H. Jacob

Solution de la question de géométrie analytique proposée au concours d'admission à l'École normale supérieure (année 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 222-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__222_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1874);

PAR M. H. JACOB,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1° *Par les trois sommets d'un triangle rectangle on fait passer des paraboles; on mène à ces paraboles des* *tangentes parallèles à l'hypoténuse du triangle donné : on demande le lieu des points de contact.*

2° *Le lieu cherché est une conique qui coupe chacune des paraboles en quatre points : on demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les sécantes communes qui ne passent pas par l'origine.*

1° Soient AOB le triangle rectangle donné ; C le milieu de l'hypoténuse AB ; et $OA = a$, $OB = b$ les côtés de l'angle droit.

Prenons pour axes des x et des y les droites OA, OB. Les points A et B auront, respectivement, pour coordonnées, $x = a, y = 0$ et $x = 0, y = b$. L'équation *générale* des paraboles qui passent par les trois sommets O, A, B du triangle OAB sera

$$(1) \qquad A^2 y(y-b) + 2Axy + x(x-a) = 0,$$

où A désigne un paramètre arbitraire.

Le point de contact d'une tangente parallèle à AB menée à l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB se trouve sur le diamètre de cette courbe, qui passe par le milieu C de AB, dont les coordonnées sont $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. En outre ce diamètre a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{A}$; son équation est donc

$$y - \frac{b}{2} = -\frac{1}{A}\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ou

$$(2) \qquad 2y - b = -\frac{1}{A}(2x - a);$$

par conséquent, les coordonnées du point de contact d'une tangente parallèle à AB devront satisfaire à la fois aux équations (1) et (2). Il s'ensuit que, pour obtenir l'équation du lieu de ce point de contact, il suffit d'éliminer le coefficient variable A entre les équations (1) et (2).

L'équation (2) donne $A = -\left(\frac{2x-a}{2y-b}\right)$; et, en substituant cette valeur à A, dans l'équation (1), on a

$$y(y-b)(2x-a)^2 - 2xy(2x-a)(2y-b) + x(x-a)(2y-b)^2 = 0.$$

En transportant les axes de coordonnées au point C, l'équation précédente devient d'abord

$$x^2\left(y^2-\frac{b^2}{4}\right) - 2xy\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(y+\frac{b}{2}\right) + y^2\left(x^2-\frac{a^2}{4}\right) = 0$$

et se réduit à

$$(ay+bx)(4xy+ay+bx) = 0,$$

équation qui se décompose en les deux suivantes :

$$ay+bx=0 \quad \text{et} \quad 4xy+ay+bx=0.$$

La première représente la droite AB, qui peut être considérée comme faisant partie du lieu cherché, lorsque l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB se compose du système de la droite AB et de la droite menée par le point O, parallèlement à AB.

L'équation $4xy+ay+bx=0$ représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, c'est-à-dire aux droites OA, OB. Cette hyperbole passe par les points C et O; elle a pour tangentes en ces points la droite AB et la parallèle à AB menée par le point O; son centre est au milieu de la droite OC (*).

(*) Lorsqu'on mène a une parabole circonscrite à un triangle quelconque AOB une tangente parallèle a l'un des trois côtes AB du triangle, le diamètre de la parabole, qui passe par le point de contact de la tan-

2° Pour déterminer le lieu décrit par le centre de gravité d'un triangle dont les sommets soient trois points autres que O et communs à l'hyperbole dont l'équation est $4xy + ay + bx = 0$ et à l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB, nous transporterons les axes de coordonnées au centre de cette hyperbole, qui a pour coordonnées, par rapport aux axes passant par le point C, $x = -\frac{a}{4}, y = -\frac{b}{4}$.

Au moyen de cette transformation, l'équation

$$4xy + ay + bx = 0$$

se réduit à

$$(3) \qquad 4xy = \frac{ab}{4},$$

et l'équation (1) des paraboles circonscrites au triangle AOB devient

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A^2(4y + b)(4y - 3b) \\ \quad + 2A(4x + a)(4y + b) + (4x + a)(4x - 3a) = 0. \end{array} \right.$$

Les ordonnées des quatre points d'intersection de l'hyperbole et de l'une quelconque des paraboles représen-

---

gente et par le milieu C du côté AB, rencontre toujours les deux autres côtés OA, OB du triangle, suffisamment prolongés, en deux points équidistants du point de contact de la tangente. De cette proposition, qu'il est facile de démontrer, résulte que le lieu des points de contact des tangentes menées aux différentes paraboles circonscrites au triangle AOB, parallèlement au côté AB, est le même que le lieu des milieux des droites menées du point C et limitées à la rencontre des côtés OA, OB indéfiniment prolongés dans les deux sens. Or ce dernier lieu géométrique est, comme on sait, une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux côtés OA, OB, qui a pour centre le milieu de la droite OC et passe par les points O et C; donc cette hyperbole est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à AB menées aux paraboles circonscrites au triangle AOB. Quand l'angle AOB est droit, l'hyperbole est équilatère.

(G.)

tées par l'équation (4) sont les racines de l'équation résultant de l'élimination de x entre les équations (3) et (4). En écartant la solution $4y + b = 0$, qui donne l'ordonnée du point O, l'élimination de x conduit à

$$(5) \quad 64A^2y^3 - 16(3A^2b - 2Aa)y^2 + 4a(2Ab - 3a)y + a^2b = 0.$$

Les racines y', y'', y''' de cette dernière équation sont les ordonnées des trois sommets du triangle formé par les sécantes communes à l'hyperbole et à la parabole, et qui ne passent pas par le point O. La somme de ces trois racines est, d'après une relation connue, $\frac{3Ab - 2a}{4A}$. On aura donc, en désignant par y l'ordonnée du centre de gravité du triangle,

$$(6) \qquad 3y = \frac{3Ab - 2a}{4A}.$$

L'abscisse de ce centre de gravité s'obtient par un calcul semblable. En éliminant y entre les équations (3) et (4) et supprimant la solution $(4x + a) = 0$, qui donne l'abscisse du point O, on trouve

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 64x^3 - 16(3a - 2Ab)x^2 \\ \quad + 4A(2ab - 3Ab^2)x + A^2ab^2 = 0. \end{array} \right.$$

La somme $x' + x'' + x'''$ des trois racines de l'équation (7) est égale à $\frac{3a - 2Ab}{4}$ (*); par conséquent, si x

(*) La valeur de $x' + x'' + x'''$ se déduit simplement des équations (3) et (6), car l'équation (3) donne $x' + x'' + x''' = \frac{ab}{16}\left(\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} + \frac{1}{y'''}\right)$ et l'équation (5) $\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} + \frac{1}{y'''} = \frac{4(3a - 2Ab)}{ab}$; d'où

$$x' + x'' + x''' = \frac{ab}{16} \times \frac{4(3a - 2AB)}{ab} = \frac{3a - 2Ab}{4}.$$

(G.)

désigne l'abscisse du centre de gravité, on a

$$(8)\qquad 3x = \frac{3a - 2Ab}{4}.$$

Pour obtenir maintenant l'équation du lieu cherché, il suffit d'éliminer le paramètre variable A entre les équations (6) et (8) : on trouve ainsi

$$9(4x - a)(4y - b) - 4ab = 0;$$

en transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point C, cette équation se réduit à $36xy - ab = 0$; on voit qu'elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux droites OA, OB, et qui a pour centre le point C.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Tourrettes.