Concours d'agrégation (année 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 316-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__316_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1874).

Question de Mécanique élémentaire;

PAR M. A. TOURRETTES.

On donne une série de masses pesantes dont les centres de gravité sont distribués le long d'une tige AB *mobile autour d'un de ses points* C, *supposé fixe. La tige est soutenue en* A *par un fil qui passe sur un point* P, *situé sur la verticale de* C, *et dont l'extrémité supporte un poids de masse* μ (**).

(*) Lorsque $\lambda = \frac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2} = \lambda''$, $B' = 0$, et l'équation $A'x^2 + B'y^2 = C'$ se réduit à $x = \pm\sqrt{\frac{C'}{A'}} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$; elle représente deux droites parallèles à l'axe OY, menées par les foyers réels de deux coniques données. (G.)

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

On demande de déterminer et de discuter les conditions d'équilibre du système.

Je désigne par a, d, l les trois côtés CA, CP, PA du triangle ACP; par α, α', α'',... les distances des masses m, m', m'',... au point C, ces distances étant positives ou négatives suivant qu'elles sont comptées du côté CA ou du côté CB; par m_1 la masse de la tige, et par α_1 la distance de son centre de gravité au point C; par θ l'angle PCB.

Le système étant mobile autour du point fixe C, la somme algébrique des moments des forces est nulle dans la position d'équilibre. Donc

$$m\alpha \sin\theta + m'\alpha' \sin\theta + \ldots + m_1 \alpha_1 \sin\theta$$
$$= m''\alpha'' \sin\theta + \ldots + \mu a \sin\widehat{PAC};$$

mais

$$\sin\widehat{PAC} = \frac{d}{l} \sin\theta.$$

Substituant et divisant tous les termes par $\sin\theta$, il vient

$$l = \frac{\mu a d}{m\alpha + m'\alpha' + \ldots + m_1\alpha_1 - m''\alpha'' - \ldots}.$$

Posant

$$m\alpha + \ldots - m''\alpha'' - \ldots = M\bar{\alpha},$$

on trouve

$$l = \frac{\mu a d}{M\bar{\alpha}}.$$

Connaissant l, on aura facilement la position de la tige dans le cas de l'équilibre. Des points C et P on décrira deux circonférences avec les rayons a et l; les intersections seront les deux positions d'équilibre, symétriques de la verticale PC.

Supposons le point P extérieur au cercle de rayon a; les valeurs limites de l seront $d + a$ et $d - a$, ce qui exige que $\bar{\alpha}$ satisfasse aux inégalités

$$\frac{\mu ad}{M(d-a)} > \bar{\alpha} > \frac{\mu ad}{M(d+a)}.$$

Si P est sur le cercle, on aura

$$\bar{\alpha} > \frac{\mu a}{2M}.$$

Si P est intérieur, il faudra

$$\frac{\mu ad}{M(a-d)} > \bar{\alpha} > \frac{\mu ad}{M(a+d)}.$$

Quand l est égal à l'une des valeurs limites, la tige est verticale : si l'extrémité A est en bas, l'équilibre est instable ; si elle est en haut, l'équilibre est stable.

Jusqu'ici j'ai supposé $\bar{\alpha}$ positif ; si, par la disposition ou la grandeur des masses, le dénominateur de la valeur de l est négatif, il n'y a pas de position d'équilibre correspondante, à moins de supposer a ou d négatif. Si a est négatif, ce point d'attache du fil sera en B ; si d est négatif, le point sera au-dessous de C.