Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 235-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__235_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 28

(voir 1re série, t. I, p. 247);

PAR M. H. BROCARD.

Parmi les m quantités a_1, a_2, a_3, ..., a_m, il y a n quantités négatives. Combien y a-t-il de termes négatifs dans le développement de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^\mu$, μ étant un nombre entier positif?

Il est évident que l'on ne changera rien au développement en réunissant les n termes négatifs et les $(m - n)$ ou p termes positifs. Désignons par N et P les deux groupes ainsi obtenus; nous aurons

$$(P - N)^\mu = P^\mu - C_\mu^1 N P^{\mu-1} + C_\mu^2 N^2 P^{\mu-2} - C_\mu^3 N^3 P^{\mu-3} + \ldots + (-1)^\mu C_\mu^\mu N^\mu,$$

et le nombre des termes négatifs du développement sera la somme des nombres de termes des produits de la forme $N^{2k+1} P^{\mu-2k-1}$. Or, dans le développement de la puissance n d'un polynôme de a lettres, chacun des termes peut être considéré, à un facteur près, comme une des combinaisons avec répétition, n à n, des a lettres qui composent ce polynôme. Ainsi le nombre des termes de son développement est exprimé par

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Le nombre des termes de N^{2k+1} est donc

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{1.2.3\ldots(2k+1)},$$

et celui de $P^{\mu-2k-1}$ est

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+\mu-2k-2)}{1.2.3\ldots(\mu-2k-1)}.$$

Ainsi le nombre des termes cherchés a pour expression

$$\sum \frac{n(+1)(n+2)\ldots(n+2k)p(p+1)(p+2)\ldots(p+\mu-2k-2)}{1.2.3\ldots(2k+1)\,1.2.3\ldots(\mu-2k-1)}.$$

On s'arrêtera évidemment à la première valeur de k, qui rendrait cette expression négative.

Question 900 (*)

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 45);

PAR M. L. BOURGUET.

Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée, de manière à toucher cette parabole en deux points. Trouver le lieu décrit par le centre de l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact. (DAUPLAY.)

Soit β l'ordonnée du milieu de la corde des contacts; rapportons la parabole à la tangente parallèle à cette corde et à son diamètre. Soit

$$x - \alpha_1 = 0$$

l'équation de la corde, l'équation de la parabole sera

$$(1) \qquad y^2 = 2\frac{p^2+\beta^2}{p}\cdot x.$$

Soit X l'abscisse du centre de l'ellipse; les coordonnées des points de contact devront satisfaire à la relation

$$(2) \qquad \frac{2(p^2+\beta^2)\alpha_1}{pb'^2} + \frac{(X-\alpha_1)^2}{a'^2} = 1.$$

(*) Des fautes de calcul se sont glissées dans la solution de la question 900, insérée tome XIII, pages 425-431.

De plus, on a

$$(X - \alpha_1)(X + \alpha_1) = a'^2,$$

ou

(3) $$X^2 - \alpha_1^2 = a'^2.$$

Si, entre les équations (2) et (3), nous éliminons α_1, nous aurons

(4) $$\left(\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2}\right)\left(\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2} - \frac{2X}{a'^2}\right) + \frac{1}{a'^2} = 0.$$

D'autre part, on a

$$X = \alpha - \frac{\beta^2}{2p} = \frac{2p\alpha - \beta^2}{2p}.$$

Portant cette valeur dans (4), il vient

(5) $$p^2 b'^4 - pb'^2(p + 2\alpha)(p^2 + \beta^2) + (a^2 + b^2)(p^2 + \beta^2)^2 = 0;$$

mais le théorème d'Apollonius donne

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 \frac{p^2}{p^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

d'où

(6) $$p^2 b'^4 - p^2(a^2 + b^2) b'^2 + a^2 b^2 (p^2 + \beta^2) = 0.$$

Eliminons b' entre les équations (5) et (6), nous aurons

(7) $$\left\{\begin{aligned} &[p(a^2 + b^2) - (p + 2\alpha)(p^2 + \beta^2)] \\ &\quad \times [p(a^2 + b^2)^2 - (p + 2\alpha) a^2 b^2] \\ &\quad + [(a^2 + b^2)(p^2 + \beta^2) - a^2 b^2]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation de la courbe. On voit qu'elle est symétrique par rapport à l'axe de la parabole et qu'elle coupe chaque diamètre de la parabole en deux points réels ou imaginaires. La génération même de cette courbe et une discussion très-simple de l'équation (7) font voir qu'elle se compose d'une boucle et non de branches infinies.

Entre (3) et (4) éliminons X, il vient

$$\frac{pb'^2}{a'^2(p^2+\beta^2)} - \frac{p^2+\beta^2}{pb'^2} = \pm\frac{2\alpha_1}{a'^2} = \pm\frac{\beta^2-2p\alpha}{pa'^2}.$$

(α et β sont ici les coordonnées du pôle de la droite des contacts.)

De cette équation, on tire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & p^2b'^4 + b'^2(p^2+\beta^2)(p^2+\beta^2) \\ & \qquad \mp(\beta^2-2p\alpha) - (a^2+b^2)(p^2+\beta^2)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant b'^2 entre cette dernière équation et l'équation (6), on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & \{(p^2+\beta^2)[(p^2+\beta^2)\mp(\beta^2-2p\alpha)] + p^2(a^2+b^2)\} \\ & \quad \times \{a^2b^2[(p^2+\beta^2)\mp(\beta^2-2p\alpha)] + (a^2+b^2)p^2\} \\ & \qquad + p^2[(a^2+b^2)(p^2+\beta^2) + a^2b^2]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation de la polaire réciproque de l'enveloppe de la corde des contacts.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Questions 1161 *et* 1162

(voir 2e série, t. XIV, p. 96);

PAR MM. H. GARRETA ET L. GOULIN,

Élèves en Mathématiques spéciales au lycée Corneille, à Rouen (classe de M. Vincent).

1161. *Si d'un point* M *pris sur une branche d'hyperbole on mène une tangente* MT *au cercle bitangent à la courbe selon son axe transverse, et si, du même point* M, *on mène une parallèle à l'asymptote jusqu'à son point d'intersection* Q *avec l'axe transverse de l'hyperbole, le triangle* MPQ *est isoscèle.*

(L.-A. LEVAT.)

Soient x', y' les coordonnées du point M; l'hyperbole étant rapportée à ses axes, le carré de la tangente

MT est égal à $x'^2 + y'^2 - a^2$, ou, parce que $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, on a $\overline{MT}^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) y'^2$.

D'autre part, si l'on désigne par MP l'ordonnée y' du point M, le triangle rectangle MQP donne

$$\overline{MQ}^2 = \frac{\overline{MP}^2}{\sin^2 MQP} = \frac{y'^2}{\sin^2 MQP}.$$

Mais, la droite MQ étant parallèle à une asymptote, $\sin MPQ = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; donc

$$\overline{MQ}^2 = y'^2 \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) = MT^2.$$

C. Q. F. D.

1162. *Construire une hyperbole, connaissant l'axe transverse* AA' *et un point* M *de la courbe.*

(L.-A. Levat.)

La construction se déduit de la propriété précédente. Il suffit de déterminer les asymptotes.

Pour cela, sur AA' comme diamètre je décris une circonférence, à laquelle je mène une tangente MT du point M, et, avec MT pour rayon, je décris du point M, comme centre, une circonférence qui coupe la droite AA' en des points Q, Q'. En menant par le milieu de AA' des parallèles aux droites MQ, MQ', on aura les asymptotes de l'hyperbole. On est ainsi ramené à un problème connu.

Note. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Auguste Morel; Jacob, elève de Mathematiques speciales au lycee de Dijon (classe de M. Marguet); B. Launoy; F. Pitois et Richard, elèves du college d'Annecy; H. Lemelle, à Poitiers; Moret-Blanc; Lez; Brocard; Gambey; Desportes, elève de première année de la classe de Mathematiques speciales du lycee d'Angers (classe de M. Bouché); Edmond de Zeomare; Denoyelle et Georges Vandaine, elèves à l'institution Sainte-Geneviève; Moreau; Étienne Gatti, étudiant à l'Université de Turin; Chadu; Guillaume Suppan, repétiteur à l'École Polytechnique à Budapest.