Nouvelles annales de mathématiques

A. Allaretti

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 227-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__227_1>

QUESTION D'EXAMEN

(voir 2e série, t. XIII, p. 576);

PAR M. A. ALLARETTI,
Étudiant en Mathématiques à Florence.

En désignant par m une quantité positive, la substitution de $z = x^m$ *dans l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ *donne le résultat*

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx;$$

on a de même, par le changement de m en n,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx;$$

en sorte que l'on serait conduit à conclure que la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\right)$ *est nulle.*

Or cette conclusion est inadmissible, car on sait, à n'en pas douter, que l'on a

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{\log x}\right) dx = \log\frac{m}{n}.$$

En quoi consiste le paralogisme ? (S. REALIS.)

Il est facile, ce me semble, de répondre à cette question.

Dans les équations

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx,$$

les deux premiers membres ne peuvent être supposés égaux, z n'étant pas une variable *indépendante,* mais une fonction de x, qui est x^m dans la première équation, et une fonction différente de x ($z = x^n$) dans la seconde, en admettant l'inégalité des exposants m et n.

Sans cette considération relative à la variable indépendante, on pourrait arriver à une foule de conclusions du genre de celle qui est rapportée par M. Realis.

Si, par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 dz$, on pose $z = ax$, il vient

$$\int_0^1 dz = a\int_0^1 dx = ax.$$

On a de même, pour $z = bx$,

$$\int_0^1 dz = b\int_0^1 dx = bx.$$

On en conclurait

$$(b-a)\int_0^1 dx = 0, \quad \text{d'où} \quad b - a = 0,$$

c'est-à-dire que deux nombres quelconques b et a seraient toujours égaux entre eux.

Note. — MM. de Virieu et Moret-Blanc trouvent que le paralogisme dont il s'agit consiste à admettre, sans restriction, l'égalité $\infty = \infty$.