H. Laurent

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 354-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__354_1>

QUESTIONS

PAR M. H. LAURENT,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Si l'on forme la somme des produits des m premiers nombres naturels un à un, deux à deux, etc., ces sommes seront les coefficients de $x(x+1)\ldots(x+m-1)$ développé suivant les puissances de x.

En posant alors

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$$
$$= x^m + f(m, 1)x^{m-1} + f(m, 2)x^{m-2} + \ldots,$$

1° $f(m, 1)$, $f(m, 2)\ldots$ seront des polynômes entiers en m, de degrés 2, 4, 6,...;

2° On aura, quel que soit m, entier ou fractionnaire, positif ou négatif,

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{-m} = 1 - \frac{f(m, 1)}{m-1}x + \frac{f(m, 2)}{(m-1)(m-2)}x^2 + \ldots,$$

pour $x < 2\pi$ en valeur absolue;

3° On déduira de là le développement de $l\frac{e^x - 1}{x}$ suivant les puissances de x;

4° On aura

$$\left[\frac{l(1-x)}{-x}\right]^m = 1 + \frac{f(m+1, 1)}{m+1}x + \frac{f(m+2, 2)}{(m+1)(m+2)}x^2 + \ldots,$$

pour $x < \frac{1}{2}$ en valeur absolue;

5° On déduira de là le développement de $l[l(1+x)] - lx$ suivant les puissances de x;

6° On aura

$$\frac{1}{z^m} = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} + \frac{f(m, 1)}{z(z+1)\ldots(z+m)} + \ldots$$
$$+ \frac{f(m+k, k+1)}{z(z+1)\ldots(z+k+m)} + \ldots,$$

pourvu que z soit plus grand que l'unité, ou mieux que la partie réelle de z, supposé imaginaire, soit plus grande que l'unité.

Wronski avait déjà remarqué que $\frac{\Delta^m 0^{m+k}}{1.2.3\ldots m}$ était égal à $f(-m, k)$.
