VACHETTE

Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux, où trois lettres consécutives sont toujours distinctes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 299-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__299_0>

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, OU TROIS LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES;

PAR M. VACHETTE,
Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

(voir 2ᵉ serie, t. XIII, p 549.)

I. *Distinction des diverses espèces de permutations contenues dans les* $B_{q,2}$ *intervalles inadmissibles pour l'espèce cherchée.*

Les permutations de l'espèce cherchée appartiennent aux $B_{q,2}$, dont il a été parlé dans un précédent article. Soit $C_{q,2}$ le nombre cherché; toutes les autres permutations, prises parmi les $B_{q,2}$, seront en général des $N_{q,2}$.

Toute $N_{q,2}$ contient un ou plusieurs *intervalles* inadmissibles pour les $C_{q,2}$ dont les seules formes sont $\underline{aba}$, $\underline{abab}$ désignées par S_3, S_4.

Il ne peut y avoir de formes plus complexes; toute lettre C, voisine d'un S_3 ou d'un S_4, ne peut que faire partie d'un intervalle consécutif distinct du premier, comme on le voit dans

$$\underline{aba}\,\underline{cbc},\quad \underline{aba}\,\underline{cdc},\quad \underline{aba}\,\underline{cdcd},\quad \underline{abab}\,\underline{cdc},\quad \underline{abab}\,\underline{cdcd}.$$

Dans un S_3, $\underline{aba}$, il y a une *médiane b* et deux *extrêmes a*; dans un S_4, $\underline{abab}$, il y a deux médianes et deux extrêmes.

Un S_4 emploie complétement deux des q groupes de lettres. Un S_3, $\underline{aba}$, n'emploie complétement qu'un groupe; sa médiane b peut être, ou isolée ailleurs, ou médiane d'un autre S_3

Un couple de deux S_3, $\underline{aba}$ et $\underline{cbc}$, ayant même médiane, emploie complétement trois des q groupes et donne deux intervalles complémentaires : on le désigne par $2\,S_3^C$.

Un $N_{q,2}$ peut contenir : 1° r couples d'intervalles complémentaires contenant $6r$ lettres égales deux à deux ; 2° u intervalles de forme S_4, contenant $4u$ lettres égales deux à deux ; 3° ν intervalles distincts de forme S_3, contenant 3ν lettres, dont 2ν égales deux à deux, et ν lettres distinctes entre elles. On doit avoir

$$3r + 2u + 2\nu \leqq q \quad \text{et} \quad \geqq 2,$$

car cet $N_{q,2}$ contient au moins un S_3.

On désigne par $N_q(r, u, \nu)$ le nombre des permutations d'une de ces espèces ; r, u, ν sont entiers et doivent satisfaire aux inégalités précédentes ; ils peuvent être nuls tous les trois, en admettant que $C_{q,2}$ peut s'écrire $N_q(0, 0, 0)$.

L'identité

$$B_{q,2} = C_{q,2} + \Sigma N_q(r, u, \nu)$$

servira de vérification ; la somme Σ comprend tous les termes possibles.

Le nombre des tournantes de l'espèce $N_q(r, u, \nu)$, tournante complète, est en général $\frac{1}{2q} N_q(r, u, \nu)$; une exception sera mentionnée plus loin.

Certains $C_{q,2}$ sont, comme les $B_{q,2}$, des tournantes incomplètes ; le nombre de leurs tournantes sera $\frac{C_{q,2} + P_q}{2q}$, pour des raisons analogues. On aura aussi à considérer l'ordre q d'une espèce, l'abaissement d'ordre, les variétés d'une même espèce, les variétés asymétriques et les variétés symétriques de fraction $\frac{1}{x}$; et l'on établira, comme dans le premier article, la formule

$$N_q(r, u, v) = 2q\, P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

II. *Moyens de former un intervalle; permutations de l'ordre $q - 1$ qui peuvent servir à former des* $C_{q,2}$.

1° Avec une seule lettre h, on peut former :

Un S_3, $\underline{aba}$ de deux manières, $ahba$ ou $abha$;

Un S_4, $\underline{abab}$ d'une seule, $abhab$.

Avec deux h, on peut former :

Un S_4, $\underline{abab}$ d'une manière, $ahbahb$;

Deux S_3, de quatre manières, puisque chacun d'eux peut être formé de deux manières avec h.

2° Il n'y a que des $B_{q-1,2}$ qui puissent former des $C_{q,2}$ au moyen de deux lettres h nouvelles; au moyen de h, le binaire $\underline{aa}$ donne un S_3, $\underline{aha}$; au moyen de deux h, on a un nouveau binaire, $\underline{ahha}$.

Parmi les $B_{q-1,2}$ on ne peut recourir qu'aux $C_{q-1,2}$, $N_{q-1}(0, 0, 1)$, $N_{q-1}(0, 0, 2)$, $N_{q-1}(0, 2, 0)$, $N_{q-1}(0, 1, 0)$, $N_{q-1}(0, 1, 1)$ et $N_{q-1}(1, 0, 0)$. En effet, pour les $N_{q-1}(0, 0, 0)$, on doit avoir $v < 3$, puisque deux h ne peuvent former que deux S_3; pour les $N_{q-1}(0, u, v)$, on doit avoir $u + v < 3$, ce qui répond ou à deux S_4, ou à un seul S_4, ou à un seul S_4 et un S_3; pour les $N_{q-1}(r, u, v)$, r n'étant pas nul, on doit avoir $r = 1$, $u = 0$, $v = 0$, car on ne peut former qu'un couple de $2S_3^c$.

III. *Formule du nombre* $C_{q,2}$.

1° Part des $C_{q-1,2}$.

Les lettres h peuvent porter, dans les numéros de 1 à $2q$ qu'elles ont dans la résultante, deux numéros séparés au moins par deux places; ainsi, un numéro étant donn à l'une d'elles, l'autre ne peut en avoir que $2q - 5$; on aura $\frac{2q(2q-5)}{2}$ systèmes de places. La part sera

$$q(2q-5)C_{q-1,2}.$$

2° Part des $N_{q-1}(0, 0, 1)$.

Avec une des lettres h, on forme le S_3 de deux manières, et le second h

$$\underline{ab^h a}\ldots$$

peut occuper, pour chacune de ces manières, autant de places qu'il y a de lettres en dehors de S_3, savoir $2q - 2 - 3$ ou $2q - 5$: aussi chaque tournante de l'espèce considérée en fournit $2(2q-5)$ à l'espèce cherchée; la part fournie en tournantes sera

$$\frac{2(2q-5)}{2(q-1)} N_{q-1}(0, 0, 1),$$

et en permutations, si l'on multiplie par $2q$,

$$\frac{2q(2q-5)}{q-1} N_{q-1}(0, 0, 1).$$

3° Part des $N_{q-1}(0, 0, 2)$.

Avec les deux h on a quatre manières de former les deux S_8 : la part sera

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(0, 0, 2).$$

4° Part des $N_{q-1}(0, 1, 0)$.

Si l'on forme le S_4 avec un seul h

$$\underline{ab^h ab}\ldots,$$

le second h peut occuper autant de places, plus une, qu'il y a de lettres en dehors de S_4, $2q - 2 - 4$ ou $2q - 6$: on a ainsi $2q - 5$ systèmes.

Si on le forme avec les deux h, il y en a 1 de plus.

En tout, il y en a $2q - 4$: la part sera

$$\frac{2q(q-2)}{q-1} N_{q-1}(0, 1, 0).$$

5° Part des $N_{q-1}(0, 1, 1)$.

On forme S_4 d'une manière, et S_3 de deux. Il y a deux systèmes. La part sera

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(0, 1, 1).$$

6° Part des $N_{q-1}(0, 2, 0)$.

On forme chaque S_4 d'une manière. La part sera

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(0, 2, 0).$$

7° Part des $N_{q-1}(1, 0, 0)$.

On forme chaque S_3 de deux manières. La part sera

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(1, 0, 0).$$

Si l'on ajoute toutes ces parts et qu'on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q} C_{q-1,2} = (2q-5)(q-1)C_{q-1,2} &+ 2(2q-5)N_{q-1}(0,0,1) \\ &+ 4N_{q-1}(0, 0, 2) + 2(q-2)N_{q-1}(0, 1, 0) \\ &+ 2N_{q-1}(0,1,1) + N_{q-1}(0,2,0) + 4N_{q-1}(1,0,0).\end{aligned}$$

IV. *Décomposition des* $B_{2,2}$, *des* $B_{3,2}$ *et des* $B_{4,2}$.

1° On a vu (1er article, IV) que $B_{2,2} = 2$; on a une tournante incomplète à deux places, $\underline{abab}$; elle est de l'espèce $N_2(0, 1, 0)$; ainsi

$$N_2(0, 1, 0) = 2.$$

Cette espèce donne l'exception annoncée (I) : on a une seule variété symétrique de fraction $\frac{1}{4}$; car la permutation peut commencer à l'une des quatre lettres, sans changer la variété; donc $1\,\frac{2q\,P_q}{4} = N_q(0, 1, 0)$, et, comme $q = 2$, $N_2(0, 1, 0) = 2$.

2° On a vu (1^er^ article, IV) que $B_{3,2} = 24 = 4P_3$, $C_{3,2} = 6 = P_3$, *abcabc*; par la formule on a

$$\tfrac{2}{3}C_{3,2} = 2N_2(0, 1, 0) = 4.$$

$$N_3(1,0,0) = 18 = 3P_3, \quad \text{d'où} \quad B_{3,2} = P_3 + 3P_3 = 4P_3.$$

Un $B_{3,2}$ ne peut en effet contenir un S_4; $\underline{abab}\,cc$ est inadmissible. S'il contient un S_3, $\underline{aba}$, il contient forcément son complémentaire, $\underline{cbc}$: on a une seule variété, $\underline{aba}\,\underline{cbc}$, symétrique de fraction $\frac{1}{2}$ pour les $N_3(1,0,0)$; d'où $N_3(1, 0, 0) = \frac{2.3P_3}{2}\,1 = 3P_3$.

3° On sait que $B_{4,2} = 31\,P_4$. Or

$C_{4,2} =$	$7P_4$;	par la formule $C_{4,2}$.
$N_4(0, 0, 1) =$	$8P_4$;	une seule variété asymétrique $\underline{aba}\,cdbcd$; $N_4(0, 0, 1) = 1.2.4P_4$.
$N_4(0, 0, 2) =$	$8P_4$;	une seule variété asymétrique $\underline{aba}\,\underline{cdc}\,bd$. Point de $N_4(0, 1, 0)$, ni de $N_4(0, 1, 1)$.
$N_4(0, 2, 0) =$	$4P_4$;	une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{abab}\,\underline{cdcd}$; $N_4(0, 2, 0) = \frac{2.4P_4}{2}$.
$N_4(1, 0, 0) =$	$4P_4$;	une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{aba}d\,\underline{cbc}d$.
	$\overline{31\,P_4}$.	

V. ***Abaissement d'ordre du nombre*** $N_q(r, u, v)$ ***quand*** v ***n'est pas nul; formule*** (r, u, v).

L'espèce $N_q(r, u, v)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, u, v)$ tournantes; si l'on fait commencer une tournante à l'un des v intervalles distincts de forme S_3, on ne comptera que v des $2q$ permutations de la tournante, en tout $\frac{v}{2q} N_q(r, u, v)$.

Si on enlève les extrêmes de $\underline{aba}$, on obtient des permutations d'ordre $q - 1$, à l'aide desquelles on peut revenir à l'espèce cherchée; leur nombre sera le nombre des permutations d'ordre q, relatives à a, et, pour les avoir toutes, on multipliera ce nombre par q.

Il convient d'examiner ce que produit l'enlèvement des a de $\underline{aba}$. Autour du b restant peut se former un S_4, un S_3 ou rien :

$$\left.\begin{matrix} \underline{cbcb} \\ \underline{bcbc} \end{matrix}\right\} \quad \text{par les formes} \quad \left\{\begin{matrix} c\,\underline{aba}\,cb, \\ bc\,\underline{aba}\,c, \end{matrix}\right.$$

$$\underline{cbc} \quad \text{par} \quad c\,\underline{aba}\,c,$$

$$\underline{bcb} \quad \text{par} \quad \left\{\begin{matrix} \underline{aba}\,cb, \\ bc\,\underline{aba}. \end{matrix}\right.$$

S'il se forme un S_4, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u+1, v-1)$; le nombre de S_4 a augmenté de 1, et celui des S_3 distincts a diminué de 1. Chacune des tournantes de cette espèce, commencée par un des $u + 1$ intervalles S_4, fournit $2(u+1)$ permutations à l'espèce cherchée, puisqu'on peut entourer de deux a l'une des deux médianes d'un S_4: la part ainsi fournie est

$$\frac{2(u+1)}{2(q-1)} N_{q-1}(r, u+1, v-1)$$

ou

$$\frac{u+1}{q-1} N_{q-1}(r, u+1, v-1).$$

S'il se forme un S_3, $\underline{bcb}$ et que sa médiane C ne fasse pas partie d'un autre S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u, v)$; un des S_3 distincts a été remplacé par un autre. Chacune de ces tournantes, commencée par un des v intervalles distincts S_3, fournit $3v$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a l'une des trois lettres de ces S_3 ; la part ainsi fournie est

$$\frac{3v}{2(q-1)} N_{q-1}(r, u, v).$$

Quand la médiane de $\underline{bcb}$ fait partie d'un autre S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r+1, u, v-2)$; le nombre des couples de $2S_3^C$ a augmenté de 1, et le nombre des S_3 distincts a diminué de 2. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $2(r+1)$ intervalles S_3 des $r+1$ couples de $2S_3^C$, fournit $4(r+1)$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a l'une des extrêmes b d'un de ces S_3, $\underline{bcb}$. La part sera

$$\frac{4(r+1)}{2(q-1)} N_{q-1}(r+1, u, v-2)$$

ou

$$\frac{2(r+1)}{q-1} N_{q-1}(r+1, u, v-2).$$

S'il ne se produit aucun intervalle, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u, v-1)$; le nombre des intervalles distincts S_3 a diminué de 1. Dans chaque tournante, il y a $2(q-1)-6r-4u-4(v-1)$ lettres isolées dont la semblable n'existe dans aucun des intervalles. Chacune de ces tournantes, commencée par une de ces lettres, fournit $2(q-3r-2u-2v+1)$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a cette lettre initiale. La part sera

$$\frac{q-3r-2u-2v+1}{q-1} N_{q-1}(r, u, v-1).$$

La somme des parts, multipliée par q, donne $\frac{\nu}{2q}\mathrm{N}_q(r, u, \nu)$; si l'on multiplie tout par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule (r, u, ν)

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu(q-1)}{2q^2}\mathrm{N}_q(r, u, \nu)\\
&\quad = (u+1)\mathrm{N}_{q-1}(r, u+1, \nu+1) + \frac{3\nu}{2}\mathrm{N}_{q-1}(r, u, \nu)\\
&\qquad + 2(r+1)\mathrm{N}_{q-1}(r+1, u, \nu-2)\\
&\qquad + (q-3r-2u-2\nu+1)\mathrm{N}_{q-1}(r, u, \nu-1).
\end{aligned}$$

VI. *Cas particuliers de la formule* (r, u, ν) ; *formules* $(0, u, \nu)$ *et* $(0, 1, 1)$, $(r, 0, \nu)$, $(0, 0, \nu)$ *et* $(0, 0, 1)$ *et* $(0, 0, 2)$.

1° La formule (r, u, ν), pour $r = 0$, donne la formule $(0, u, \nu)$

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(q-1)}{2q^2}\mathrm{N}_q(0, u, \nu) = {}& (u+1)\mathrm{N}_{q-1}(0, u+1, \nu-1)\\
&+ \frac{3\nu}{2}\mathrm{N}_{q-1}(0, u, \nu) + 2\mathrm{N}_{q-1}(1, u, \nu-2)\\
&+ (q-2u-2\nu+1)\mathrm{N}_{q-1}(0, u, \nu-1),
\end{aligned}$$

et celle-ci pour $u = 1$ et $\nu = 1$ donne la formule $(0, 1, 1)$ relative à une des espèces qui forment $\mathrm{C}_{q,2}$

$$\begin{aligned}
\frac{q-1}{2q^2}\mathrm{N}_q(0, 1, 1) = {}& 2\mathrm{N}_{q-1}(0, 2, 0)\\
&+ \tfrac{3}{2}\mathrm{N}_{q-1}(0, 1, 1) + (q-3)\mathrm{N}_{q-1}(0, 1, 0).
\end{aligned}$$

2° Pour $u = 0$, elle donne la formule $(r, 0, \nu)$

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(q-1)}{2q^2}\mathrm{N}_q(r, 0, \nu) = {}& \mathrm{N}_{q-1}(r, 1, \nu-1) + \frac{3\nu}{2}\mathrm{N}_{q-1}(r, 0, \nu)\\
&+ 2(r+1)\mathrm{N}_{q-1}(r+1, 0, \nu-2)\\
&+ (q-3r-2\nu+1)\mathrm{N}_{q-1}(r, 0, \nu-1).
\end{aligned}$$

3° Pour $r = 0$ et $u = 0$, elle donne la formule $(0, 0, v)$

$$\frac{v(q-1)}{2q^2} N_q(0, 0, v) = N_{q-1}(0, 1, v-1) + \frac{3v}{2} N_{q-1}(0, 0, v) + 2N_{q-1}(1, 0, v-2) + (q - 2v + 1) N_{q-1}(0, 0, v-1),$$

qui en comprend deux autres; pour $v = 1$ et $v = 2$, relatives à deux des espèces qui forment $C_{q,2}$, les formules $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, 2)$

$$\frac{q-1}{2q^2} N_q(0, 0, 1) = N_{q-1}(0, 1, 0) + \tfrac{3}{2} N_{q-1}(0, 0, 1) + (q-1) C_{q-1,2},$$

car $N_{q-1}(0, 0, 0)$ n'est autre chose que $C_{q-1,2}$;

$$\frac{q-1}{q^2} N_q(0, 0, 2) = N_{q-1}(0, 1, 1) + 3N_{q-1}(0, 0, 2) + 2N_{q-1}(1, 0, 0) + (q-3) N_{q-1}(0, 0, 1).$$

(*A suivre.*)