NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

# Sur la transformation des équations du second degré à deux et à trois variables

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 14 (1875), p. 396-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__396_1>

# SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET A TROIS VARIABLES;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

## I.

**1.** Soit considérée l'équation d'une hyperbole sous la forme

$$(1) \qquad u^2 - v^2 = \mathrm{K},$$

$u$ et $v$ désignant deux fonctions du premier degré en $x$ et $y$, telles que les droites données par $u = 0$, $v = 0$ aient un point commun et un seul.

On peut transformer le binôme $u^2 - v^2$ en

$$u^2 - v^2 = \lambda(u+v)\frac{u-v}{\lambda}$$

$$= \left[\frac{\lambda(u+v) + \dfrac{u-v}{\lambda}}{2}\right]^2 - \left[\frac{\lambda(u+v) - \dfrac{u-v}{\lambda}}{2}\right]^2,$$

de sorte que, si l'on pose

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda', \quad \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda'',$$

il vient

$$(3)\qquad u^2 - v^2 = (\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2.$$

L'équation proposée peut ainsi être changée en

$$(4)\qquad (\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2 = \mathrm{K}.$$

On peut disposer de la constante $\lambda$ de façon à avoir, par $\lambda' u + \lambda'' v = 0$, $\lambda'' u + \lambda' v = 0$, deux diamètres conjugués quelconques de la courbe.

2. Supposons que le diamètre à représenter par $\lambda' u + \lambda'' v = 0$ soit donné par l'équation

$$mu - nv = 0.$$

Il s'agira d'avoir

$$\frac{\lambda'}{m} = \frac{\lambda''}{-n} = \frac{\lambda}{m-n} = \frac{\dfrac{1}{\lambda}}{m+n} = \frac{1}{\sqrt{m^2 - n^2}}$$

$$= \frac{\lambda' u + \lambda'' v}{mu - nv} = \frac{\lambda'' u + \lambda' v}{-nu + mv},$$

d'où résultent

$$\lambda' u + \lambda'' v = \frac{mu - nv}{\sqrt{m^2 - n^2}},$$

$$\lambda'' u + \lambda' v = \frac{-nu + mv}{\sqrt{m^2 - n^2}}.$$

L'équation (4) est donc

$$(4') \qquad \frac{(mu - nv)^2}{m^2 - n^2} - \frac{(-nu + mv)^2}{m^2 - n^2} = \mathrm{K}.$$

3. Si les deux diamètres ont pour équations

$$mu - nv = 0, \quad m'u - n'v = 0,$$

on aura, avec

$$\frac{\lambda'}{m} = \frac{\lambda''}{-n} = \frac{\lambda}{m-n} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{m+n} = \frac{1}{\sqrt{m^2 - n^2}} = \frac{\lambda' u + \lambda'' v}{mu - nv},$$

$$\frac{\lambda''}{m'} = \frac{\lambda'}{-n'} = \frac{\lambda}{m' - n'} = \frac{-\frac{1}{\lambda}}{m' + n'} = \frac{1}{\sqrt{n'^2 - m'^2}} = \frac{\lambda'' u + \lambda' v}{m'u - n'v},$$

d'où l'équation

$$(4'') \qquad \frac{(mu - nv)^2}{m^2 - n^2} + \frac{(m'u - n'v)^2}{m'^2 - n'^2} = \mathrm{K},$$

eu égard à la relation

$$(5) \qquad mm' - nn' = 0.$$

Qu'on change $v$ en $vi$ et $n$ en $ni$, $n'$ en $ni$, cela s'appliquera à l'ellipse.

4. Ainsi l'équation

$$u^2 + v^2 = \mathrm{K}$$

peut se changer en

$$(4') \qquad \frac{(mu + nv)^2}{m^2 + n^2} + \frac{(-nu + mv)^2}{m^2 + n^2} = \mathrm{K},$$

un diamètre de l'ellipse, quelconque, étant donné par

$$mu + nv = 0,$$

le conjugué par

$$-nu + mv = 0;$$

et, si les deux diamètres conjugués ont pour équations

$$mu + nv = 0, \quad m'u + n'v = 0,$$

moyennant la condition

$$mm' + nn' = 0,$$

l'ellipse a pour équation correspondante

$$(4'') \qquad \frac{(mu + nv)^2}{m^2 + n^2} + \frac{(m'u + n'v)^2}{m'^2 + n'^2} = \text{K}.$$

5. *Remarque.* — Du moment que quatre quantités $m$, $n$, $m'$, $n'$ sont liées par la relation

$$mm' + nn' = 0,$$

il s'ensuit, d'après cela,

$$\frac{m^2}{m^2 + n^2} + \frac{m'^2}{m'^2 + n'^2} = 1,$$

$$\frac{n^2}{m^2 + n^2} + \frac{n'^2}{m'^2 + n'^2} = 1,$$

$$\frac{mn}{m^2 + n^2} + \frac{m'n'}{m'^2 + n'^2} = 0.$$

Ce sont d'ailleurs des relations faciles à vérifier. En les appliquant à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on retrouve entre les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués des relations connues.

Soient, pour les deux diamètres conjugués, les équations

$$m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} = 0,$$

$$m'\frac{x}{a} + n'\frac{y}{b} = 0.$$

L'équation de l'ellipse sera, sous la forme $(4'')$,

$$\frac{\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)^2}{m^2+n^2}+\frac{\left(m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}\right)^2}{m'^2+n'^2}=1$$

ou

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}=1,$$

en posant

$$m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}=\sqrt{m^2+n^2}\,\frac{X}{a'},$$

$$m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}=\sqrt{m'^2+n'^2}\,\frac{Y}{b'},$$

d'où, en observant que

$$mn'-m'n=\frac{n'}{m}(m^2+n^2)=-\frac{n}{m'}(m'^2+n'^2),$$

on tire, pour $Y=0$, $X=a'$,

$$\frac{x}{a}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad \frac{y}{b}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

et, par conséquent, les relations reviennent à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

$$xy+x'y'=0;$$

et, comme l'on a

$$(x^2+x'^2)(y^2+y'^2)=(xy'-yx')^2+(xy+x'y')^2,$$

il s'ensuit

$$(xy'-yx')^2=a^2b^2,\ldots.$$

6. Quand on part de l'équation

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

on obtient, par une transformation familière à tous,

$$f(x,y) = \frac{1}{A}(Ax + By + D)^2$$
$$+ \frac{A}{AC - B^2}\left(\frac{AC - B^2}{A}y + \frac{BD - AE}{A}\right)^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2},$$

$\Delta$ étant le discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$u = \frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}}, \quad v = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A}y + \frac{BD - AE}{A}\right),$$

on a

$$mu + nv = m\frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}}$$
$$+ n\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A}y + \frac{BD - AE}{A}\right),$$

$$-nu + mv = -n\frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}}$$
$$+ m\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A}y + \frac{BD - AE}{A}\right).$$

Soit donné

$$m_1x + n_1y + p_1 = mu + nv = 0 \text{ pour un diamètre,}$$

et soit

$$m_2x + n_2y + p_2 = -nu + mv = 0 \text{ pour le conjugué.}$$

Nous avons là

$$m_1 = m\sqrt{A}, \quad n_1 = m\frac{B}{\sqrt{A}} + n\frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}},$$

$$p_1 = m\frac{D}{\sqrt{A}} - n\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\frac{BD - AE}{A},$$

$$m_2 = -n\sqrt{A}, \quad n_2 = -n\frac{B}{\sqrt{A}} + m\frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}},$$

$$p_2 = -n\frac{D}{\sqrt{A}} - m\frac{BD - AE}{\sqrt{A}\sqrt{AC - B^2}};$$

d'où

$$m = \frac{m_1}{\sqrt{A}}, \quad n = \frac{An_1 - Bm_1}{\sqrt{A}\sqrt{AC - B^2}},$$

$$m_2 = -\frac{An_1 - Bm_1}{\sqrt{AC - B^2}}, \quad n_2 = -\frac{Bn_1 - m_1 C}{\sqrt{AC - B^2}}, \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{An_1 - Bm_1}{Bn_1 - Cm_1},$$

ou

$$An_1 n_2 + Cm_1 m_2 - B(m_1 n_2 + n_1 m_2) = 0,$$

puis

$$p_1 = \frac{m_1(DC - BE) - n_1(BD - AE)}{AC - B^2},$$

$$p_2 = \frac{-Dn_1 + Em_1}{\sqrt{AC - B^2}}:$$

d'après quoi

$$m_2 x + n_2 y + p_2 = \frac{m_1(Bx + Cy + E) - n_1(Ax + By + D)}{\sqrt{AC - B^2}},$$

et l'on a, pour l'équation $(4')$,

$$(m_1 x + n_1 y + p_1)^2 + \frac{(m_1 \frac{1}{2} f'_y - n_1 \frac{1}{2} f'_x)^2}{AC - B^2}$$
$$+ \Delta\frac{An_1^2 - 2Bm_1 n_1 + Cm_1^2}{(AC - B^2)^2} = 0.$$

Ajoutons que, en raison de ce que l'on a

$$m_1 x + n_1 y + p_1 = \frac{(m_1 C - n_1 B)\frac{1}{2}f'_x + (m_1 A - n_1 B)\frac{1}{2}f'_y}{AC - B^2},$$

l'équation est encore

$$\left[(m_1 C - n_1 B)\tfrac{1}{2}f'_x + (m_1 A - n_1 B)\tfrac{1}{2}f'_y\right]^2 + (AC - B^2)(m_1 \tfrac{1}{2}f'_y - n_1 \tfrac{1}{2}f'_x)^2 + \Delta(An_1^2 - 2Bm_1n_1 + Cm_1^2) = 0.$$

A prendre $m_1 = n_1 = 1$, il vient

$$\left(x + y - \frac{BE - CD + BD - AE}{AC - B^2}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2}f'_x - \frac{1}{2}f'_y)^2}{AC - B^2} + \Delta\frac{A - 2B + C}{(AC - B^2)^2} = 0$$

ou

$$\left[(C - B)\tfrac{1}{2}f'_x + (A - B)\tfrac{1}{2}f'_y\right]^2 + (AC - B^2)(\tfrac{1}{2}f'_x - \tfrac{1}{2}f'_y)^2 + \Delta(A - 2B + C) = 0.$$

Si l'on prend $m_1 = - n_1 = 1$, on a

$$\left[x - y - \frac{BE - CD - (BD - AE)}{AC - B^2}\right]^2 + \frac{(\frac{1}{2}f'_x + \frac{1}{2}f'_y)^2}{AC - B^2} + \Delta\frac{A + 2B + C}{(AC - B^2)^2} = 0,$$

ou

$$\left[(C + B)\tfrac{1}{2}f'_x - (A + B)\tfrac{1}{2}f'_y\right]^2 + (AC - B^2)(\tfrac{1}{2}f'_x + \tfrac{1}{2}f'_y)^2 + \Delta(A + 2B + C) = 0.$$

## II.

1. Soit considérée la fonction

$$u^2 - v^2 + w^2,$$

$u$, $v$, $w$ étant des fonctions du premier degré de $x$, $y$, $z$.

En posant

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda', \quad \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda'',$$

on a

$$u^2 - v^2 + w^2 = u^2 - (\lambda' v + \lambda'' w)^2 + (\lambda'' v + \lambda' w)^2.$$

De là, par

$$\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = \mu', \quad \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) = \mu'',$$

on déduit

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + w^2 = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda'' w)^2 \\ & - (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w)^2 + (\lambda'' v + \lambda' w)^2. \end{aligned}$$

Puis, si l'on fait

$$\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) = \nu', \quad \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) = \nu'',$$

il vient

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + w^2 = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda''' w)^2 \\ & - [\nu' (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w) + \nu'' (\lambda'' v + \lambda' w)]^2 \\ & + [\nu'' (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w) + \nu' (\lambda'' v + \lambda' w)]^2 \\ = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda'' w)^2 \\ & - [\nu' \mu'' u + (\nu' \mu' \lambda' + \nu'' \lambda'') v + (\nu' \mu' \lambda'' + \nu'' \lambda') w]^2 \\ & + [\nu'' \mu'' u + (\nu'' \mu' \lambda' + \nu' \lambda'') v + (\nu'' \mu' \lambda'' + \nu' \lambda') w]^2. \end{aligned}$$

2. Proposons-nous de faire dépendre cette équation de celles de trois plans diamétraux conjugués quelconques, données sous les formes

$$\begin{aligned} mu + nv + pw &= 0, \\ m'u + n'v + p'w &= 0, \\ m''u + n''v + p''w &= 0. \end{aligned}$$

On a d'abord, à l'égard du premier plan,

$$\frac{\mu'}{m}=\frac{\mu''\lambda'}{-n}=\frac{\mu''\lambda''}{p}=\frac{\mu''\lambda}{-n+p}=\frac{\mu''\frac{1}{\lambda}}{-n-p}=\frac{\mu''}{\sqrt{n^2-p^2}}$$

$$=\frac{\mu' u+\mu''\lambda' v+\mu''\lambda'' w}{mu-nv+pw}=\frac{\mu''}{-\frac{n}{\lambda'}}=\frac{\mu''}{\sqrt{n^2-p^2}}$$

$$=\frac{\mu}{m+\sqrt{n^2-p^2}}=\frac{\frac{1}{\mu}}{m-\sqrt{n^2-p^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2-n^2+p^2}},$$

de sorte que

$$\mu' u+\mu''\lambda' v+\mu''\lambda'' w=\frac{mu-nv+pw}{\sqrt{m^2-n^2+p^2}}.$$

On a, en second lieu,

$$\frac{\mu''\nu'}{m'}=\frac{\nu'\mu'\lambda'+\nu''\lambda''}{-n'}=\frac{\nu'\mu'\lambda''+\nu''\lambda'}{p'}=\frac{\mu''\nu' u+\ldots}{m'u-n'v+p'w}$$

$$=\frac{\nu'\mu'\lambda+\nu''\lambda}{-n'+p'}=\frac{\nu'\mu'\frac{1}{\lambda}-\nu''\frac{1}{\lambda}}{-n'-p'}=\frac{\nu'\mu'+\nu''}{\frac{-n'+p'}{\lambda}}$$

$$=\frac{\nu'\mu'-\nu''}{\lambda(-n'-p')}=\frac{\nu'\mu'}{-n'\lambda'-p'\lambda''}=\frac{\nu''}{+n'\lambda''+p'\lambda'}:$$

ce qui donne

$$\frac{\mu''}{m'}=\frac{\mu'}{-n'\lambda'-p'\lambda''},$$

c'est-à-dire

$$-\mu''\lambda' n'-\mu''\lambda'' p'=\mu' m',$$

par conséquent

$$nn'-pp'=mm' \quad \text{ou} \quad mm'-nn'+pp'=0.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\mu''\nu'}{m'}=\frac{\nu'}{-n'\frac{\lambda'}{\mu'}-p'\frac{\lambda''}{\mu'}}=\frac{\nu''}{+n'\lambda''+p'\lambda'},$$

d'où

$$\frac{\mu''\nu'}{m'} = \frac{\nu'}{\dfrac{n'n - p'p}{\sqrt{n^2 - p^2}}\,\dfrac{\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}{m}} = \frac{\nu''}{\dfrac{+n'p + p'n}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\nu'}{\dfrac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}{\sqrt{n^2 - p^2}}} = \frac{\nu''}{\dfrac{np' + n'p}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\nu}{\dfrac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2} + (np' + n'p)}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\nu}}{\dfrac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2} - (np' + n'p)}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2 - p^2}}{\sqrt{m'^2(m^2 - n^2 + p^2) - (np' + n'p)^2}},$$

à cause de

$$\lambda' = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - p^2}}, \quad \lambda'' = \frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2}}, \quad \mu' = \frac{m}{\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} & m'^2(m^2 - n^2 + p^2) - (np' + n'p)^2 \\ &= (nn' - pp')^2 - m'^2(n^2 - p^2) - (np' + pn')^2 \\ &= n^2n'^2 + p^2p'^2 - m'^2(n^2 - p^2) - n^2p'^2 - p^2n'^2 \\ &= (n'^2 - m'^2 - p'^2)(n^2 - p^2). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\frac{\mu''\nu'}{m'} = \frac{1}{\sqrt{n'^2 - m'^2 - p'^2}},$$

et, par conséquent,

$$m''\nu'u + \ldots = \frac{m'u - n'v + p''w}{\sqrt{n'^2 - m'^2 - p'^2}}.$$

En troisième lieu, nous avons

$$\frac{\nu''\mu''}{m''}=\frac{\nu''\mu'\lambda'+\nu'\lambda''}{-n''}=\frac{\nu''\mu'\lambda''+\nu'\lambda'}{p''}=\frac{\nu''\mu''u+\ldots}{m''u-n''v+p''\varpi}$$

$$=\frac{\nu''\mu'\lambda+\nu'\lambda}{-n''+p''}=\frac{(\nu''\mu'-\nu')\frac{1}{\lambda}}{-n''-p''}=\frac{\nu''\mu'+\nu'}{\frac{-n''+p''}{\lambda}}$$

$$=\frac{\nu''\mu'-\nu'}{(-n''-p'')\lambda}=\frac{\nu''\mu'}{-n''\lambda'-p''\lambda''}=\frac{\nu'}{n''\lambda''+p''\lambda'},$$

d'où résulte, d'une part,

$$\frac{\mu''}{m''}=\frac{\mu'}{-n''\lambda'-p''\lambda''}$$

ou

$$-\mu''\lambda'n''-\mu''\lambda''p''-\mu'm''=0,$$

ou

$$nn''-pp''-mm''=0,$$

$$mm''-nn''+pp''=0,$$

et, d'autre part,

$$\frac{\nu''\mu''}{m''}=\frac{\nu''}{-n''\frac{\lambda'}{\mu'}-p''\frac{\lambda''}{\mu'}}=\frac{\nu'}{+n''\lambda''+p''\lambda'}$$

$$=\frac{\nu''}{\frac{m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}=\frac{\nu'}{\frac{-np''+pn''}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\nu}{\frac{pn''-np''+m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{pn''-np''-m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2-p^2}}{(pn''-np'')^2-m''^2(m^2-n^2+p^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m''^2-n''^2+p''^2}},$$

de sorte que

$$\nu''\mu'' u + \ldots = \frac{m'' u - n'' v + p'' w}{\sqrt{m''^2 - n''^2 + p''^2}}.$$

D'après cela, on obtient

$$u^2 - v^2 + w^2 = \frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} - \frac{(m' u - n' v + p' w)^2}{n'^2 - m'^2 - p'^2}$$
$$+ \frac{(m'' u + n'' v + p'' w)^2}{m''^2 - n''^2 + p''^2}.$$

3. Nous avons trouvé les deux relations

$$mm' - nn' + pp' = 0,$$
$$mm'' - nn'' + pp'' = 0.$$

Par analogie, nous devons y ajouter une troisième

$$m' m'' - n' n'' + p' p'' = 0.$$

Il nous est aisé, du reste, de la déduire de ce qui précède. Observons que l'expression $m' m'' - n' n'' + p' p''$ est, à un facteur près,

$$\nu' \nu'' \mu''^2 - (\nu' \mu' \lambda' + \nu'' \lambda'')(\nu'' \mu' \lambda' + \nu' \lambda'')$$
$$+ (\nu' \mu' \lambda'' + \nu'' \lambda')(\nu'' \mu' \lambda'' + \nu' \lambda')$$
$$= \nu' \nu'' (\mu''^2 - \mu'^2 \lambda'^2 - \lambda''^2 + \mu'^2 \lambda''^2 + \lambda'^2).$$

Or la quantité entre parenthèses a pour valeur

$$\frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2\left[1 - \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2\left[1 - \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2$$
$$- \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 = 0.$$

La relation est ainsi démontrée.

4. Sur les trois quantités $m^2 - n^2 + p^2$, $m'^2 - n'^2 + p'^2$, $m''^2 - n''^2 + p''^2$, il y en a deux qui sont positives, et une qui est négative, si les coefficients $m$, $n$, $p$, $m'$, $n'$, $p'$, $m''$, $n''$, $p''$ sont réels, du moment que l'on a

$$u^2 - v^2 + w^2 = \frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} + \frac{(m'u - n'v + p'w)^2}{m'^2 - n'^2 + p'^2}$$
$$+ \frac{(m''u + n''v + p''w)^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2}.$$

On a, en effet,

$$mm' - nn' + pp' = 0,$$
$$m'm'' - n'n'' + p'p'' = 0,$$
$$m''m - n''n + p''p = 0;$$

or des deux premières relations on tire

$$\frac{m'}{-np'' + n''p} = \frac{n'}{pm'' - mp''} = \frac{p'}{-mn'' + nm''} = \mathrm{K}',$$

d'où

$$\begin{aligned} m'^2 - n'^2 + p'^2 &= \mathrm{K}'^2[(np'' - n'p)^2 - (pm'' - mp'')^2 \\ &\qquad + (mn'' - nm'')^2] \\ &= \mathrm{K}'^2[(n''^2 - m''^2 - p''^2)(m^2 - n^2 + p^2) \\ &\qquad + (mm'' - nn'' + pp'')^2] \\ &= -\mathrm{K}'^2(m^2 - n^2 + p^2)(m''^2 - n''^2 + p''^2). \end{aligned}$$

Pour semblable raison,

$$m''^2 - n''^2 + p''^2 = -\mathrm{K}''^2(m'^2 - n'^2 + p'^2)(m^2 - n^2 + p^2),$$
$$m^2 - n^2 + p^2 = -\mathrm{K}^2(m''^2 - n''^2 + p''^2)(m'^2 - n'^2 + p'^2).$$

Mais les trois dénominateurs $m^2 - n^2 + p^2$, $m'^2 - n'^2 + p'^2$, $m''^2 - n''^2 + p''^2$ ne peuvent être négatifs à la fois, puisque $u^2 - v^2 + w^2$ peut être positif, ne fût-ce que par $v = 0$. Soit donc $m^2 - n^2 + p^2 > 0$; dès lors $m'^2 - n'^2 + p'^2$,

$m''^2 - n''^2 + p''^2$ sont de signes contraires : l'un est donc négatif, l'autre positif. Par conséquent la transformation, si les fonctions restent réelles, maintient le même nombre de carrés positifs. L'espèce se maintient. C'est le théorème de M. Hermite pour le cas de trois variables dans la forme quadratique. Nous présentons du reste plus loin une démonstration normale, fort simple, de ce théorème dans toute sa généralité.

5. Quand l'équation d'un hyperboloïde est mise sous la forme
$$u^2 - v^2 + w^2 = \mathrm{K},$$
les plans donnés par
$$\begin{aligned} mu - nv + pw &= 0, \\ m'u - n'v + p'w &= 0, \\ m''u - n''v + p''w &= 0 \end{aligned}$$
sont trois plans diamétraux conjugués, si l'on a
$$\begin{aligned} mm' - nn' + pp' &= 0, \\ m'm'' - n'n'' + p'p'' &= 0, \\ m''m - n''n + p''p &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de la surface a pour forme correspondante
$$\frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} + \frac{(m'u - n'v + p'w)^2}{m'^2 - n'^2 + p'^2} + \frac{(m''u - n''v + p''w)^2}{m''^2 - n''^2 + p''^2} = \mathrm{K}.$$

6. Pour appliquer ces résultats à l'ellipsoïde, l'équation en étant
$$u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{K},$$
il n'y a qu'à changer $v$ en $vi$, $n$, $n'$, $n''$ en $ni$, $n'i$, $n''i$, de sorte que trois plans diamétraux de l'ellipsoïde ayant

pour équations

$$\begin{aligned} mu + nv + pw &= 0, \\ m'u + n'v + p'w &= 0, \\ m''u + n''v + p''w &= 0, \end{aligned}$$

moyennant les conditions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} mm' + nn' + pp' &= 0, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0, \\ m''m + n''n + p''p &= 0, \end{aligned} \right.$$

l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\frac{(mu + nv + pw)^2}{m^2 + n^2 + p^2} + \frac{(m'u + n'v + p'w)^2}{(m'^2 + n'^2 + p'^2)} + \frac{(m''u + n''v + p''w)^2}{m''^2 + n''^2 + p^{\;2}} = \mathrm{K}.$$

7. En conséquence, on a les relations suivantes :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{m^2}{m^2 + n^2 + p^2} + \frac{m'^2}{m'^2 + n'^2 + p'^2} + \frac{m''^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \sum \frac{m^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ &\sum \frac{n^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ &\sum \frac{p^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ &\frac{mn}{m^2 + n^2 + p^2} + \frac{m'n'}{m'^2 + n'^2 + p'^2} + \frac{m''n''}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \sum \frac{mn}{m^2 + n^2 + p^2} = 0, \\ &\sum \frac{np}{m^2 + n^2 + p^2} = 0, \\ &\sum \frac{pm}{m^2 + n^2 + p^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

8. Ces relations peuvent se déduire directement des précédentes.

Supposons, en effet, que $m$, $n$, $p$, $m'$, $n'$, $p'$, $m''$, $n''$, $p''$ soient des quantités quelconques; tant qu'elles sont liées par les relations

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} mm' + nn' + pp' &= 0,\\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0,\\ m''m + n''n + p''p &= 0,\end{aligned}\right.$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p\\ m' & n' & p'\\ m'' & n'' & p''\end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)(m''^2+n''^2+p''^2)}.$$

Soit posé

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} m & n & p\\ m' & n' & p'\\ m'' & n'' & p''\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} m & n & p\\ m' & n' & p'\\ m'' & n'' & p''\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P}\\ \mathrm{M}' & \mathrm{N}' & \mathrm{P}'\\ \mathrm{M}'' & \mathrm{N}'' & \mathrm{P}''\end{vmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= m^2+n^2+p^2, & \mathrm{M}' &= m'm+n'n+p'p,\\ \mathrm{N} &= mm'+nn'+pp', & \mathrm{N}' &= m'^2+n'^2+p'^2,\\ \mathrm{P} &= mm''+nn''+pp''; & \mathrm{P}' &= m'm''+n'n''+p'p'';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}'' &= m''m+n''n+p''p,\\ \mathrm{N}'' &= m''m'+n''n'+p''p',\\ \mathrm{P}'' &= m''^2+n''^2+p''^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} m^2+n^2+p^2 & 0 & 0\\ 0 & m'^2+n'^2+p'^2 & 0\\ 0 & 0 & m''^2+n''^2+p''^2\end{vmatrix}$$

$$= (m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)(m''^2+n''^2+p''^2).$$

En conséquence $\Delta$ n'est pas nul, à moins que $m$, $n$, $p$, ou $m'$, $n'$, $p'$, ou $m''$, $n''$, $p''$ soient nuls à la fois, si ces éléments sont réels.

8. Posons

$$m\alpha + m'_2\beta + m''\gamma = A,$$
$$n\alpha + n'\beta + n''\gamma = B,$$
$$p\alpha + p'\beta + p''\gamma = C,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant des quantités arbitraires.

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ p & p' & p'' \end{vmatrix} \gtrless 0;$$

ces égalités résolues par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, en attribuant à A, B, C telles valeurs qu'on voudra, donneront, pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, des valeurs finies déterminées. Par conséquent, en disposant de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ convenablement, on pourra faire que A, B, C aient telles valeurs correspondantes qu'on voudra.

Si l'on multiplie les égalités par $m$, $n$, $p$ et qu'on ajoute, il vient

$$(m^2 + n^2 + p^2)\alpha = mA + nB + pC;$$

on obtient de même

$$(m'^2 + n'^2 + p'^2)\beta = m'A + n'B + p'C,$$
$$(m''^2 + n''^2 + p''^2)\gamma = m''A + n''B + p''C.$$

En portant les égalités au carré, puis ajoutant, on trouve

$$(m^2 + n^2 + p^2)\alpha^2 + (m'^2 + n'^2 + p'^2)\beta^2 + (m''^2 + n''^2 + p'''^2)\gamma^2$$
$$= A^2 + B^2 + C^2,$$

de sorte qu'en portant dans cette égalité les valeurs de

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on obtient

$$\frac{(m\mathrm{A}+n\mathrm{B}+p\mathrm{C})^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{(m'\mathrm{A}+n'\mathrm{B}+p'\mathrm{C})^2}{m'^2+n'^2+p'^2}$$
$$+\frac{(m''\mathrm{A}+n''\mathrm{B}+p''\mathrm{C})^2}{m''^2+n''^2+p''^2}=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2.$$

Mais c'est là une égalité qui subsiste pour toutes valeurs de A, B, C, c'est donc une identité; de là

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&\frac{m^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m'^2}{m'^2+n'^2+p'^2}+\frac{m''^2}{m''^2+n''^2+p''^2}\\&\qquad=\sum\frac{m^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\\&\qquad\sum\frac{n^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\\&\qquad\sum\frac{p^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\end{aligned}\right.$$

et

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&\frac{mn}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m'n'}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m''n''}{m^2+n^2+p^2}\\&\qquad=\sum\frac{mn}{m^2+n^2+p^2}=0,\\&\qquad\sum\frac{np}{m^2+n^2+p^2}=0,\\&\qquad\sum\frac{pm}{m^2+n^2+p^2}=0.\end{aligned}\right.$$

9. Ces relations ainsi établies, il y a lieu d'en conclure qu'on a identiquement, moyennant les premières conditions,

$$u^2+v^2+w^2=\frac{(mu+nv+pw)^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{(m'u+n'v+p'w)^2}{m'^2+n'^2+p'^2}$$
$$+\frac{(m''u+n''v+p''w)^2}{m''^2+n''^2+p''^2}.$$

Donc, si par $u^2+v^2+w^2=\mathrm{K}$ on a une surface du second degré, pour laquelle on ait trois plans diamétraux conjugués par $u=0$, $v=0$, $w=0$, ce qui suppose qu'on ait par là trois plans ayant un point commun et un seul, la même surface, les relations ($\beta$) supposées satisfaites, sera donnée par

$$\frac{(mu+nv+pw)^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{(m'u+n'v+p'w)^2}{m'^2+n'^2+p'^2}+\frac{(m''u+n''v+p''w)^2}{m''^2+n''^2+p''^2}=\mathrm{K}.$$

En conséquence, on aura trois autres plans diamétraux conjugués par

$$mu+nv+pw=0,$$
$$m'u+n'v+p'w=0,$$
$$m''u+n''v+p''w=0.$$

Par suite, d'après notre première analyse, les relations (1) auront lieu aussi entre les quantités $m$, $n$, $p$,....

On reconnaît ainsi par cette voie indirecte que les relations ($\alpha$) sont elles-mêmes une conséquence des relations ($\beta$). Il s'ensuit que dès lors le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)(m''^2+n''^2+p''^2)}.$$

Comme d'ailleurs on a

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \beta=\frac{\begin{vmatrix} m & n & p \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \gamma=\frac{\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

il est à remarquer que

$$m\Delta=(n'p''-p'n'')\mathrm{H},\quad m'\Delta=(n''p-p''n)\mathrm{H}',\quad m''\Delta=(np'-pn')\mathrm{H}'',$$
$$n\Delta=(p'm''-m'p'')\mathrm{H},\quad n'\Delta=(p''m-m''p)\mathrm{H}',\quad n''\Delta=(pm'-mp')\mathrm{H}'',$$
$$p\Delta=(m'n''-n'm'')\mathrm{H},\quad p'\Delta=(m''n-n''m)\mathrm{H}',\quad p''\Delta=(mn'-nm')\mathrm{H}'',$$

étant posé

$$\mathrm{H}=m^2+n^2+p^2,\quad \mathrm{H}'=m'^2+n'^2+p'^2,\quad \mathrm{H}''=m''^2+n''^2+p''^2.$$

10. Considérons l'équation

$$u^2+v^2+w^2-\mathrm{K}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et l'équation équivalente

$$\frac{\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}+p\frac{z}{c}\right)^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{\left(m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}+p'\frac{z}{c}\right)^2}{m'^2+n'^2+p'^2}+\frac{\left(m''\frac{x}{a}+n''\frac{y}{b}+p''\frac{z}{c}\right)^2}{m''^2+n''^2+p''^2}=1$$

ou

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a'^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b'^2}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c'^2}=1,$$

les relations (1) supposées satisfaites.

Le point donné par $\mathrm{Y}=0$, $\mathrm{Z}=0$, $\mathrm{X}=a'$ aura ses coordonnées $x, y, z$ déterminées par les équations

$$m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}+p\frac{z}{c}=\sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

$$m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}+p'\frac{z}{c}=0,$$

$$m''\frac{x}{a}+n''\frac{y}{b}+p''\frac{z}{c}=0;$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{(n'p'' - p'n'')\sqrt{H}}{\Delta} = \frac{m}{\sqrt{H}},$$
$$\frac{y}{b} = \frac{(p'm'' - m'p'')\sqrt{H}}{\Delta} = \frac{n}{\sqrt{H}},$$
$$\frac{z}{c} = \frac{(m'n'' - n'm'')\sqrt{H}}{\Delta} = \frac{p}{\sqrt{H}}.$$

On a de même pour les extrémités de deux rayons formant avec celui qui va du centre au point $(x, y, z)$ un système conjugué

$$\frac{x'}{a} = \frac{m'}{\sqrt{H'}}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{n'}{\sqrt{H'}}, \quad \frac{z'}{c} = \frac{p'}{\sqrt{H'}},$$
$$\frac{x''}{a} = \frac{m''}{\sqrt{H''}}, \quad \frac{y''}{b} = \frac{n''}{\sqrt{H''}}, \quad \frac{z''}{c} = \frac{p''}{\sqrt{H''}};$$

d'où résulte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{x''^2}{a^2} = \frac{m^2}{H} + \frac{m'^2}{H'} + \frac{m''^2}{H''} = 1,$$

ou

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = a^2,$$

puis

$$y^2 + y'^2 + y''^2 = b^2,$$
$$z^2 + z'^2 + z''^2 = c^2;$$

d'autre part

$$\frac{xy}{ab} + \frac{x'y'}{ab} + \frac{x''y''}{ab} = \frac{mn}{H} + \frac{m'n'}{H'} + \frac{m''n''}{H''} = 0$$

ou

$$xy + x'y' + x''y'' = 0,$$
$$yz + y'z' + y''z'' = 0,$$
$$zx + z'x' + z''x'' = 0.$$

On déduit de là

$$a^2b^2 = (xy' - yx')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 + (x''y - y''x)^2, \ldots.$$

Observons encore que l'on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma z^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2.$$

## III.

1. Les considérations qui nous ont fait tirer les relations ($\beta$) des relations ($\alpha$) peuvent s'appliquer sans changement à un système de $n^2$ quantités

$$\begin{matrix} m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & \ldots, & m_{1n}, \\ m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & \ldots, & m_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ m_{n1}, & m_{n2}, & m_{n3}, & \ldots, & m_{nn}. \end{matrix}$$

Lorsqu'elles sont liées entre elles par les relations de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} m_{jk} = 0 \quad (i \gtrless j) :$$

1° le déterminant

$$\Delta = (m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$$

a sa valeur égale à $\sqrt{\Sigma m_{1k}^2 \, \Sigma m_{2k}^2 \, \ldots \Sigma m_{nk}^2}$ ;

2° $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{\sum_{j=1}^{j=n} m_{ij}^2} = 1 ;$$

3° $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik} m_{ih}}{\sum_{j=1}^{j=n} m_{ij}^2} = 0 \quad (k \gtrless h),$$

si l'on a $\Delta \gtrless 0$.

Cela donne, comme identité,

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2 &= \frac{(m_{11}n_1+m_{12}n_2+\ldots+m_{1n}n_n)^2}{m_{11}^2+m_{12}^2+\ldots+m_{1n}^2} \\ &+\frac{(m_{21}n_1+m_{22}n_2+\ldots+m_{2n}n_n)^2}{m_{21}^2+m_{22}^2+\ldots+m_{2n}^2} \\ &+\ldots+\frac{(m_{n1}n_1+\ldots+m_{nn}n_n)^2}{m_{n1}^2+m_{n2}^2+\ldots+m_{nn}^2}.\end{aligned}\right.$$

2. Au reste, cette identité implique les relations $(\alpha)$ aussi bien que les relations $(\beta)$.

Supposons, en effet, qu'on eût identiquement

$$u^2+v^2+w^2=\frac{U^2}{H}+\frac{V^2}{H'}+\frac{W^2}{H''}$$

pour

$$\begin{aligned} U &= mu+nv+pw, & H &= m^2+n^2+p^2,\\ V &= m'u+n'v+p'w, & H' &= m'^2+n'^2+p'^2,\\ W &= m''u+n''v+p''w, & H'' &= m''^2+n''^2+p''^2.\end{aligned}$$

Ce que nous allons voir, dans ces circonstances, sera applicable aux plus générales.

D'abord, en égalant terme pour terme les deux membres de l'identité, après avoir développé $U^2$, $V^2$, $W^2$, on obtiendra les relations $(\beta)$. On les trouve encore par les considérations suivantes :

Si l'on prend les dérivées des deux membres de l'identité par rapport à $u$, $v$, $w$, on a

$$\begin{aligned} u &= \frac{mU}{H}+\frac{m'V}{H'}+\frac{m''W}{H''},\\ v &= \frac{nU}{H}+\frac{n'V}{H'}+\frac{n''W}{H''},\\ w &= \frac{pU}{H}+\frac{p'V}{H'}+\frac{p''W}{H''}.\end{aligned}$$

Or, si l'on remplace dans ces identités U, V, W par leurs valeurs, les résultats n'étant pas des identités en $u$, $v$, $w$, il s'ensuit

$$\frac{m^2}{H}+\frac{m'^2}{H'}+\frac{m''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{n^2}{H}+\frac{n'^2}{H'}+\frac{n''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{p^2}{H}+\frac{p'^2}{H'}+\frac{p''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{mn}{H}+\frac{m'n'}{H'}+\frac{m''n''}{H''}=0,$$

$$\frac{np}{H}+\frac{n'p'}{H'}+\frac{n''p''}{H''}=0,$$

$$\frac{pm}{H}+\frac{p'm'}{H'}+\frac{p''m''}{H''}=0.$$

3. D'autre part, multiplions les équations dérivées par $m$, $n$, $p$, et ajoutons; il vient

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} U = {} & \frac{m^2+n^2+p^2}{H}U+\frac{mm'+nn'+pp'}{H'}V\\ & +\frac{mm''+nn''+pp''}{H''}W, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$mm'+nn'+pp'=0,$$
$$mm''+nn''+pp''=0,$$

si U, V, W peuvent être susceptibles de valeurs quelconques, par conséquent, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p\\ m' & n' & p'\\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. En multipliant par $m'$, $n'$, $p'$, on trouverait de même

$$m'm''+n'n''+p'p''=0.$$

Les formules ($\alpha$) sont, d'après cela, une conséquence des formules ($\beta$), quelles que soient d'ailleurs les quantités $m_{ij}$. Comme les formules ($\beta$) supposent $H_i \gtrless 0$, et qu'il résulte des formules ($\alpha$) que le déterminant

$$\Delta = (m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$$

est d'une valeur égale à $\sqrt{H_1 H_2 \ldots H_n}$, on voit que ce déterminant n'est pas nul. Nos formules ($\beta$) pourraient donc alors se déduire également des formules ($\alpha$). Donc les deux groupes de formules sont équivalents, quoique le nombre des formules soit $\frac{n(n-1)}{2}$ dans l'un des groupes, et qu'il soit dans l'autre $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Un fait important ressort encore de ce qui précède, c'est que si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des quantités indépendantes les unes des autres, susceptibles chacune d'une valeur quelconque, la formule ($\gamma$) présente la transformation la plus générale de $\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2$ en une somme de carrés, en même nombre, d'expressions linéaires en $u_i$.

Si, en effet, au n° 2, on considère H, H', H'' comme n'ayant pas de valeurs assignées, la relation ($\delta$) exige qu'on ait $m^2 + n^2 + p^2 = H$; les relations analogues dues aux facteurs $m', n', p'$ et aux facteurs $m'', n'', p''$ donnent de même

$$H' = m'^2 + n'^2 + p'^2 \quad \text{et} \quad H'' = m''^2 + n''^2 + p''^2.$$

La transformation n'est soumise qu'aux conditions dont la forme générale est

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} m_{jk} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

5. Le point de départ de notre transformation (n° 1) revient à changer $u^2 - v^2$ en $(\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2$ avec $\lambda'^2 - \lambda''^2 = 1$, et $u^2 + v^2$ en $(\lambda' u + \lambda'' v)^2 + (\lambda'' u - \lambda' v)^2$ avec $\lambda'^2 + \lambda''^2 = 1$.

En procédant ainsi à partir de l'expression

$$\pm u_1^2 \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2,$$

par l'association du premier terme au second, du nouveau premier terme au troisième, etc., jusqu'à celle du premier terme au dernier; en procédant de même à partir du second terme, et ainsi de suite, on obtient successivement, sans que les signes changent explicitement aux mêmes places,

$$\begin{array}{l}
\pm u_{12}^2 \pm u'^2_{12} \pm u_3^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\pm u_{123}^2 \pm u'^2_{12} \pm u'^2_{123} \pm u_4^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\pm u_{1234}^2 \pm u'^2_{12} \pm u'^2_{123} \pm u'^2_{1234} \pm u_5^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\pm u^2_{1\ldots n} \pm u^2_{12\ldots n-1} \pm \ldots \pm u'.
\end{array}$$

Dans l'expression finale, le premier terme dépend ainsi de $n-1$ indéterminées, le deuxième de celles-là et de $n-2$ autres, le troisième des précédentes et de $n-3$ nouvelles, etc.

Si dans la formule ($\gamma$) on change $u_i$ en $u_i\sqrt{\varepsilon_i}$, et $m_{ki}$ en $m_{ki}\sqrt{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i$ étant $\pm 1$, cette formule devient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2 \\
&\quad = \frac{(m_{11}\varepsilon_1 u_1 + m_{12}\varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n m_{1n} u_n)^2}{\varepsilon_1 m_{11}^2 + \varepsilon_2 m_{12}^2 + \ldots + \varepsilon_n m_{1n}^2} + \ldots \\
&\qquad + \frac{(m_{n1}\varepsilon_1 u_1 + \ldots + m_{nn}\varepsilon_n u_n)^2}{\varepsilon_1 m_{n1}^2 + \varepsilon_2 m_{n2}^2 + \ldots + \varepsilon_n m_{nn}^2},
\end{aligned}$$

moyennant les relations $\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} m_{jk} = 0$.

La formule précédente avec ses indéterminées correspond à cette formule générale.

6. Le théorème dû à M. Hermite, que dans le passage d'une forme en carrés à une autre l'espèce se conserve si les termes sont réels, résulte immédiatement de l'équation générale

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_p u_p^2 + \varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2$$
$$= \frac{U_1^2}{H_1} + \frac{U_2^2}{H_2} + \ldots + \frac{U_q^2}{H_q} + \frac{U_{q+1}^2}{H_{q+1}} + \frac{U_n^2}{H_n}.$$

Supposons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 1, \quad H_1 > 0, \quad H_2 > 0, \ldots, \quad H_q > 0,$$

et

$$\varepsilon_{p+1} = \ldots = \varepsilon_n = -1, \quad H_{q+1} < 0, \quad H_{q+2} < 0, \ldots, \quad H_n < 0;$$

alors, si dans le premier membre on prend $u_{p+1} = 0, \ldots,$ $u_n = 0$, ce premier membre est d'une valeur positive, quelques valeurs qu'on attribue à $u_1$, $u_2, \ldots, u_p$; et si l'on prenait $u_1 = 0, \ldots, u_p = 0$, il serait négatif pour toutes valeurs de $u_{p+1}, \ldots, u_n$. De même, si l'on prend $U_{q+1} = 0, \ldots, U_n = 0$, le second membre sera positif pour toutes valeurs de $U_1, U_2, \ldots, U_q$; il sera négatif pour toutes valeurs de $U_{q+1}, \ldots, U_n$, si l'on fait $U_1 = 0, \ldots, U_q = 0$.

Supposons $q > p$, ou moins de termes négatifs dans le second membre que dans le premier. Si l'on prend $U_{q+1} = 0, \ldots, U_n = 0$ et qu'on en tire $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_n$ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_q$, la substitution de ces valeurs dans le premier membre n'atteindra pas le premier terme négatif $\varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2$. Par conséquent il suffira de prendre $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_p = 0$ pour que le premier membre soit à coup sûr négatif, tandis que le second sera d'une valeur positive. Il résulte de cette contradiction qu'on ne peut avoir $q > p$.

Soit $q < p$. Posons donc $U_1 = 0$, $U_2 = 0, \ldots, U_q = 0$, et tirons de là $u_1, u_2, \ldots, u_q$ en fonction de $u_{q+1}, \ldots, u_n$, puis substituons-en les valeurs dans le premier membre, il y restera au moins $\varepsilon_{q+1} u_{q+1}^2 > 0$. Ce premier membre, en y faisant $u_{p+1} = 0, \ldots, u_n = 0$, sera en conséquence susceptible d'une valeur positive. Le second, au contraire, ne pourra être que négatif. On ne peut donc avoir $q < p$. Il faut ainsi $q = p$. Le théorème est démontré.

Dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, ces questions sont reprises pour le fond à un autre point de vue avec d'autres considérations sur les formes quadratiques.