NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Propriétés de la strophoïde. Démonstration d'un théorème de Poncelet. Propriétés de figures anallagmatiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 241-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__241_0>

PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOÏDE.

Démonstration d'un théorème de Poncelet. — Propriétés de figures anallagmatiques ;

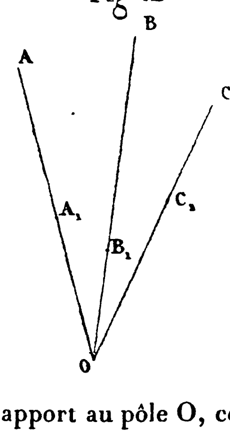
PAR M. L. MALEYX.

(Suite d'un article précédent, *voir* même tome, p. 193.)

THÉORÈME III. — *Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance convenables, en la transformant par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance quelconques, on formera une nouvelle figure jouissant de la même propriété.*

Soient (*fig.* 12) A, B, C, A_1, B_1, C_1 six points d'une figure se transformant en elle-même par rayons vecteurs

Fig 12



réciproques par rapport au pôle O, ces points se correspondant deux à deux, de sorte qu'on ait

$$P = OA \times OA_1 = OB \times OB_1 = OC \times OC_1.$$

Considérons les quatre points A, A_1, B, B_1 comme fixes, C, C_1 comme variables sur la figure et non situés dans le plan AOB; les six points A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont situés sur une même sphère. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance quelconques, désignons par a, b, c, a_1, b_1, c_1 les points transformés respectifs de A, B, C, A_1, B_1, C_1; les six points a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont situés sur une même sphère transformée de celle qui passe par A, B, C, A_1, B_1, C_1; les quatre points a, a_1, b, b_1 sont situés sur l'intersection de cette sphère avec celle qui est transformée du plan AOB, donc dans un même plan; on démontrerait de même que les deux systèmes de quatre points (a, a_1, c, c_1), (b, b_1, c, c_1) sont chacun situés dans un plan; donc les droites aa_1, bb_1, cc_1, étant intersections de trois plans se coupant deux à deux, vont concourir au même point, et si l'on désigne ce point d'intersection des droites fixes aa_1, bb_1 par ω, nous aurons

$$\omega a \times \omega a_1 = \omega b \times \omega b_1 = \omega c \times \omega c_1,$$

ce qui établit la proposition pour tous les points de la figure non situés dans le plan AOB.

Observons toutefois que les points A, A_1, B, B_1 peuvent être introduits fictivement dans la figure, et qu'on peut en disposer de manière que le plan AOB ne contienne qu'un nombre limité de rayons issus du point O et dirigés vers les points de la figure. Il n'y aurait donc exception que pour un nombre limité de points, ce qui est inadmissible; et encore pourrait-on lever la difficulté relative à ces points en faisant varier le rayon OBB_1 et en conservant le rayon OAA_1. Donc le théorème est général.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent que toute figure plane se transformant en elle-même par rayons vecteurs réciproques sera transformée par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle hors de son plan en intersection d'une sphère et d'un cône.

Le sommet de ce cône est facile à déterminer : en effet, soient (*fig.* 13) A, A_1 deux points correspondants d'une

Fig. 13.

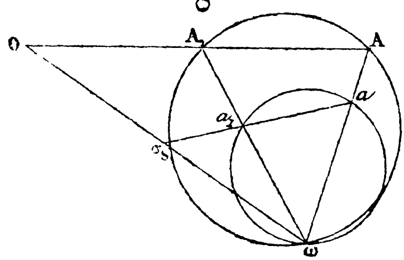


figure plane se reproduisant par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle O de sorte que $OA \times OA_1 = P$; transformons-la par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle ω hors de son plan et la puissance π; faisons passer un plan par ω et AA_1. La droite OAA_1 se transformera en la circonférence $\omega a a_1$, la circonférence ωAA_1 en la droite aa_1 coupant $O\omega$ en σ. Or on a $OS \times O\omega = OA \times OA_1 = P$, d'où l'on conclut que le point S est fixe; de plus $\omega S \times \omega\sigma = \omega a \times \omega A = \pi$: donc le point σ est fixe, et c'est le sommet du cône.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une figure plane ayant un plan de symétrie, et en prenant le pôle hors de son plan, il résulte du théorème I qu'elle se transformera en intersection d'une sphère et d'un cône dont le sommet sera le transformé du point symétrique du pôle de la première transformation par rapport au plan de symétrie. Le sommet de ce cône sera donc situé dans le plan tangent à la sphère transformée du plan de la courbe

16.

et au pôle de transformation ω. Réciproquement l'intersection d'une sphère et d'un cône transformée par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle sur la sphère, deviendra une ligne plane se reproduisant par rayons vecteurs réciproques.

Examinons maintenant quelques conséquences de ces propositions. Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une courbe du second degré, en prenant pour pôle un point non situé sur ses axes, mais situé dans son plan, on obtiendra une transformée se reproduisant par une transformation analogue en prenant un pôle et une puissance convenables. Il existera deux pôles de reproduction quand la courbe initiale sera une ellipse ou une hyperbole, un seul quand ce sera une parabole. Les deux pôles de reproduction sont situés sur deux rayons rectangulaires issus du pôle de la première transformation.

Si le pôle de la première transformation est situé sur l'un des axes de la courbe, l'un des pôles de reproduction s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe sur lequel on a pris le premier pôle. Nous en avons un exemple dans le limaçon de Pascal obtenu en transformant une courbe du second degré par rayons vecteurs réciproques en prenant un foyer pour pôle; le pôle de reproduction est alors le point transformé du second foyer; dans la parabole, ce point vient coïncider avec le pôle de transformation primitif et la puissance de reproduction est nulle.

Si nous admettons que la courbe polaire réciproque d'une courbe du second degré par rapport à un cercle soit une courbe du second degré, il en résulte, en se fondant sur le théorème III de notre précédent article, que toute podaire d'une courbe du second degré est transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe du second degré; donc toute podaire d'une courbe du second degré peut se reproduire par rayons vecteurs réciproques pour un ou deux pôles convenablement choisis.

Si maintenant nous transformons par rayons vecteurs réciproques une courbe du second degré en prenant le pôle hors de son plan, elle deviendra intersection de la sphère transformée de son plan et de deux ou d'un cône, suivant qu'elle aura deux ou un seul plan de symétrie. Nous avons vu comment étaient placés les sommets de ces cônes, d'après la remarque sur les théorèmes III et I. On conçoit que chacun de ces cônes doit être du second degré. En effet, leur directrice est bien une courbe du quatrième degré, intersection d'une sphère et d'un cône du second degré; mais, comme chaque génératrice de l'un des cônes considérés coupe la directrice en deux points, un plan passant par son sommet ne peut contenir plus de deux génératrices.

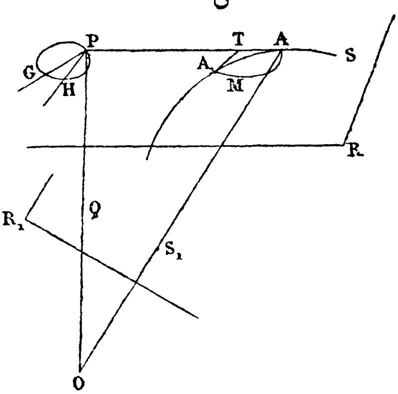
De là on déduit que, si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré ayant son sommet sur la sphère, en prenant pour pôle un point de la surface de la sphère, la transformée sera plane, admettra un point double réel, point transformé du sommet du cône; son degré ne surpassera pas quatre, elle sera de degré impair ou pair suivant que le pôle sera sur la courbe sphérique ou en dehors, puisque dans le premier cas elle n'aura qu'une direction asymptotique; elle aura, du reste, la propriété de se reproduire par rayons vecteurs réciproques, puisque la courbe sphérique qui lui a donné naissance peut elle-même être considérée comme transformée d'une courbe du second degré.

Les points de la transformée d'une courbe du second degré peuvent, comme ceux de la strophoïde, être considérés comme correspondants deux à deux; deux points correspondants seront les transformés de deux points diamétralement opposés de la conique; ils sont toujours situés sur un cercle passant par le pôle et le point transformé du centre; ce cercle coupe la transformée aux deux points correspondants sous des angles égaux.

THÉORÈME IV. — *Deux surfaces polaires réciproques par rapport à une sphère sont chacune transformées par rayons vecteurs réciproques d'une podaire de l'autre, le pôle de transformation étant le centre de la sphère directrice et la puissance de transformation le carré de son rayon.*

Soient une surface quelconque S (*fig.* 14), R son plan tangent en A ; si du point fixe O nous abaissons une per-

Fig. 14.



pendiculaire sur ce plan, le lieu du point P, pied de cette perpendiculaire, quand on fera varier A, sera une podaire de la surface S. Je dis maintenant que le plan tangent à la surface podaire en P l'est également à la sphère ayant OA pour diamètre. En effet unissons AP, prenons le point T voisin de A sur AP, comme sommet d'un cône circonscrit à la surface S suivant la courbe A_1MA ;

les projections du point O sur tous les plans tangents à ce cône appartiendront à la surface podaire et à la sphère ayant OT pour diamètre; ces points seront situés sur la petite courbe sphérique PGH. Faisons passer par OP deux plans fixes OPG, OPH, coupant la courbe PGH en G et en H. Si le point T se rapproche indéfiniment de A, les droites PG, PH deviendront, à la limite, tangentes à la surface podaire et à la sphère ayant OA pour diamètre. Si maintenant nous considérons le point O comme centre d'une sphère directrice dont le rayon soit R, le pôle du plan tangent en A par rapport à cette sphère se trouve sur OP et en un point Q, tel que

$$OP \times OQ = R^2.$$

Donc le lieu du pôle du plan tangent à la surface S satisfait à la condition de transformation par rayons vecteurs réciproques conforme à l'énoncé. Le plan tangent au lieu du point Q en Q peut être considéré comme transformé par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance R^2 de la sphère ayant OA pour diamètre; c'est donc le plan perpendiculaire à OA mené par le point Q, et l'on a

$$OS_1 \times OA = R^2.$$

A est donc le pôle du plan tangent au lieu du point Q en Q, et le lieu de S_1, qui est une podaire du lieu du point Q, est transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point A, suivant la puissance R^2.

Nous terminerons là cette étude géométrique, et nous allons passer à quelques considérations analytiques qui y sont liées.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point, x', y' les coordonnées du point transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant l'origine pour pôle et P pour puissance, on a

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x'^2 + y'^2}{P},$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad x = \frac{Px'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{Py'}{x'^2 + y'^2}.$$

Soit maintenant l'équation d'une courbe du second degré

$$(2) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Sa transformée par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et en prenant le pôle à l'origine, aura une équation formée en remplaçant dans l'équation (2) x et y par leurs valeurs déduites des formules (1). Cette équation rendue entière sera, en supprimant les accents,

$$(3) \; F(x^2+y^2)^2 + (Dy + Ex)(x^2 + y^2) + Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

On voit que cette courbe est du troisième ou du quatrième degré, suivant que la conique (2) passe ou ne passe pas par le pôle de transformation. Quel que soit son degré, elle admet toujours un point double réel qui est le pôle de transformation; ce point est isolé si la courbe proposée est une ellipse, suivi de points réels consécutifs dans le cas contraire; les tangentes en ce point double sont parallèles aux directions asymptotiques de la courbe donnée. Il résulte du théorème I que la courbe (3) doit se reproduire par rayons vecteurs réciproques pour un ou deux pôles, points transformés des points symétriques du pôle de la première transformation par rapport aux axes de la courbe (2); les pôles de reproduction feront donc ou ne feront pas partie de la courbe (3), suivant qu'elle sera du troisième ou du quatrième degré.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur la direction des axes de coordonnées initiaux, nous pouvons supposer l'axe des y parallèle à la polaire de l'origine; dès lors on aura $D = 0$, et l'équation (3) se réduira à

$$(4)\quad F(x^2+y^2)^2 + Ex(x^2+y^2) + Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

Rapportant cette courbe à un système de coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine et pour axe polaire l'axe de x, l'équation devient

$$(5)\quad F\rho^2 + E\rho\cos\omega + A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega = 0.$$

Supposons d'abord $F = 0$, c'est-à-dire le pôle de transformation sur la courbe, l'équation (5) se réduit à

$$E\rho\cos\omega + A + \cos\omega[B\sin\omega + (C - A)\cos\omega] = 0$$

ou

$$(6)\qquad \rho = -\frac{A}{E\cos\omega} - \frac{1}{E}[B\sin\omega + (C - A)\cos\omega].$$

On voit sous cette forme que notre transformée peut se construire comme la strophoïde, qui n'en est qu'un cas particulier, en augmentant les rayons vecteurs d'une droite fixe, qui est asymptote de la courbe, de ceux d'un cercle qui passe par le pôle. Il est facile, quand la droite et le cercle ont été construits, de déterminer les points du lieu dont la distance à l'asymptote est maximum ou minimum : c'est généralement en ces points que la tangente est parallèle à l'asymptote, et ce sont eux qui sont les pôles de reproduction de la courbe; ils sont situés sur deux rayons rectangulaires issus du pôle de transformation et dirigés vers les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à la direction asymptotique.

Supposons maintenant $F \gtrless 0$: on voit, d'après l'équation (5)

$$F\rho^2 + E\rho\cos\omega + A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega = 0,$$

que le lieu des milieux des cordes interceptées par la courbe sur les rayons issus du pôle est une circonférence de cercle; ce fait pouvait être géométriquement prévu, la circonférence étant la transformée de la polaire de l'origine.

Cherchons actuellement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe plane de degré p puisse se reproduire par rayons vecteurs réciproques. Désignons en général par $F_k(xy)$ un polynôme homogène de degré k en x et y; considérons une courbe de degré p, rapportons-la à deux axes de coordonnées rectangulaires se coupant en un point de la courbe du degré de multiplicité $p-q$, $p-q$ pouvant être nul; l'équation de cette courbe pourra s'écrire

$$(1)\quad F_p(xy) + F_{p-1}(xy) + F_{p-2}(xy) + \ldots + F_{p-q}(xy) = 0.$$

Formons l'équation de sa transformée suivant la puissance P, et, en prenant le pôle à l'origine, nous aurons, d'après des formules établies,

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy) \\ \quad + P(x^2+y^2)^{q-1} F_{p-q+1}(xy) + \ldots + P^q F_p(xy) = 0, \end{array} \right.$$

Pour que l'équation (1) représente une courbe se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle à l'origine, il est nécessaire et suffisant qu'en choisissant convenablement P l'équation (2) puisse représenter le lieu de l'équation (1). Or pour cela il faut que le premier membre de l'équation (2) soit le produit du premier membre de l'équation (1) par un polynôme de degré q, puisque le degré de l'équation (2) est $(p+q)$.

De plus le facteur introduit doit être homogène; car le degré des termes de degré le plus faible de l'équation (2) doit être la somme des degrés des termes de degré le plus faible de l'équation (1) et du facteur introduit, ce qui exige que ce degré soit q. Ainsi le premier membre de l'équation (2) doit être le produit du premier membre de l'équation (1) par un polynôme homogène à coefficients réels de degré q; si nous admettons qu'il n'existe aucun facteur commun aux polynômes

$$F_p(xy), \quad F_{p-1}(xy), \ldots, \quad F_{p-q}(xy),$$

les polynômes

$$(x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy), \quad (x^2+y^2)^{q-1} F_{p-q+1}(xy), \ldots, \quad F_p(xy)$$

admettant un facteur commun de degré q, ce facteur ne pourra se composer que de facteurs du premier degré de x^2+y^2, et, comme il est à coefficients réels, il devra être une puissance entière de x^2+y^2, ce qui exige que q soit pair et que le facteur soit $\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}$. D'après cela, pour que l'équation (1) représente une courbe se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant à l'origine, il faut et il suffit que l'on puisse trouver des valeurs de λ et de P satisfaisant aux égalités

$$\begin{aligned}
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}} F_p \quad (xy) &= (x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy),\\
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}} F_{p-1}(xy) &= P(x^2+y^2)^{q-1} F_{p-q+1}(xy),\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots\\
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}} F_{p-q}(xy) &= P^q F_p(xy).
\end{aligned}$$

Ces conditions se réduisent aux suivantes :

1° Que le groupe des termes de degré le plus élevé soit divisible par le groupe de termes de degré le moins élevé, et que le quotient soit à une constante près une puissance de (x^2+y^2), ce qui exige que la différence de leurs degrés soit un nombre pair et que l'exposant de (x^2+y^2) soit la moitié de ce nombre; si cette première condition est remplie, la première égalité détermine la valeur de λ, et, en multipliant la première et la dernière, on en déduira $P : P = \lambda^{\frac{2}{q}}$.

2° Que si l'on prend deux groupes de termes séparément homogènes, et dont la somme des degrés soit égale à la somme des degrés des termes extrêmes, celui de degré le plus élevé soit divisible par celui de degré moindre; que le quotient soit à une constante près une puissance de (x^2+y^2) dont l'exposant est la demi-différence de leurs degrés; quant à la constante, si l'on représente par δ l'excès du degré de l'équation sur le degré du dividende, elle sera

$$\frac{P^\delta}{\lambda} = \lambda^{\frac{2\delta}{q}-1} = P^{\delta-\frac{q}{2}}.$$

Comme application de ce qui précède, on voit que la forme générale de l'équation d'une courbe du troisième degré se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et lorsque l'origine est le pôle de reproduction, est

$$(3) \qquad (x^2+y^2)F_1(xy) + PF_2(xy) + PF_1(xy) = 0.$$

On voit encore que celle d'une courbe du quatrième, prise dans les mêmes conditions, est de l'une des deux formes

$$(4) \qquad (x^2+y^2)F_2(xy) + PF_3(xy) + PF_2(xy) = 0,$$

$$(5) \quad (x^2+y^2)^2 + P(x^2+y^2)F_1(xy) + P^2F_2(xy) + P^2F_1(xy) + P^2 = 0.$$

D'après ce que nous avons vu sur la transformation d'une courbe du second degré par rayons vecteurs réciproques, les courbes du troisième et du quatrième degré, représentées par les équations (3) et (5), sont les seules qui puissent provenir d'une courbe du second degré, et encore, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'elles admettent un point double réel. Il est facile de constater que cette condition est suffisante; en effet, si une courbe représentée par une des équations (3) ou (5) admet un point double réel, en y transportant l'origine des coordonnées sans changer leur direction, l'équation prend l'une des formes

$$(6) \qquad (x^2+y^2)\,F_1(xy)+\varphi_2(xy)=0,$$

$$(7) \qquad (x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)\,\varphi_1(xy)+\varphi_2(xy)=0.$$

Si nous transformons ces deux courbes par rayons vecteurs réciproques suivant la puissance k, et en prenant le pôle à l'origine, les équations des transformées seront

$$(8) \qquad \varphi_2(xy)+k\,F_1(xy)=0,$$

$$(9) \qquad \varphi_2(xy)+k\,\varphi_1(xy)+k^2=0,$$

ce qui démontre la proposition.

Il résulte de ce que nous avons vu, relativement à l'équation d'une courbe qui se reproduit par rayons vecteurs réciproques, que si cette équation est du degré $2n+k$, et que le pôle de reproduction soit du degré de multiplicité k, son équation en coordonnées rectangulaires, et en prenant l'origine au pôle de reproduction, est de la forme

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2)^n F_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}F_{k+1}(xy)+\ldots \\ \quad +(x^2+y^2)F_{k+n-1}(xy)+F_{n+k}(xy)+\ldots+\alpha F_k(xy)=0. \end{array} \right.$$

Voyons comment elle se modifie quand on déplace l'origine des coordonnées en conservant leur direction.

Considérons la fonction

$$(2)\qquad (x^2+y^2)^q\psi_p(xy),$$

$\psi_p(xy)$ étant une fonction entière de x et de y et de degré p. Désignons du reste par $\varphi_p(xy)$ la fonction homogène de degré le plus élevé entrant dans $\psi_p(xy)$, on pourra mettre la fonction (2) sous la forme

$$(x^2+y^2)^q\psi_p(xy) = (x^2+y^2)^q\varphi_p(xy) + (x^2+y^2)^{q-1}\left\{(x^2+y^2)[\psi_p(xy)-\varphi_p(xy)]\right\}.$$

Or le produit

$$(x^2+y^2)(\psi_p xy - \varphi_p xy) = \psi_{p+1}(xy)$$

est généralement de degré $(p+1)$; si donc nous désignons par

$$\psi_p(xy),\quad \psi_{p+1}(xy),\ldots,\quad \psi_{p+k}(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont les degrés soient respectivement p, $p+1,\ldots$, $p+k$, et par

$$\varphi_p(xy),\quad \varphi_{p+1}(xy),\ldots,\quad \varphi_{p+k}(xy)$$

des fonctions homogènes respectivement de mêmes degrés, nous pourrons écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^q\,\psi_p(xy) &= (x^2+y^2)^q\,\varphi_p(xy)\\
&\quad + (x^2+y^2)^{q-1}\psi_{p+1}(xy),\\
(x^2+y^2)^{q-1}\psi_{p+1}(xy) &= (x^2+y^2)^{q-1}\varphi_{p+1}(xy)\\
&\quad + (x^2+y^2)^{q-2}\psi_{p+2}(xy),\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(x^2+y^2)\psi_{p+q-1}(xy) &= (x^2+y^2)\varphi_{p+q-1}(xy) + \psi_{p+q}(xy)
\end{aligned}$$

ajoutant ces égalités, on en déduit

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&(x^2+y^2)^q\psi_p(xy)\\
&\quad = (x^2+y^2)^q\varphi_p(xy) + (x^2+y^2)^{q-1}\varphi_{p+1}(xy) + \ldots\\
&\qquad + (x^2+y^2)\varphi_{p+q-1}(xy) + \psi_{p+q}(xy).
\end{aligned}\right.$$

Considérons actuellement la fonction

$$(x^2+y^2)^n F_k(xy),$$

changeons-y x en $(x+a)$ et y en $(y+b)$; elle deviendra, en représentant par

$$\chi_k(xy),\quad \chi_{k+1}(xy),\ldots,\quad \chi_{k+n}(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont le degré soit égal à l'indice,

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2)^n F_k(x+a,\, y+b)\\ &\quad=(x^2+y^2)^n\chi_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}\chi_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\qquad+(x^2+y^2)\chi_{k+n-1}(xy)+\chi_{k+n}(xy)\,;\end{aligned}$$

mais chaque terme du second membre peut être transformé conformément à l'égalité (3), et en représentant par

$$f_k(xy),\quad f_k^1(xy),\ldots,\quad f_k^n(xy)$$

des fonctions homogènes distinctes de x et de y dont le degré commun soit k, et par

$$F_k(xy),\quad F_k^1(xy),\ldots\quad F_k^n(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont le degré soit aussi k, on pourra écrire

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^n\chi_k(xy)\\ &\quad=(x^2+y^2)^n f_k^1(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}^1(xy)+\ldots\\ &\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}^1(xy)+F_{k+n}^1(xy),\\ &(x^2+y^2)^{n-1}\chi_{k+1}(xy)\\ &\quad=(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}^2(xy)+\ldots\\ &\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}^2(xy)+F_{k+n}^2(xy),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &(x^2+y^2)\chi_{k+n-1}(xy)=(x^2+y^2)f_{k+n-1}^n(xy)+F_{k+n}^n(xy),\\ &\qquad\chi_{k+n}(xy)=\chi_{k+n}(xy).\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, on aura

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2)^n\mathrm{F}_k(x+a,\ y+b)\\&\quad=(x^2+y^2)^n f_k(xy)+(x^2+y^2)^{n+1}f_{k+1}(xy)+\ldots\\&\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}(xy)+\mathrm{F}_{k+n}(xy).\end{aligned}\right.$$

Si actuellement nous reprenons la courbe représentée par l'équation (1), dont nous représenterons le premier membre par $\Phi(xy)$, et que nous la rapportions à deux nouveaux axes parallèles aux premiers, se coupant au point dont les coordonnées sont a, b, l'équation (1) deviendra, en transformant ses termes d'après l'égalité (4),

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\Phi(x+a,\ y+b)\\&\quad=(x^2+y^2)^n f_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}(xy)+\ldots\\&\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}(xy)+\mathrm{F}_{k+n}(xy)=0.\end{aligned}\right.$$

Toute courbe plane de degré $2n+k$ se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, et dont le pôle de reproduction est du degré de multiplicité k, a donc, en prenant pour origine un point quelconque de son plan, la forme de l'équation (5); $f_k(xy)$, $f_{k+1}(xy)$, ..., $f_{k+n-1}(xy)$ sont des fonctions homogènes dont le degré est égal à l'indice; $\mathrm{F}_{k+n}(xy)$ est une fonction entière, non homogène de x et de y, et son degré ne surpasse pas $k+n$.

Théorème V.—*La perspective de l'intersection d'une sphère et d'un cône de degré n, sur un plan quelconque et en prenant pour point de vue le point de contact de la sphère avec un plan tangent parallèle au plan du tableau, est une courbe dont le degré ne surpasse pas 2n, se reproduisant par rayons vecteurs réciproques.*

En effet, si nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle au point de vue, et une puissance telle que le plan du tableau devienne transformé de la sphère, comme la courbe sphérique se reproduit par rayons vecteurs réciproques, il en sera de même de sa transformée (théorème III); or cette transformée n'est autre chose que la perspective de la courbe sphérique sur le plan du tableau. En second lieu, la courbe sphérique, intersection de la sphère et d'un cône de degré n, sera du degré $2n$; le cône ayant pour sommet le point de vue et cette courbe pour directrice sera également du degré $2n$; donc il en sera de même de sa trace sur le plan du tableau, ce qu'on voulait démontrer.

Le degré du cône et celui de sa trace peuvent s'abaisser si le point de vue est un point simple ou multiple de la courbe sphérique.

THÉORÈME VI. — *Toute courbe plane de degré $2n+k$, se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, et dont le pôle de reproduction est du degré de multiplicité k (k pouvant être nul), peut être considérée comme la perspective de l'intersection d'une sphère et d'un cône de degré $n+k$, le point de vue étant sur la surface de la sphère.*

Rapportons la courbe à un système de trois axes rectangulaires en prenant l'origine au point de vue, et le plan des xy parallèle à celui de la courbe; les équations de la courbe seront, d'après ce que nous avons vu précédemment,

$$z = v, \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2)^n f_k(xy) + (x^2+y^2)^{n-1} f_{k+1}(xy) + \ldots \\ \quad + (x^2+y^2) f_{k+n-1}(xy) + \mathrm{F}_{k+n}(xy).\end{array}\right. \tag{2}$$

Transformons-la par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et en prenant le pôle à l'origine. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point transformé du point (x, y, z); on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{\mathrm{P}}{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

en tirant de ces égalités les valeurs de x, y, z et les portant dans les équations (1) et (2), on aura celles de la transformée, et, en supprimant les accents, cette transformée sera représentée par

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{P}z}{x^2+y^2+z^2}=v,$$

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{P}^{2n+k}(x^2+y^2)^n}{(x^2+y^2+z^2)^{2n+k}}f_k(xy)\\ &\quad+\frac{\mathrm{P}^{2n+k-1}(x^2+y^2)^{n-1}}{(x^2+y^2+z^2)^{2n+k-1}}f_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\quad+\frac{\mathrm{P}^{n+k+1}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{n+k+1}}f_{k+n-1}(xy\\ &\quad+\mathrm{F}_{k+n}\left(\frac{\mathrm{P}x}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\mathrm{P}y}{x^2+y^2+z^2}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (3) représente la sphère transformée du plan de la courbe; l'équation (4), qui est la seconde des équations de la transformée, peut être remplacée par une combinaison d'elle-même et de l'équation (3). De l'équation (3) on tire

$$\frac{\mathrm{P}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{v}{z}, \quad x^2+y^2=z\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), elle devient, après réductions,

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} &v^{2n+k}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right)^n f_k(xy)\\ &\quad+v^{2n+k-1}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right)^{n-1}f_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\quad+v^{n+k+1}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right)f_{k+n-1}(xy)\\ &\qquad\qquad+z^{n+k}\mathrm{F}_{n+k}\left(\frac{vx}{z}\,\frac{vy}{z}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est du degré $n + k$; prise avec l'équation (3), elle représente la transformée cherchée, qui est en conséquence du degré $2(n + k)$; mais, comme la courbe représentée par les équations (1) et (2) se reproduit par rayons vecteurs réciproques, il en sera de même de sa transformée; cette transformée sera donc située sur un cône ayant pour directrice une courbe du degré $2(n + k)$, et, comme chaque génératrice de ce cône rencontre sa directrice en deux points, son équation sera du degré $n + k$, ce qui démontre le théorème énoncé.

On déduit facilement des conditions que nous avons trouvées, pour qu'une courbe plane se reproduise par rayons vecteurs réciproques, le moyen de reconnaître si une courbe donnée par son équation jouit de cette propriété. On reconnaît aussi d'après ces conditions, et ce qui était facile à prévoir, que le système des tangentes en un des pôles de reproduction se confond avec le système des parallèles aux asymptotes menées par ce point.

Plusieurs des propositions que nous avons démontrées s'étendent aux figures de l'espace; nous n'en donnerons pas la démonstration, qui ne serait qu'une reproduction de ce qui précède.