NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. JULLIEN

Ellipse considérée comme projection oblique d'un cercle. Construction simplifiée des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14 (1875), p. 324-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__324_1>

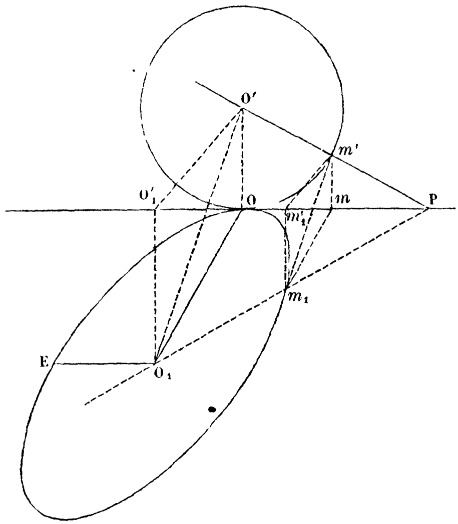
ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION OBLIQUE D'UN CERCLE. — CONSTRUCTION SIMPLIFIÉE DES AXES D'UNE ELLIPSE DONT ON CONNAIT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS ;

PAR M. A. JULLIEN,
Professeur de Sciences.

1. Soit O' (*fig.* 1) un cercle placé sur le plan vertical de projection et tangent à la ligne de terre. Rappelons les constructions par lesquelles on obtient l'ombre portée d'un tel cercle sur le plan horizontal, quand on l'éclaire au moyen de rayons parallèles à une direction donnée OO_1, $O'O'_1$. On sait que cette ombre portée, ou projection oblique, est une ellipse qui a pour centre O_1, qui est tangente à la ligne de terre en O, et qui a pour diamètres conjugués la droite O_1O et une parallèle O_1E à la ligne de terre, égale au rayon du cercle.

Pour avoir l'ombre portée d'un point quelconque m' de la circonférence, on peut déterminer la trace horizontale m_1 du rayon lumineux mm_1, $m'm'_1$ mené par m' ; mais observons que, O_1P étant la projection oblique de la droite $O'P$ qui passe par m', le point m_1 doit se trouver sur O_1P ; observons, en outre, que les triangles O_1OO', m_1mm' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que, par suite, les droites $m_1 m'$ et $O_1 O'$ sont parallèles. Si donc on prolonge $O'm'$

Fig. 1.

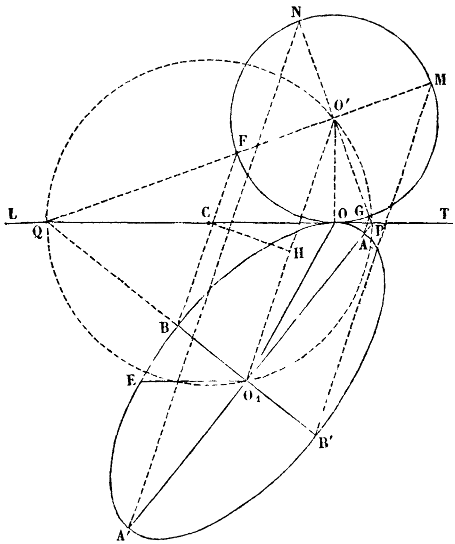


jusqu'en P, et si l'on joint $O_1 P$, une parallèle à la droite $O_1 O'$ menée par le point m' donnera m_1 sur $O_1 P$.

2. Chaque système de deux diamètres perpendiculaires du cercle fournit, en projection oblique, un système de deux diamètres conjugués de l'ellipse, et l'on aura les axes de la courbe, si l'on détermine le système du cercle qui se projette suivant deux droites perpendiculaires.

Décrivons un cercle (*fig.* 2) qui passe par les deux points O_1, O' et qui ait son centre C sur la ligne de terre. P et Q étant les points où ce cercle et la ligne de terre se rencontrent, joignons les points O_1 et O' aux points P et Q. Les angles $PO'Q$ et PO_1Q sont droits comme inscrits dans une demi-circonférence; par conséquent les axes de l'ellipse sont les droites AA′, BB′ suivant lesquelles se projettent les diamètres GN, FM du cercle.

Fig. 2.



3. De ce qui précède résulte un moyen facile de construire les axes d'une ellipse dont on a deux diamètres conjugués O_1O et O_1E. Par le point O on mène une parallèle LT à O_1E; on élève à LT une perpendiculaire OO′ égale à O_1E, et l'on décrit un cercle ayant son centre sur LT et passant par O_1 et O′. Les droites O_1P et O_1Q, qui vont du point O_1 aux deux points P et Q où le cercle coupe la ligne LT, donnent les directions des axes. Il est remarquable que cette construction soit précisément celle à laquelle conduit le théorème de Chasles sur les segments de la tangente parallèle à l'un des diamètres conjugués.

Quant aux longueurs des axes, elles se déterminent bien simplement : il suffit de décrire le cercle O', ce qui est aisé, puisque nous avons le centre et le rayon de ce cercle, de joindre le point O' aux points P et Q, et de mener des parallèles à la droite $O_1 O'$ par les points où les droites ainsi obtenues rencontrent la circonférence O'. Ces parallèles coupent les axes en des points qui sont les sommets de l'ellipse.