Question d'examen (voir 2e série, t. XIV, p. 227)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 370-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__370_0>

QUESTION D'EXAMEN

(voir 2e série, t. XIV, p. 227).

Dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$, la fonction $\frac{1}{\log z}$ reste finie pour les valeurs de z comprises entre zéro et 1, mais devient infinie pour $z = 1$. Dans ce cas, si l'on désigne par ε une quantité positive, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ est, *par définition*, la limite vers laquelle tend $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$, quand ε tend vers zéro.

Faisons dans cette intégrale les deux substitutions $z = x^m$, $z = x^n$, la limite inférieure restera la même; mais *la limite supérieure changera*, et l'on aura, en toute rigueur,

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} = \int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx = \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx.$$

Soit $m > n$, il en résultera $\sqrt[m]{1-\varepsilon} > \sqrt[n]{1-\varepsilon}$, et l'équation

$$\int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx = 0$$

pourra s'écrire

$$\int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx + \int_{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx = 0,$$

ou

$$\int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\,dx = \int_{\sqrt[m]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx.$$

L'intégrale du second membre rentre dans la catégorie de celles que Cauchy a appelées *intégrales définies singulières*, et sa valeur est, d'après la règle qu'il a donnée,

$$(\xi - 1)\frac{\xi^{m-1}}{\log\xi}\log\frac{m}{n},$$

ξ étant compris entre $\sqrt[n]{1-\varepsilon}$ et $\sqrt[m]{1-\varepsilon}$. Les deux membres, étant égaux quel que soit ε, auront des limites égales, ε tendant vers zéro; ξ tend alors vers 1, et la règle de L'Hôpital donne

$$\log\frac{m}{n}$$

pour la valeur du second membre, qui ne se réduit à zéro que si $m = n$. CH. B.

Note. — MM. de Virieu, Moret-Blanc et Pellet expliquent à très-peu de chose près le paralogisme de la même manière. Quant au calcul de M. Allaretti, MM. Laisant et Küss font observer qu'il renferme des erreurs manifestes qui interdisent toute conclusion.