A. PICART

# Discussion algébrique de l'équation en λ

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 14 (1875), p. 31-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__31_1>

# DISCUSSION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION EN $\lambda$;

PAR M. A. PICART.

Soient

(1) $S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

(2) $S' = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$

les équations de deux coniques;

(3) $$S - \lambda S' = 0$$

l'équation générale des coniques qui passent par leurs points d'intersection.

En exprimant que cette dernière équation représente deux droites, on obtient la condition

(4) $$\begin{vmatrix} A - \lambda A' & B - \lambda B' & D - \lambda D' \\ B - \lambda B' & C - \lambda C' & E - \lambda E' \\ D - \lambda D' & E - \lambda E' & F - \lambda F' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation en $\lambda$.

Pour qu'à une valeur réelle de $\lambda$ corresponde un système de sécantes communes réelles, il faut que cette valeur de $\lambda$ rende positive la quantité

$$(B - \lambda B')^2 - (A - \lambda A')(C - \lambda C'),$$

que nous appellerons $\Delta$, ou bien l'annule en rendant

(*) *Crelle*, p. 110, § 20.

positive la quantité

$$(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(F - \lambda F'),$$

que nous désignerons par $\Delta_1$.

Or l'équation (4) peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} (F - \lambda F')[(A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2] \\ \quad - (A - \lambda A')(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(D - \lambda D')^2 \\ \qquad + 2(B - \lambda B')(D - \lambda D')(E - \lambda E') = 0. \end{array}\right.$$

Supposons d'abord $A'C' - B'^2 > 0$; l'équation du second degré

$$(6)\qquad (A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2 = 0,$$

dont le terme en $\lambda^2$ a pour coefficient $A'C' - B'^2$, a ses racines réelles; car, pour $\lambda = \infty$, son premier membre est positif, et, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$ ou $\frac{C'}{C}$, il est négatif. Nous excluons le cas où l'on aurait $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, parce qu'alors on voit immédiatement que, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$, l'équation (3) représente deux droites réelles dont une à l'infini. Désignons par $\alpha$ et $\beta$ ces deux racines; si $\frac{A}{A'} < \frac{C}{C'}$, l'une est plus petite que $\frac{A}{A'}$, l'autre plus grande que $\frac{C}{C'}$; soit $\alpha < \frac{A}{A'}$, $\beta > \frac{C}{C'}$. Substituons successivement $\alpha$ et $\beta$ à la place de $\lambda$ dans le premier membre de l'équation (5), ce premier membre devient, pour $\lambda = \alpha$,

$$\begin{array}{l} -(A - \alpha A')(E - \alpha E')^2 - (C - \alpha C')(D - \alpha D')^2 \\ \quad + 2(E - \alpha E')(D - \alpha D')\sqrt{(A - \alpha A')(C - \alpha C')}; \end{array}$$

mais

$$\alpha < \frac{A}{A'} < \frac{C}{C'};$$

d'où l'on tire, puisqu'on peut toujours supposer $A' > 0$, par suite $C' > 0$, en vertu de l'hypothèse $A'C' - B'^2 > 0$,

$$A - \alpha A' > 0, \quad C - \alpha C' > 0;$$

donc le résultat de la substitution est

$$-\left[(E - \alpha E')\sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D')\sqrt{C - \alpha C'}\right]^2,$$

c'est-à-dire négatif.

Pour $\lambda = \beta$, le résultat de la substitution est, puisque $\beta > \frac{C}{C'} > \frac{A}{A'}$, et, par suite, $A - \beta A' < 0$, $C - \beta C' < 0$,

$$+\left[(E - \beta E')\sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D')\sqrt{\beta C' - C}\right]^2,$$

c'est-à-dire positif. Donc l'équation (5) a une ou trois racines réelles comprises entre $\alpha$ et $\beta$. Soit $\lambda'$ l'une de ces racines; cette valeur, mise à la place de $\lambda$ dans le premier membre de l'équation (6), le rend négatif, puisqu'elle est comprise entre ses deux racines; donc, pour $\lambda = \lambda'$, la quantité $\Delta$ est positive.

Considérons en second lieu le cas où

$$A'C' - B'^2 < 0.$$

Les racines de l'équation (6) peuvent être réelles ou imaginaires. Supposons-les d'abord réelles; soient $\alpha$ et $\beta$ ces deux racines : elles sont toutes deux ou $< \frac{A}{A'}$, ou comprises entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$, ou $> \frac{C}{C'}$. Si on les substitue à la place de $\lambda$ dans le premier membre de l'équation (5), comme $A - \alpha A'$ et $C - \alpha C'$ sont de même signe, ainsi que $A - \beta A'$ et $C - \beta C'$, puisque leur produit est positif, on obtient ou

$$-\left[(E - \alpha E')\sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D')\sqrt{C - \alpha C'}\right]^2,$$
$$-\left[(E - \beta E')\sqrt{A - \beta A'} - (D - \beta D')\sqrt{C - \beta C'}\right]^2,$$

ou

$$+\left[(E-\alpha E')\sqrt{\alpha A'-A}+(D-\alpha D')\sqrt{\alpha C'-C}\right]^2,$$
$$+\left[(E-\beta E')\sqrt{\beta A'-A}+(D-\beta D')\sqrt{\beta C'-C}\right]^2,$$

c'est-à-dire toujours deux résultats de même signe. Donc l'équation en $\lambda$ a une ou trois racines réelles en dehors de l'intervalle compris entre $\alpha$ et $\beta$; mais toute valeur de $\lambda$ non comprise entre $\alpha$ et $\beta$ fait prendre au premier membre de l'équation (6) le signe —; donc, encore dans ce cas, il y a au moins une racine de l'équation en $\lambda$ qui rend positive la quantité $\Delta$.

Si nous supposons maintenant les racines de l'équation (6) imaginaires, son premier membre prend toujours le signe — pour toute valeur de $\lambda$; par conséquent, toutes les racines réelles de l'équation en $\lambda$ rendront positive la quantité $\Delta$.

Il nous reste encore à faire voir que, quand l'une des racines réelles de l'équation en $\lambda$ annule $\Delta$, s'il n'y en a pas d'autre qui rende $\Delta$ positif, elle rend positive ou nulle la quantité $\Delta_1$, c'est-à-dire que, pour cette valeur de $\lambda$, l'équation (3) représente deux droites réelles parallèles distinctes ou une droite double réelle. En effet, l'équation en $\lambda$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(B-\lambda B')(E-\lambda E')-(C-\lambda C')(D-\lambda D')^2\\&\quad-[(B-\lambda B')^2-(A-\lambda A')(C-\lambda C')]\\&\quad\times[(E-\lambda E')^2-(C-\lambda C')(F-\lambda F')]=0,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\Delta$ et $\Delta_1$, quand ils ne sont pas nuls, sont de même signe. Or, si la racine réelle $\lambda'$ qui rend généralement $\Delta$ positif l'annule, on peut supposer que les coefficients A, A', B, B', C, C',... soient altérés de quantités infiniment petites qui ne feront que modifier infiniment peu les deux courbes; la racine $\lambda'$ deviendra

$\lambda' + \delta\lambda'$; elle cessera d'annuler la quantité $\Delta$ pour la rendre positive; par suite, elle rendra positive la quantité $\Delta_1$; mais la nouvelle valeur de $\Delta_1$ diffère infiniment peu de la première; donc celle-ci était positive pour $\lambda = \lambda'$, à moins qu'elle ne fût nulle en même temps que $\Delta$.

Sans vouloir entrer dans le détail des cas particuliers, il nous faut pourtant examiner encore spécialement le cas où $A'C' - B'^2 = o$.

Alors l'équation (6) se réduit à

$$(6') \qquad (2BB' - AC' - CA')\lambda + AC - B^2 = o;$$

l'une de ses racines est infinie. Désignons l'autre par $\beta$. si $2BB' - AC' - CA' > o$, cette racine est plus grande que $\frac{C'}{C}$, et, si $2BB' - AC' - CA' < o$, elle est plus petite que $\frac{A}{A'}$. En effet, dans le premier cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} > \frac{C}{C'};$$

car, si l'on chasse les dénominateurs, cette inégalité devient, en tenant compte de l'hypothèse $A'C' - B'^2 = o$,

$$(B\sqrt{C'} - C\sqrt{A'})^2 > o;$$

dans le second cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} < \frac{A}{A'};$$

car, après avoir chassé les dénominateurs, on obtient

$$(B\sqrt{A'} - A\sqrt{C'})^2 > o.$$

Mais, dans le premier cas, si l'on substitue $\beta$ à $\lambda$ dans l'équation (5), son premier membre devient

$$+\left[(E - \beta E')\sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D')\sqrt{\beta C' - C}\right]^2,$$

c'est-à-dire positif; dans le second, il devient

$$-\left[(E - \beta E')\sqrt{A - \beta A'} - (D - \beta D')\sqrt{C - \beta C'}\right]^2,$$

c'est-à-dire négatif. D'ailleurs, si l'on substitue $+\infty$ à $\lambda$, on trouve le signe du discriminant

$$A'E'^2 + C'D'^2 - 2B'D'E' + F(B'^2 - A'C'),$$

qui se réduit ici à

$$A'E'^2 + C'D'^2 - 2B'DE'$$

ou

$$(E'\sqrt{A'} - D'\sqrt{C'})^2,$$

c'est à-dire le signe $+$. Donc l'équation en $\lambda$ a une ou trois racines réelles inférieures à $\beta$ dans le premier cas, et supérieures à $\beta$ dans le second; mais, dans le premier cas, tout nombre inférieur à $\beta$, mis à la place de $\lambda$, rend le premier membre de l'équation (6′) négatif; dans le second, la même chose a lieu pour tout nombre supérieur à $\beta$; donc il y a au moins une racine réelle de l'équation en $\lambda$ qui rend positive la quantité $\Delta$, réduite ici à

$$-(2BB' - AC' - CA')\lambda - AC + B^2.$$

Si, en même temps que

$$A'C' - B'^2 = 0,$$

on a

$$2BB' - AC' - CA' = 0,$$

on en tire

$$B^2 = \frac{(AC' + CA')^2}{4B'^2} = \frac{(AC' + CA')^2}{4A'C'} = \frac{AC}{2} + \frac{A^2C'^2 + C^2A'^2}{4A'C'}.$$

Or

$$\frac{A^2C'^2 + C^2A'^2}{4A'C'} > \frac{AC}{2},$$

car cette inégalité revient à

$$(AC' - CA')^2 > 0;$$

donc $B^2 - AC$ est positif : la quantité $\Delta$ est alors constante et positive.