NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur la théorie des sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 265-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__265_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,
Agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques spéciales
au lycée de Moulins.

Cette Note a pour but de donner des démonstrations analytiques fort simples de plusieurs théorèmes connus sur les sections coniques; ces démonstrations reposent sur l'emploi des coordonnées trilinéaires, mais on pourrait aussi se servir concurremment des coordonnées triponctuelles.

THÉORÈME I. — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six sommets sont situés sur une conique* (*).

En prenant, en effet, l'un des triangles pour triangle de référence, la conique a pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

et, en désignant par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax_1x_2x_3}{x} + \frac{a'y_1y_2y_3}{y} + \frac{a''z_1z_2z_3}{z} = 0;$$

(*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, I^{re} Partie, p. 140; PAINVIN, *Principes de Géométrie analytique*, p. 288.

car, si l'on exprime que le point P_1 est situé sur cette conique, on obtient la condition qui exprime que P_2 et P_3 sont conjugués par rapport à la conique donnée.

Théorème II. — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant les mêmes axes que dans le théorème corrélatif précédent, et en désignant par

$$D_i = u_i x + v_i y + w_i z = 0$$

les équations des trois côtés du second triangle, la conique cherchée a pour équation

$$\sqrt{\frac{u_1 u_2 u_3 x}{a}} + \sqrt{\frac{v_1 v_2 v_3 y}{a'}} + \sqrt{\frac{w_1 w_2 w_3 z}{a''}} = 0;$$

car, en exprimant que la droite D_1, par exemple, est tangente à cette conique, on obtient la condition qui exprime que D_2 et D_3 sont conjuguées par rapport à la conique donnée.

Théorème III. — *Quand deux triangles ont leurs six sommets situés sur une conique, ces points forment deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une même conique.*

En prenant l'un des triangles pour triangle de référence, la conique donnée a pour équation

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0,$$

et en désignant par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{b x^2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{b' y^2}{y_1 y_2 y_3} + \frac{b'' z^2}{z_1 z_2 z_3} = 0;$$

car, si l'on exprime que les deux points P_2 et P_3 sont conjugués par rapport à cette conique, on retrouve la condition qui exprime que le point P_1 est situé sur la conique donnée.

THÉORÈME IV. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs côtés forment deux systèmes de trois droites conjuguées par rapport à une même conique.*

En prenant pour axes les trois côtés du premier triangle, en désignant par D_i, comme précédemment, les équations des trois côtés du second, et par

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$$

l'équation de la conique donnée, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax^2}{u_1 u_2 u_3} + \frac{by^2}{v_1 v_2 v_3} + \frac{cz^2}{w_1 w_2 w_3} = 0.$$

Ces deux théorèmes sont les deux réciproques des deux précédents.

THÉORÈME V. — *Quand deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0$$

l'équation de la conique donnée et par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la droite $P_1 P_2$ a pour équation

$$\frac{bx}{x_1 x_2} + \frac{b'y}{y_1 y_2} + \frac{b''z}{z_1 z_2} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que cette droite passe par le point

P_1, on retrouve la condition qui exprime que P_2 est situé sur la conique donnée. La droite $P_1 P_2$ représente une tangente de la conique cherchée qui a pour équation

$$b\sqrt{\frac{x}{x_1 x_2 x_3}} + b'\sqrt{\frac{y}{y_1 y_2 y_3}} + b''\sqrt{\frac{z}{z_1 z_2 z_3}} = 0,$$

puisque la condition de contact exprime que le point P_3 est situé sur la conique donnée.

Théorème VI. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une conique* (*).

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\sqrt{bx} + \sqrt{b'y} + \sqrt{b''z} = 0$$

l'équation de la conique donnée, et par $D_i(u_i, v_i, w_i)$ les trois côtés du second, le point d'intersection de D_1 et D_2 a ses coordonnées proportionnelles à

$$\frac{b}{u_1 u_2}, \quad \frac{b'}{v_1 v_2}, \quad \frac{b''}{w_1 w_2},$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur la droite D_1, on retrouve la condition qui exprime que D_2 est tangente à la conique donnée. Le point d'intersection des droites D_1 et D_2 est situé sur la conique cherchée

$$\frac{b^2}{u_1 u_2 u_3 x} + \frac{b'^2}{v_1 v_2 v_3 y} + \frac{b''^2}{w_1 w_2 w_3 z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur cette conique, on retrouve la condition de contact de la droite D_3 à la conique donnée.

Théorème VII. — *Si des trois sommets d'un triangle on mène des tangentes à une conique quelconque, leurs*

(*) Chasles, *Traité des Sections coniques*, p. 53.

points d'intersection avec les côtés opposés sont six points situés sur une conique (*).

En prenant le triangle donné pour triangle de référence et en désignant par

$$S = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de cette conique, les tangentes menées du sommet opposé à l'axe des x ont pour équation

$$aS - (ax + b''y + b'z)^2 = 0,$$

ou, en développant et en désignant par A et B les expressions connues $a'a'' - b^2$ et $b'b'' - ab$ et par A′, B′, A″, B″ les expressions analogues,

$$A''y^2 + A'z^2 - 2Byz = 0.$$

En multipliant par A, on voit immédiatement, à cause de la symétrie, que la conique cherchée a pour équation

$$A'A''x^2 + A''Ay^2 + AA'z^2 - 2ABYz - 2A'B'zx - 2A''B''xy = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire les différents cas particuliers, et de démontrer les théorèmes corrélatifs.