NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

Démonstration élémentaire des formules qui donnent la somme des puissances m de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres, et $\cos ma$, $\sin ma$ en fonction d'une seule des deux lignes $\sin a$ ou $\cos a$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 385-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__385_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

des formules qui donnent la somme des puissances m de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres, et $\cos ma$, $\sin ma$ en fonction d'une seule des deux lignes $\sin a$ ou $\cos a$;

PAR M. DESBOVES.

THÉORÈME I. — *On forme le tableau*

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{lllll} h & & & & \\ l & & & & \\ l & h & & & \\ l & h+l & & & \\ l & h+2l & h & & \\ l & h+3l & 2h+l & & \\ l & h+4l & 3h+3l & h & \\ l & h+5l & 4h+6l & 3h+l & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}\right.$$

comme il suit :

On écrit d'abord l'un au-dessous de l'autre deux nombres quelconques h et l, puis on obtient chacun des termes dans les lignes horizontales suivantes, en ajoutant au terme qui est au-dessus de lui, dans la ligne précédente, celui qui est à la gauche de ce dernier dans la ligne qui précède de deux rangs celle que l'on veut former : dans le tableau ainsi construit, le terme de rang $p+1$, dans la $m+1^{ième}$ ligne horizontale, est égal à $hC_{p-1}^{m-p-1} + lC_p^{m-p-1}$ (C_n^m représente, comme à l'ordinaire, le nombre des combinaisons de m lettres n à n).

Nota. — En formant le tableau (1), on suppose que chaque ligne horizontale commence et se termine par un zéro.

Réduisons d'abord le tableau (1) aux multiplicateurs de l, nous aurons le nouveau tableau

$$
(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & & \\
1 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 3 & \\
1 & 5 & 6 & 1 \\
1 & 6 & 10 & 4 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right.
$$

Je dis que les nombres inscrits dans chaque ligne verticale de ce tableau, à partir de la deuxième, sont les nombres des différents ordres du triangle de Pascal. En effet, le tableau (2) peut être considéré comme formé par la même règle que le tableau (1); la seule différence, c'est que les deux premiers nombres du tableau sont maintenant égaux à l'unité. Il suit évidemment de là que, si l'on faisait remonter toutes les lignes verticales, à partir de la deuxième, de telle sorte que les premiers nombres de deux lignes verticales consécutives fussent placés dans deux lignes horizontales, consécutives elles-mêmes, le mode de formation du tableau (2) deviendrait identique à celui du triangle de Pascal. Le tableau (2) serait donc le triangle de Pascal lui-même.

Cela posé, proposons-nous de trouver l'expression générale du terme de rang $p+1$ dans la $m^{ième}$ ligne horizontale du tableau (2).

A cet effet, on remarque qu'après avoir fait remonter les lignes verticales du tableau (2), comme il a été dit, le deuxième, le troisième, etc., le $(p+1)^{ième}$ nombre de la $m^{ième}$ ligne horizontale se placeront respectivement dans les lignes horizontales dont les rangs sont $m-1$, $m-2, \ldots, m-p$. On voit ainsi que le terme de rang $p+1$, dans la $m^{ième}$ ligne horizontale du tableau (2), est le terme de rang $p+1$ dans la $(m-p)^{ième}$ ligne horizontale du triangle de Pascal; il est donc égal à C_p^{m-p-1}, et, par suite, ce dernier nombre est le coefficient de l dans le terme de rang $p+1$ de la $(m+1)^{ième}$ ligne horizontale du tableau (1).

Si maintenant on forme un troisième tableau avec les multiplicateurs de h, on déduit de ce tableau le triangle de Pascal, comme on l'a fait pour le deuxième tableau, et l'on voit ainsi que le coefficient de h, dans le terme général du premier tableau, est C_{p-1}^{m-p-1}. Ce terme général a donc bien l'expression indiquée par l'énoncé.

Théorème II. — *Si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont des fonctions de deux quantités b et c, telles que trois fonctions consécutives u_{n-2}, u_{n-1}, u_n soient liées entre elles par la relation*

$$u_n = bu_{n-1} - cu_{n-2}, \tag{1}$$

les deux premières fonctions u_0, u_1 étant égales à b^0 et b multipliés respectivement par deux coefficients quelconques h et l, le terme de rang $p+1$, dans le développement de u_m, aura pour coefficient

$$(-1)^p(hC_{p-1}^{m-p-1} + lC_p^{m-p-1}).$$

En formant d'abord, d'après la relation (1), les développements de quelques-unes des premières fonctions, on voit que ces fonctions sont des polynômes entiers, dont le degré est égal à l'indice de u, et telles que, d'un terme au suivant, les exposants de b décroissent de deux unités, et les exposants de c croissent d'une unité à partir de zéro. On remarque aussi que les signes des coefficients sont alternativement $+$ et $-$.

On peut d'abord faire voir que la loi des exposants est générale. En effet, si l'on pose

$$u_{n-2} = b^{n-2} - db^{n-4}c + eb^{n-6}c^2 - fb^{n-8}c^3 + \ldots,$$
$$u_{n-1} = b^{n-1} - d'b^{n-3}c + e'b^{n-5}c^2 - f'b^{n-7}c^3 + \ldots;$$

en appliquant la relation (1), on a

$$(2)\quad u_n = b^n - (d'+1)b^{n-2}c + (e'+d)b^{n-4}c^2 - (f'+e)b^{n-6}c^3 + \ldots.$$

On voit que la loi des exposants est vérifiée pour u_n; et, comme elle est vraie pour u_0 et u_1, elle est générale.

La formule (2) établit aussi un mode de formation des coefficients d'une des fonctions au moyen des coefficients des deux fonctions précédentes. On voit que, si les coefficients, abstraction faite des signes, de deux fonctions consécutives sont écrits sur deux lignes horizontales, de telle sorte que les coefficients de la seconde fonction soient placés au-dessous des coefficients de même rang de la première, chaque coefficient de la fonction suivante s'obtiendra en ajoutant au coefficient qui est au-dessus de lui celui qui est à gauche de ce dernier dans la première des trois lignes horizontales. Le mode de formation est donc tout semblable à celui du tableau (1); et, si l'on suppose que u_0 et u_1 aient respectivement pour valeur hb^0 et lb, on voit bien, en tenant compte de l'alternance des signes, que le coefficient du terme qui en a p avant lui, dans le développement de u_m, a pour expression

$$(-1)^p\left(hC_{p-1}^{m-p-1} + lC_p^{m-p-1}\right).$$

Applications du théorème II.

Problème I. — *Trouver la somme des puissances m de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres; en d'autres termes, x' et x'' étant* *les racines de l'équation du second degré*

$$x^2 - bx + c = 0,$$

trouver le développement de $x'^m + x''^m$ *en fonction de* b *et* c.

On a

$$x'^0 + x''^0 = 2, \quad x' + x'' = b$$

et, en général,

$$x'^m + x''^m = b(x'^{m-1} + x''^{m-1}) - c(x'^{m-2} + x''^{m-2}) \text{ (*)}.$$

La fonction $x'^m + x''^m$ est donc une fonction u_m dans laquelle h et l sont respectivement égaux à 2 et 1. Alors, en donnant à h et l ces valeurs particulières dans l'expression du coefficient du terme général de u_m, on obtient

$$(-1)^p (2C_{p-1}^{m-p-1} + C_p^{m-p-1})$$

ou

$$(-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p}$$

pour expression du coefficient du terme qui en a p avant lui dans le développement de $x'^m + x''^m$. On a donc

$$x'^m + x''^m = b^m - \frac{m}{1} b^{m-2}c + \frac{m(m-3)}{1.2} b^{m-4}c^2 \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p} b^{m-2p}c^p \ldots.$$

Problème II. — *Exprimer* $\cos ma$ *en fonction de la seule ligne trigonométrique* $\cos a$.

On a

$$2\cos^0 a = 2, \quad 2\cos a = 2\cos a,$$

$$2\cos ma = 2\cos(m-1)a \times 2\cos a - 2\cos(m-2)a.$$

La fonction $2\cos ma$ est donc une fonction u_m telle, que

(*) Voir *Questions d'Algèbre*, p. 71.

b, c, h, l ont respectivement pour valeurs $2\cos a$, 1, 2, 1. Alors l'expression du coefficient du terme général est la même que dans le développement de $x'^m + x''^m$, et l'on a immédiatement

$$2\cos ma = (2\cos a)^m - m(2\cos a)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos a)^{m-4} - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p}(2\cos a)^{m-2p}$$

Problème III. — *Trouver le développement de* $\dfrac{\sin ma}{\sin a}$ *en fonction de* $\cos a$ *seulement.*

On a

$$\frac{\sin a}{\sin a} = 1, \quad \frac{\sin 2a}{\sin a} = 2\cos a,$$

$$\frac{\sin ma}{\sin a} = \frac{\sin(m-1)a}{\sin a} 2\cos a - \frac{\sin(m-2)a}{\sin a}.$$

La fonction $\dfrac{\sin ma}{\sin a}$ est donc une fonction u_{m-1}, telle que b est égal à $2\cos a$, et c, h, l sont égaux à l'unité. D'ailleurs le rang de la fonction $\dfrac{\sin ma}{\sin a}$ est m, et elle doit être représentée par u_{m-1}. Il suit de là que, pour obtenir le coefficient du terme qui en a p avant lui dans le nouveau développement, on doit faire dans l'expression générale (théorème II) h et l égaux à 1, puis changer m en $m-1$. b et c étant d'ailleurs respectivement égaux à $2\cos a$ et 1, on a

$$\frac{\sin ma}{\sin a} = (2\cos a)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-5} - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p)}{1.2.3\ldots p}(2\cos a)^{m-2p-1}.$$

Remarque. — En changeant a en $\dfrac{\pi}{2} - a$ dans les deux formules précédentes, on en déduira deux autres, qui détermineront, en fonction rationnelle de $\sin a$, $\cos ma$ et $\dfrac{\sin ma}{\cos a}$ si m est pair, $\dfrac{\cos ma}{\cos a}$ et $\sin ma$ si m est impair.