$

6° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(1, 1)$.

On ferme le ternaire et le binaire. La part est

$$\frac{q}{q-1} \mathrm{M}_{q-1}(1, 1).$$

Si l'on ajoute les six parts et qu'on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q} \mathrm{B}_{q,3} = {} & \frac{1}{2}(3q-4)(3q-5)(q-1)\mathrm{B}_{q-1,3} \\ & + \tfrac{1}{2}(3q-4)(3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(0, 1) \\ & + (3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(0, 2) + \mathrm{M}_{q-1}(0, 3) \\ & + (3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(1, 0) + \mathrm{M}_{q-1}(1, 1).\end{aligned}$$

IV. *Décomposition des* T_{3q} *pour* $q = 2$.

On a $\mathrm{T}_{3\times 2} = \frac{1.2.3.4.5.6}{2^2.3^2} = 20.$

Or

$B_{2,3} = 2$; $ababab$, tournante incomplète à deux permutations.

$M_2(0, 1) = 0$; le binaire $\underline{aa}$ en entraîne un autre.

$M_2(0, 2) = 12$; il y a une seule variété asymétrique $\underline{aa}\,ba\,\underline{bb}$, d'où

$$M_2(0, 2) = 1.3\ 2P_2.$$

$M_2(1, 0) = 0$; le ternaire $\underline{aa}$ en entraîne un autre.

$M_2(1, 1) = 0$; il ne peut exister avec un binaire.

$M_2(1, 0) = 6$; il y a une seule variété asymétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{aaa}\,\underline{bbb}$, d'où l'on a

$$M_2(2, 0) = 1.\tfrac{1}{2}.3.2P_2.$$

$\overline{}$

20

V. *Abaissement d'ordre du nombre* $M_q(r, t)$, *r n'étant pas nul.*

L'espèce $M_q(r, t)$ contient $\frac{1}{3q} M_q(r, t)$ tournantes, si l'on commence une tournante par un des r ternaires; le nombre des permutations ainsi comptées est $\frac{r}{3q} M_q(r, t)$.

Si l'on enlève un des ternaires, les lettres qui l'entourent peuvent donner un ternaire, un binaire, ou rien :

$$\left.\begin{array}{ll} b\,\underline{aaa}\,bb & \text{et la réciproque} \\ b\,\underline{aaa}\,b & \\ b\,\underline{aaa}\,c & \end{array}\right\}\ \text{donnent}\ \left\{\begin{array}{l} \underline{bbb} \\ \underline{bb} \\ bc \end{array}\right.$$

On obtient ainsi des permutations d'ordre $q - 1$, et le nombre ainsi compté, relativement à la lettre a éliminée, devra être multiplié par q, puisqu'il y a q lettres distinctes.

S'il s'est produit un ternaire, on a l'espèce

$$M_{q-1}(r, t - 1);$$

un ternaire bbb a remplacé le ternaire enlevé, et le binaire bb a disparu. Chacune de ces tournantes, commencée par un des r ternaires, fournit $2r$ permutations à l'espèce cherchée; on place le ternaire $\underline{aaa}$ de deux manières dans ce ternaire. La part sera

$$\frac{2r}{3(q-1)} M_{q-1}(r.t-1).$$

S'il s'est produit un binaire, on a l'espèce

$$M_{q-1}(r-1, t+1);$$

il y a un ternaire de moins, $\underline{aaa}$, et un binaire de plus, $\underline{bb}$. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t+1$ binaires, fournit $t+1$ permutations à l'espèce cherchée; on place le ternaire $\underline{aaa}$ à l'intérieur du binaire. La part sera

$$\frac{t+1}{3(q-1)} M_{q-1}(r-1, t+1).$$

S'il ne se produit rien de nouveau, on a l'espèce $M_{q-1}(r-1, t)$; il y a un ternaire de moins. Chacune de ces tournantes, commencée par une des $r-1$ lettres initiales des $r-1$ ternaires, ou par une des t lettres initiales des t binaires, ou par une des $3q-3-3(r-1)-2t$ lettres isolées, fournit à l'espèce cherchée

$$3q-3-3(r-1)-2t+r-1+t, \quad \text{ou} \quad 3q-2r-t-1$$

permutations, si l'on place en tête le ternaire $\underline{aaa}$. La part sera

$$\frac{3q-2r-t-1}{3(q-1)} M_{q-1}(r-1, t).$$

La somme des trois parts, multipliée par q, donne

$$\frac{r}{3q} \mathrm{M}_q (r, t) ;$$

si l'on multiplie tout par $q - 1$, on a la formule (r, t)

$$\frac{r(q-1)}{q^2} \mathrm{M}_q(r,t) = 2r \mathrm{M}_{q-1}(r, t-1) + (t+1) \mathrm{M}_{q-1}(r-1, t+1)$$
$$+ (3q - 2r - t - 1) \mathrm{M}_{q-1}(r-1, t).$$

VI. *Cas particuliers de la formule précédente.*

Si l'on y fait $t = 0$, on a la formule $(r, 0)$

$$\frac{r(q-1)}{q^2} \mathrm{M}_q(r, 0) = \mathrm{M}_{q-1}(r-1, 1) + (3q - 2r - 1) \mathrm{M}_{q-1}(r-1, 0).$$

Elle comprend, pour $r = 1$, la formule suivante $(1, 0)$, relative à une des espèces qui forment $\mathrm{B}_{q,3}$:

$$\frac{q-1}{q^2} \mathrm{M}_q (1, 0) = \mathrm{M}_{q-1} (0, 1) + 3 (q-1) \mathrm{B}_{q-1,3}.$$

Or, pour $q=3$ (IV), on a trouvé $\mathrm{M}_2 (0, 1) = 0$ et $\mathrm{B}_{2,3} = 2$; il en résulte

$$\tfrac{2}{9} \mathrm{M}_3 (1, 0) = 6 \mathrm{B}_{2,3} = 12, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M}_3 (1, 0) = 9 \mathrm{P}_3.$$

On le vérifie directement ; il n'y a qu'une variété asymétrique

$$\underline{aaa}\ bc\ bc\ bc\,;$$

donc $\mathrm{M}_3 (1, 0) = 1.3.3 \mathrm{P}_3 = 9 \mathrm{P}_3$.

Elle comprend encore, pour $r = 1$, $t = 1$ la formule $(1, 1)$, relative à une des espèces qui forment $\mathrm{B}_{q,}$:

$$\frac{q-1}{q^2} \mathrm{M}_q(1, 1) = 2 \mathrm{M}_{q-1} (1, 0) + 2 \mathrm{M}_{q-1} (0, 2) + (3q - 4) \mathrm{M}_{q-1} (0, 1).$$

VII. *Abaissement d'ordre du nombre* $M_q(o, t)$; *cas particuliers.*

1. Cette espèce contient $\frac{1}{3q} M_q(o, t)$ tournantes; si l'on commence la tournante par un des t binaires, le nombre des permutations ainsi comptées est $\frac{t}{3q} M_q(o, t)$.

On enlève le binaire $\underline{aa}$ et la lettre isolée $\underline{a}$; on obtient ainsi des permutations d'ordre $q - 1$, et le nombre ainsi compté, relativement à la lettre a éliminée, devra être multiplié par q.

La suppression du binaire $\underline{aa}$, considérée seule, peut donner un ternaire, un binaire ou rien :

$$\left.\begin{array}{ll} b\,\underline{aa}\,bb & \text{et la réciproque} \\ b\,\underline{aa}\,b & \quad » \\ b\,\underline{aa}\,c & \quad » \end{array}\right\} \text{donnent} \left\{\begin{array}{l} \underline{bbb} \\ \underline{bb} \\ bc \end{array}\right.$$

La suppression de la lettre $\underline{a}$, considérée seule, donne les mêmes cas :

$$\left.\begin{array}{ll} b\,\underline{a}\,bb & \text{et la réciproque} \\ b\,\underline{a}\,b & \quad » \\ b\,\underline{a}\,c & \quad » \end{array}\right\} \text{donnent} \left\{\begin{array}{l} \underline{bbb} \\ \underline{bb} \\ bc \end{array}\right.$$

Mais le binaire $\underline{aa}$ et la lettre $\underline{a}$ peuvent produire, par raccordement, un ternaire, quand on les enlève :

$$b\,\underline{aa}\,b\,\underline{a}\,b \quad \text{et la réciproque donnent} \quad \underline{bbb}.$$

On nomme *raccordement* toute figure qui, comme la précédente, résulte d'un entremêlement de deux ou de plus de deux figures simples, que leur rapprochement fait confondre en une figure composée.

Premier cas, sans raccordements.

1° Il naît de $\underline{aa}$ un ternaire.

Si en même temps il naît de $\underline{a}$ un ternaire, on a l'espèce $M_q(2, t-3)$; il s'est formé deux ternaires, et trois binaires ont disparu, $\underline{aa}$ et le binaire voisin, avec le binaire voisin de $\underline{a}$. Chaque tournante de cette espèce, commencée par un des deux ternaires, fournit huit permutations à l'espèce cherchée; on ferme de deux manières, le premier ternaire avec $\underline{aa}$, l'autre avec $\underline{a}$. La part est

$$\frac{8}{3(q-1)} M_q(2, t-3).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-1)$; il s'est formé un ternaire et un binaire; $\underline{aa}$ et le binaire voisin ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(t-1)$ permutations à l'espèce cherchée; avec $\underline{aa}$, on ferme le ternaire de deux manières et avec $\underline{a}$ l'un des $t-1$ binaires. La part est

$$\frac{2(t-1)}{3(q-1)} M_{q-1}(1, t-1).$$

Sinon, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-2)$; il s'est formé un ternaire, et deux binaires ont été supprimés, $\underline{aa}$ et le binaire voisin. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(3q-t-3)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le ternaire $\underline{bbb}$ de deux manières, et l'on place le troisième a à l'une des $3q-3-2-(t-2)$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins deux du ternaire et une de chaque binaire (pour $q = 7$ et $t = 5$) :

$$\underline{bbb} \cdot d \cdot e \cdot \underline{cc} \cdot \underline{dd} \cdot c \cdot e \cdot g \cdot \underline{ff} \cdot g \cdot f \cdot e \cdot g \cdot .$$

La part est alors

$$\frac{2(3q - t - 3)}{3(q - 1)} \mathrm{M}_{q-1}(1, t-2).$$

2° Il naît de $\underline{aa}$ un binaire.

Si en même temps il naît de $\underline{a}$ un ternaire, on obtient l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(1, t-1)$; il s'est formé un ternaire $\underline{ccc}$ autour de $\underline{a}$, un binaire $\underline{bb}$ autour de $\underline{aa}$, et les deux binaires $\underline{aa}$ et $\underline{cc}$ ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t - 1$ binaires, fournit $2(t - 1)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme $\underline{ccc}$ avec a de deux manières, et l'on place $\underline{aa}$ dans l'intérieur d'un des $t - 1$ binaires. La part est

$$\frac{2(t-1)}{3(q-1)} \mathrm{M}_{q-1}(1, t-1).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t+1)$; il s'est formé les binaires $\underline{bb}$ et $\underline{cc}$, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t + 1$ binaires, fournit $t(t+1)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le binaire initial, et avec $\underline{a}$ l'un des t binaires qui restent. La part est

$$\frac{t(t+1)}{3(q-1)} \mathrm{M}_{q-1}(0, t+1).$$

Sinon, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t)$; le binaire $\underline{bb}$ remplace le binaire $\underline{aa}$. Chacune de ces tournantes, commencée par un des t binaires, fournit $t(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le binaire initial, et l'on place $\underline{a}$ à l'une des $3q - t - 3$

places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 4$) :

$$\underline{bb}\cdot c\cdot d\cdot e\cdot \underline{dd}\cdot f\cdot g\cdot \underline{cc}\cdot f\cdot \underline{gg}\cdot e\cdot .$$

La part est alors

$$\frac{t(3q - t - 3)}{3(q-1)} M_{q-1}(0, t).$$

3° Il ne naît de $\underline{aa}$ ni ternaire ni binaire.

S'il naît de a un ternaire, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-2)$; il s'est formé le ternaire $\underline{ccc}$ et les binaires $\underline{aa}$, $\underline{cc}$ ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée ; on ferme avec a de deux manières le ternaire, et l'on place $\underline{aa}$ à l'une des $3q - 3 - 2 - (t-2)$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins deux lettres du ternaire, et une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 5$) :

$$\underline{ccc}\cdot \underline{dd}\cdot e\cdot \underline{ff}\cdot d\cdot g\cdot \underline{cc}\cdot g\cdot f\cdot g.$$

La part est alors

$$\frac{2(3q - t - 3)}{3(q-1)} M_{q-1}(1, t-2).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $M_{q-1}(0, t)$; il s'est formé le binaire $\underline{cc}$, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par un des t binaires, fournit $t(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée ; on place $\underline{a}$ dans le binaire initial, et $\underline{aa}$ à l'une des $3q - t - 3$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 4$) :

$$\underline{cc}\cdot d\cdot e\cdot \underline{dd}\cdot \underline{ff}\cdot g\cdot d\cdot e\cdot \underline{hh}\cdot f\cdot h.$$

La part est

$$\frac{t(3q-t-3)}{3(q-1)} \mathrm{M}_{q-1}(0, t).$$

Sinon, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t-1)$; le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Dans une des tournantes (pour $q=6$ et $t=5$), il y a $3q-3(t-1)$ places

$$\underline{bb}\cdot\underline{cc}\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot\underline{dd}\cdot\underline{ff}\cdot e\cdot f\cdot e$$

disponibles pour $\underline{aa}$ et $\underline{a}$, autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire, ou $3q-t-2$; on commence la tournante par $\underline{aa}$ une fois placé, ce qui donne $3q-t-2$ permutations, et il reste pour $\underline{a}$, $3q-t-3$ places, ce qui donne $(3q-t-2)(3q-t-3)$ permutations. La part est

$$\frac{(3q-t-2)(3q-t-3)}{(3q-1)} \mathrm{M}_{q-1}(0, t-1).$$

Deuxième cas, avec raccordements.

1. On a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(1, t-1)$; il s'est formé un ternaire, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit deux permutations à l'espèce cherchée; avec $\underline{aa}$ et $\underline{a}$ on ferme le ternaire de deux manières. La part est

$$\frac{2}{3(q-1)} \mathrm{M}_{q-1}(1, t-1).$$

On y ajoute les dix parts trouvées; leur somme, multipliée par q, donne $\frac{t}{3q}\mathrm{M}_q(0, t)$; on multiplie tout par

$\frac{q-1}{q}$, et avec les réductions, on obtient la formule (o, t)

$$\begin{aligned}\frac{t(q-1)}{q^2}M_q(0,t) &= 8M_{q-1}(2,t-3)+2(2,t-1)M_{q-1}(1,t-1)\\ &+4(3q-t-3)M_{q-1}(1,t-2)+t(t+1)M_{q-1}(0,t+1)\\ &+(3q-t-3)[(2tM_{q-1}(0,t)+(3q-t-2)M_{q-1}(0,t-1)].\end{aligned}$$

2. Si l'on y pose $t=1$, $t=2$, $t=3$, on a les trois formules (o, 1), (o, 2), (o, 3), relatives à des espèces qui forment $B_{q,3}$,

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q^2}M_q(0,1) &= 2M_{q-1}(1,0)+2M_{q-1}(0,2)+(3q-4)\\ &\times[2M_{q-1}(0,1)+3(q-1)B_{q-1,3}],\\ \frac{2(q-1)}{q^2}M_q(0,2) &= 6M_{q-1}(1,1)+4(3q-5)M_{q-1}(1,0)\\ &+6M_{q-1}(0,3)+(3q-5)\\ &\times[4M_{q-1}(0,2)+(3q-4)M_{q-1}(0,1)],\\ \frac{3(q-1)}{q^2}M_q(0,3)&\\ &= 8M_{q-1}(2,0)+10M_{q-1}(1,2)+4(3q-6)M_{q-1}(1,1)\\ &+12M_{q-1}(0,4)+(3q-6)\\ &\times[6M_{q-1}(0,3)+(3q-5)M_{q-1}(0,2)].\end{aligned}$$

La formule (o, 2) est illusoire pour $q=2$; elle donnerait

$$\tfrac{1}{2}M_2(0,2)=4M_1(1,0),$$

d'où M_2 (o, 2) serait 8, tandis qu'on a trouvé 12 (IV). D'abord M_1 (1, o) n'est qu'une tournante incomplète, à une place au lieu de trois, et, pour cette raison, le nombre trouvé est trois fois trop petit; il faudrait prendre 24 au lieu de 8; ensuite, qu'on ferme le ternaire avec $\overline{aa}$ de deux manières, ou avec $\bar{a}$ de deux manières, on obtiendra le même résultat; le nombre trouvé est deux fois trop grand, et il faudra prendre 12 au lieu de 24.

VIII. *Résolution de trois nouveaux problèmes.*

1° Trouver le nombre $B_{3q'+2t+r}$ des permutations différentes faites avec $3q'+2t+r$ lettres, dont $3q'$ égales 3 à 3, $2t$ égales 2 à 2, $q'+t+r$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

Une tournante d'espèce $M_q(r, t)$ devient une $B_{3q'+2t+r}$, si l'on y suppose condensées en une seule les trois lettres de chacun des r ternaires, et les deux lettres de chacun des t binaires, et qu'on pose $q-r-t=q'$. Or, sur les $3q$ permutations d'une tournante $M_q(r, t)$, il y en a $2r+t$, celles où les extrêmes offrent un ternaire ou un binaire coupé, qui ne donnent à l'espèce cherchée rien de plus que les $3q-2r-t$ autres permutations. On a donc

$$B_{3q'+2t+r} = \frac{3q-2r-t}{3q} M_q(r, t) = \frac{3q'+r+2t}{3(q'+r+t)} M_q(r, t).$$

2° Trouver le nombre $B_{3q'+2t}$ des permutations différentes qu'on peut faire avec $3q'+2t$ lettres, dont $3q'$ égales 3 à 3, et $2t$ égales 2 à 2, $q'+t$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

On fait $r=0$ dans la formule précédente,

$$B_{3q'+2t} = \frac{3q'+2t}{3(q'+t)} M_{q'+t}(0, t).$$

3° Trouver le nombre $B_{3q'+r}$ des permutations différentes qu'on peut faire avec $3q'+r$ lettres dont $3q'$ égales 3 à 3, $q'+r$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

On fait $t=0$ dans la même formule,

$$B_{3q'+r} = \frac{3q'+r}{3(q'+r)} M_{q'+r}(r, 0).$$

Toutes ces permutations sont des tournantes complètes.

IX. *Décomposition des* $T_{3\times 3}$, *avec des calculs directs.*

Formule $B_{q,3}$. $B_{q,3} = 22 P_3$

» (o, 1). $M_3(0,1) = 63 P_3$

Il y a sept variétés asymétriques :

$\underline{aa}\, bacbcbc$	1
bca^{bc}.	2
$bcbacbc$	1
ca^{bc}.	2
bac.	1
$\frac{1}{3.3P_3} M_3(0,1) =$	7

Formule (o,2). $M_3(0,2) = 72 P_3$

Il y a huit variétés asymétriques :

$\underline{aa}\, \underline{bb}\, c^a c^b c$.	2
$\underline{aa}\, c\, \underline{bb}\, ca^{bc}$.	2
$cbac$.	1
$acbc$.	1
$\underline{aa}\, ca\, \underline{bb}\, cbc$.	1
$bc \quad cac$.	1
$\frac{1}{3.3P_3} M_3(0,2) =$	8

Formule (o,9). $M_3(0,3) = 48 P_3$

Il y a cinq variétés asymétriques :

$\underline{aa}\, \underline{bb}\, \underline{cc}^{abc}$.	3
$\underline{aa}\, \underline{bb}\, a\, \underline{cc}^{bc}$.	1
La réciproque.	1
$5 \times 9 P_3$ ou $45 P_3$	5

Il y a une symétrique de fraction $\frac{1}{3}$:

$\frac{1}{3}\,9P_3$ ou $3P_3$ $\underline{aa}\ c\ \underline{bb}\ a\ \underline{cc}\ b$.

Formule $(1,0)$.................... $M_3(1,0) = \quad 9P_3$

Il y a une variété asymétrique :

$\underline{aaa}\ bc\ bc\ bc$.

Formule $(1,1)$.................... $M_3(1,1) = \quad 18P_3$

Il y a deux variétés asymétriques :

$\underline{aaa}\ c\ \underline{bb}\ cbc$.........	1
La réciproque........	1
	2

Formule $(r, q-r)$.................... $M_3(1,2) = \quad 36P_3$

Il y a quatre variétés asymétriques :

$\underline{aaa}\ \underline{bb}\ \underline{cc}\ bc$.........	1
$cb\ \underline{cc}$.........	1
Les réciproques......	2
	4

Formule $(q-1,0)\,M_3(2,0) = 0$.

» $(q-1,1)$.................... $M_3(2,1) = \quad 9P_3$

» $(q,0)$.................... $M_3(3,0) = \quad 3P_3$

$280P_3$

Et, en effet, $T_{3\times 3} = T_{3\times 2}\dfrac{7.8.9}{1.2.3} = 10P_2 84 = 280P_3$.

X. *Calculs depuis $q=4$ jusqu'à $q=6$, et valeur de* $B_{7,3}$.

1° Décompos. des $T_{3\times 4}$, $T_{3\times 4} = T_{3\times 3}\,\dfrac{10.11.12}{2.3} = 15400P_4$

Formule $B_{q,3}$	$B_{4,3} =$	$1415 P_4$
» $(0,1)$	$M_4(0,1) =$	$3672 P_4$
» $(0,2)$	$M_4(0,2) =$	$4128 P_4$
» $(0,3)$	$M_4(0,3) =$	$2464 P_4$
» $(0,q)$	$M_4(0,4) =$	$744 P_4$
» $(1,0)$	$M_4(1,0) =$	$348 P_4$
» $(1,1)$	$M_4(1,1) =$	$888 P_4$
» (r, t)	$M_4(1,2) =$	$912 P_4$
» $(r, q-r)$	$M_4(1,3) =$	$480 P_4$
» $(r, 0)$	$M_4(2,0) =$	$54 P_4$
» (r, t)	$M_4(2,1) =$	$120 P_4$
» $(r, q-r)$	$M_4(2,2) =$	$144 P_4$
» $(q-1, 0)$	$M_4(3,0) =$	$4 P_4$
» $(q-1, 0)$	$M_4(3,1) =$	$24 P_4$
» $(q, 0)$	$M_4(4,0) =$	$3 P_4$
		$15400 P_4$

2° Décomposition des $T_{3\times 5}$, $T_{3\times 5} = 1401400 P_5$.

Formule $B_{q,3}$	$B_{5,3} =$	$140343 P_5$
» $(0,1)$	$M_5(0,1) =$	$345645 P_5$
» $(0,2)$	$M_5(0,2) =$	$376920 P_5$
» $(0,3)$	$M_5(0,3) =$	$231260 P_5$
» $(0, t)$	$M_5(0,4) =$	$81840 P_5$
» $(0, q)$	$M_5(0,5) =$	$14064 P_5$
» $(1, 0)$	$M_5(1,0) =$	$25815 P_5$
» $(1, 1)$	$M_5(1,1) =$	$61680 P_5$
» (r, t)	$M_5(1,2) =$	$63060 P_5$
» (r, t)	$M_5(1,3) =$	$33720 P_5$
» $(r, q-r)$	$M_5(1,4) =$	$8640 P_5$
» $(r, 0)$	$M_5(2,0) =$	$2730 P_5$
» (r, t)	$M_5(2,1) =$	$6270 P_5$
» (r, t)	$M_5(2,2) =$	$5760 P_5$
» $(r, q-r)$	$M_5(2,3) =$	$2460 P_5$
» $(r, 0)$	$M_5(3,0) =$	$230 P_5$
» (r, t)	$M_5(3,1) =$	$480 P_5$
» $(r, q-r)$	$M_5(3,2) =$	$420 P_5$
» $(q-1, 0)$	$M_5(4,0) =$	$15 P_5$
» $(q-1, 1)$	$M_5(4,1) =$	$45 P_5$
» $(q, 0)$	$M_5(5,0) =$	$3 P_5$
		$1401400 P_5$

3° Décomposition des $T_{3\times 6}$ $T_{3\times 6} = 190590400\,P_6$.

Formule $B_{q,3}$	$B_{6,3} =$	$20167651\,P_6$
» $(0, 1)$	$M_6(0,1) =$	$47946672\,P_6$
» $(0, 2)$	$M_6(0,2) =$	$51364350\,A_6$
» $(0, 3)$	$M_6(0,3) =$	$32018160\,P_6$
» $(0, t)$	$M_6(0,4) =$	$12391920\,P_6$
» $(0, t)$	$M_6(0,5) =$	$2870208\,P_6$
» $(0, q)$	$M_6(0,6) =$	$319296\,P_6$
» $(1, 0)$	$M_6(1,0) =$	$2940948\,P_6$
» $(1, 1)$	$M_6(1,1) =$	$6773400\,P_6$
» (r, t)	$M_6(1,2) =$	$6860520\,P_6$
» (r, t)	$M_6(1,3) =$	$3874320\,P_6$
» (r, t)	$M_6(1,4) =$	$1245600\,P_6$
» $(r, q-r)$	$M_6(1,5) =$	$189504\,P_6$
» $(r, 0)$	$M_6(2,0) =$	$238365\,P_6$
» (r, t)	$M_6(2,1) =$	$526320\,P_6$
» (r, t)	$M_6(2,2) =$	$491940\,P_6$
» (r, t)	$M_6(2,3) =$	$236880\,P_6$
» $(r, q-r)$	$M_6(2,4) =$	$52560\,P_6$
» $(r, 0)$	$M_6(3,0) =$	$14520\,P_6$
» (r, t)	$M_6(3,1) =$	$30240\,P_6$
» (r, t)	$M_6(3,2) =$	$24840\,P_6$
» $(r, q-r)$	$M_6(3,3) =$	$8880\,P_6$
» $(r, 0)$	$M_6(4,0) =$	$765\,P_6$
» (r, t)	$M_6(4,1) =$	$1440\,P_6$
» $(r, q-r)$	$M_6(4,2) =$	$990\,P_6$
» $(q-1, 0)$	$M_6(5,0) =$	$36\,P_6$
» $(q-1, 1)$	$M_6(5,1) =$	$72\,P_6$
» $(q, 0)$	$M_6(6,0) =$	$3\,P_6$
		$190590400\,P_6$

4° Valeur de $B_{7,3}$.

Formule $B_{7,3}$, $B_{7,3} = 398087156\,P_7$.