Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 332-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__332_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 142

(voir 1^{re} série, t VI, p. 134);

PAR M. H. BROCARD.

Un cône droit du second degré étant coupé par un plan perpendiculaire à un plan principal, concevons une sphère concentrique au cône et tangente au plan sécant: le plan tangent à cette sphère, mené perpendiculairement à l'axe du cône, coupe le plan principal suivant une droite dont la partie interceptée dans le cône est égale au paramètre de la section conique.

(JACQUES BERNOULLI.)

Soient SA, SB (*) les deux génératrices du cône situées dans le plan principal considéré; AB la trace du plan sécant perpendiculaire à ce plan principal; P la projection de S sur AB; la droite SP sera le rayon de la sphère. Soit SI le rabattement de SP sur l'axe du cône; par le point I menons, dans le plan principal, la droite HIK perpendiculaire à SI, et limitée aux génératrices

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

SA, SB. Il s'agit de démontrer que HIK est le paramètre de la conique d'intersection du cône et du plan AB.

En effet, si l'on désigne par α l'angle SAB; par 2β celui du cône, et par d la distance SA, la conique rapportée à l'axe ABX, et à une perpendiculaire AY située dans le plan sécant, a pour équation

$$y^2 = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2,$$

où $\frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}$ représente le paramètre de la conique. Or, dans le triangle rectangle SIK, on a $\text{IK} = \text{IS}\tang\beta = \text{SP}\tang\beta = d\sin\alpha\tang\beta$. La proposition est donc établie.

Cette remarque simple mérite d'être signalée dans les cours de Mathématiques spéciales. Elle conduit à une construction directe du paramètre, lorsqu'on applique la méthode de *Dandelin*.

Question 1167

(voir 2e série, t. XIV, p. 192);

PAR M. F. STORDEUR,

Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Démontrer la formule

$$\frac{4}{\pi} = \text{tang}\,45^\circ + \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\frac{45^\circ}{2} + \frac{1}{4}\,\text{tang}\,\frac{45^\circ}{4} + \ldots.$$

(L. BOURGUET.)

Je circonscris au cercle, de rayon égal à l'unité, des polygones réguliers de 4, 8, ..., 2^{n+2} côtés; si $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $p_0, p_1, \ldots, p_n$ désignent respectivement les valeurs des côtés et des périmètres de ces polygones, on aura

$$a_0 = 2\,\text{tang}\,45^\circ, \ldots, a_n = 2\,\text{tang}\,\frac{45^\circ}{2^n};$$

$$p_0 = 2^3\,\text{tang}\,45^\circ, \ldots, p_n = 2^{n+3}\,\text{tang}\,\frac{45^\circ}{2^n}.$$

Le nombre π est, comme on sait, la limite de $\frac{p_n}{2}$ quand n croît indéfiniment; il en résulte

$$\frac{4}{\pi} = \lim \frac{8}{p_n} = \lim \frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}}.$$

Cela posé, la formule connue

$$\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tang} a} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{a}{2}$$

donne successivement

$$\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tang} 45^\circ} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2},$$

$$\frac{1}{2^2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2}} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^{n-1}}} + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n};$$

additionnant ces n équations, et observant que

$$\frac{1}{\operatorname{tang} 45^\circ} = \operatorname{tang} 45^\circ,$$

il vient

$$\frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}} = \operatorname{tang} 45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}.$$

En faisant croître n indéfiniment, le premier membre de cette dernière équation tend vers $\frac{4}{\pi}$, et le second tend vers la série convergente de l'énoncé; la proposition est donc démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Meyl, ancien officier d'Artillerie, à la Haye; L.-P. de Cuerne, à Liége; Edmond de Lamaze, élève des Dominicains, à l'école de Sorrèze; Brocard; Moret-Blanc; Chadu; Moreau; de Virieu.

Question 1168

(voir 2e série, t. XIII, p. 192);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$(1)\qquad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

En prenant x pour base d'un système de numération, nous aurons $y^2 = 11111$. Cherchons donc, pour trouver la valeur de y, à extraire la racine carrée de ce nombre par le procédé ordinaire :

$$\begin{array}{c|l}
1.11\ 11 & 10a \\ \cline{2-2}
1.1.11 & \\
 & 20a \\
2a.a^2 & a \\ \cline{1-1}
0\ 0 &
\end{array}$$

Le premier chiffre de la racine est 1; le second est 0, puisque 1 ne peut contenir 2; quant au troisième, en le désignant par a, il faut, pour que l'opération se fasse exactement, que l'on ait

$$a^2 = 11 \quad \text{et} \quad 2a = 11,$$

et par suite

$$a^2 = 2a = x + 1, \quad \text{d'où} \quad a = 2 \text{ et } x = 3.$$

D'ailleurs $x = 1$ ne satisfait pas à l'équation proposée, donc la seule solution en nombres entiers positifs a lieu pour $x = 3$, et elle donne $y = 3^2 + 2 = 11$.

Note. — La même question a été resolue par MM. Brocard et Moret-Blanc.
