Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Sur la séparation des racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__37_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS;

PAR M. H. LAURENT.

Je rappelle d'abord un théorème bien connu : le polynôme du second degré X, homogène en x_1, x_2, x_3,..., x_n peut être décomposé en une somme de n carrés positifs, négatifs ou nuls, et cela, du reste, d'une infinité de manières, ainsi que le prouve la méthode des coefficients indéterminés. Ce que nous voulons prouver, c'est que, de quelque manière que s'effectue la décomposition, le nombre des carrés positifs, négatifs ou nuls, sera toujours le même.

Le théorème est évident pour le cas d'une et deux variables. En effet, un polynôme homogène à deux variables ne saurait être à la fois une somme et une différence de carrés ; car ses racines seraient à la fois imaginaires et réelles, ce qui est absurde. Il ne saurait non plus être une somme de carrés positifs et une somme de carrés négatifs : ainsi le théorème est établi pour le cas de deux variables. La discussion des courbes du second degré, celle des surfaces du second ordre prouvent qu'il a lieu encore pour les cas de trois et quatre variables.

Admettons qu'il ait lieu pour le cas de n variables. Considérons ensuite un polynôme P quelconque homogène et du second degré à $n+1$ variables, x_1, x_2, ..., x_{n+1} ; supposons-le susceptible des deux décompositions

$$P = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1} X_{n+1}^2,$$
$$P = \beta_1 Y_1^2 + \beta_2 Y_2^2 + \ldots + \beta_{n+1} Y_{n+1}^2,$$

X et Y désignant des fonctions linéaires, et α, β l'un des nombres $-1, 0, +1$. On aura

$$(1)\quad \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1} X_{n+1}^2 = \beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_{n+1} Y_{n+1}^2.$$

1° Observons que l'une des quantités α est de même signe que l'une des quantités β; car si tous les α, par exemple, étaient positifs et tous les β négatifs, le premier membre de (1) serait positif, et le second négatif, ce qui est inadmissible.

2° Si nous supposons $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, on pourra poser

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \quad \text{ou} \quad X_{n+1} - Y_{n+1} = 0,$$

et l'on pourra en conclure x_{n+1}, par exemple, en fonction linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à moins que l'on n'ait identiquement $X_{n+1} = Y_{n+1}$; mais, même dans ce cas, on pourrait choisir pour x_{n+1} une fonction linéaire arbitraire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La formule (1), quand on y remplace x_{n+1} par sa valeur, prend la forme

$$(2)\quad \alpha_1 X_1'^2 + \alpha_2 X_2'^2 + \ldots + \alpha_n X_n'^2 = \beta_1 Y_1'^2 + \beta_2 Y_2'^2 + \ldots + \beta_n Y_n'^2,$$

X' et Y' désignant les valeurs de X et Y exprimées en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cette formule (2) est identique comme la formule (1); car x_{n+1} seul, qui n'y entre plus, cesse d'être arbitraire.

Or, par hypothèse, une identité telle que (2) ne saurait avoir lieu entre n variables, si elle ne contient pas le même nombre de carrés positifs, négatifs ou nuls dans ses deux membres. Donc, etc.

Cela posé, considérons le polynôme du second degré en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} (t-\alpha_1)(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \ldots + \alpha_1^{n-1} x_{n-1})^2 \\ + (t-\alpha_2)(x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_2^{n-1} x_{n-1})^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (t-\alpha_n)(x_0 + \alpha_n x_1 + \alpha_n^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^{n-1} x_{n-1})^2 \end{array}\right.$$

tout décomposé en carrés, dans lequel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les n racines de l'équation à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

et t une indéterminée; désignons ce polynôme par $\varphi(t)$. Je dis que le nombre des carrés positifs dans lesquels on peut le décomposer est égal au nombre des racines réelles moindres que t. Cela est évident quand toutes les racines sont réelles; mais, quand il y en a d'imaginaires, la formule (3) semble compliquée d'imaginaires, et l'on ne voit pas aussi bien les choses.

Supposons α_1 imaginaire; soit α_2 la racine conjuguée; les deux premières lignes de la formule (3) seront des expressions conjuguées : leur somme sera donc réelle. Il est facile de voir qu'elle est la différence de deux carrés. En effet, posant

$$t - \alpha_1 = A + B\sqrt{-1}, \quad t - \alpha_2 = A - B\sqrt{-1},$$
$$x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots = P + Q\sqrt{-1},$$
$$x_0 + \alpha_2 x_1 + \ldots = P - Q\sqrt{-1},$$

la somme des deux premières lignes de (3) sera

$$\begin{gathered}(A + B\sqrt{-1})(P^2 - Q^2 + 2PQ\sqrt{-1}) \\ + (A - B\sqrt{-1})(P^2 - Q^2 - 2PQ\sqrt{-1})\end{gathered}$$

ou

$$2A(P^2 - Q^2) - 4BPQ,$$

c'est-à-dire

$$2A\left(P^2 - Q^2 - \frac{2B}{A}PQ\right) = 2A\left[\left(P - \frac{B}{A}Q\right)^2 - Q^2\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right)\right].$$

Ainsi, dans le cas où les racines ne sont pas toutes réelles, le nombre des carrés positifs, c, sera égal au nombre i de couples de racines imaginaires, augmenté du nombre n des racines réelles inférieures à t. Soit n' le nombre des racines réelles inférieures à t', et c' le nombre des carrés positifs dans $\varphi(t')$; on aura

$$n + i = c, \quad n' + i = c',$$

d'où l'on conclut

$$n - n' = c - c'.$$

Ainsi le nombre des racines réelles comprises entre t et t' est la différence du nombre des carrés positifs dans lesquels on peut décomposer $\varphi(t)$ et $\varphi(t')$.

Reste à montrer comment on formera la fonction symétrique $\varphi(t)$ des racines de $f = 0$.

Posons

$$(t - z)(x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_{n-1} z^{n-1})^2 = \mathrm{F}(z);$$

le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans $\frac{\mathrm{F}(z) f'(z)}{f(z)}$ sera précisément

$$\mathrm{F}(\alpha_1) + \mathrm{F}(\alpha_2) + \ldots \quad \text{ou} \quad \varphi(t).$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition, très-connue d'ailleurs.

Le théorème précédent, analogue à celui que M. Hermite a fait connaître pour remplacer le théorème de Sturm, est d'une application beaucoup plus facile que ce dernier, une simple division suffisant à faire connaître le résultat.