DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 356-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__356_0>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Lorsque l'équation du troisième degré est ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

on sait qu'il faut et qu'il suffit, pour que les trois racines soient réelles, que l'on ait

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0.$$

Lorsque l'équation est complète, la condition de réalité des racines peut s'exprimer d'une façon tout à fait analogue, comme le montre le théorème que voici :

2. THÉORÈME. — *Si l'on désigne par $f(x)$ le premier membre de l'équation complète du troisième degré*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et par $f'(x)$ sa dérivée, pour que les trois racines de cette équation soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right) + 27f^2\left(-\frac{a}{3}\right) \leq 0.$$

Pour le démontrer, faisons disparaître le second terme de notre équation complète en remplaçant x par $y - \frac{a}{3}$. Nous obtenons ainsi l'équation du troisième degré

$$f\left(y - \frac{a}{3}\right) = 0,$$

dont les racines sont évidemment réelles ou imaginaires en même temps que celles de la proposée.

Cette nouvelle équation, si l'on en développe le premier membre suivant la formule de Taylor, peut s'écrire

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)+\frac{y}{1}f'\left(-\frac{a}{3}\right)+\frac{y^2}{1.2}f''\left(-\frac{a}{3}\right)$$
$$+\frac{y^3}{1.2.3}f'''\left(-\frac{a}{3}\right)=0.$$

Or, puisque la transformation effectuée fait disparaître le second terme, on a

$$f''\left(-\frac{a}{3}\right)=0.$$

De plus, il est visible qu'on a aussi

$$f'''\left(-\frac{a}{3}\right)=1.2.3.$$

Donc notre équation en y se réduit à

$$y^3+f'\left(-\frac{a}{3}\right)y+f\left(-\frac{a}{3}\right)=0,$$

qui est de la forme

$$y^3+py+q=0.$$

Par conséquent, pour que ses racines et, par suite, les racines de la proposée, soient toutes réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right)+27f^2\left(-\frac{a}{3}\right)\leq 0,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

3. *Remarque.* — De même que l'équation complète du troisième degré renferme, comme cas particulier,

l'équation privée du second terme, de même la formule que nous venons d'établir est tout à fait générale et renferme, comme cas particulier, la formule

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0,$$

que nous avons rappelée en commençant.

4. *Application.* — Pour donner un exemple de l'emploi de notre formule, considérons l'équation

$$x^3 - 3kx^2 - 3x + k = 0,$$

qui donne, comme on sait, tang $\frac{a}{3}$ lorsqu'on y suppose k égal à tang a.

Ici nous avons

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 - 3x + k,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6kx - 3,$$
$$-\frac{a}{3} = k,$$
$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = -2k(1 + k^2),$$
$$f'\left(-\frac{a}{3}\right) = -3(1 + k^2),$$

et, par suite,

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right) + 27f^2\left(-\frac{a}{3}\right) = -4 \cdot 27 (1 + k^2)^2.$$

Comme ce dernier résultat est négatif pour toute valeur réelle de k, on voit que la relation de condition est toujours satisfaite, et, par suite, que l'équation actuelle a toujours ses trois racines réelles.