Nouvelles annales de mathématiques

Ch.-Ph. Cahen

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 21-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__21_1>

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS ;

PAR M. CH.-PH. CAHEN.

Steiner a énoncé (sans démonstration) un certain nombre de propriétés de l'*hypocycloïde à trois rebroussements*.

Cette courbe est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule intérieurement, sans glisser, sur la circonférence d'un cercle de rayon triple.

Une démonstration de ces propriétés a été publiée par M. Cremona dans le *Journal de Crelle* (année 1865, p. 101).

On trouve dans le Mémoire de M. Cremona (p. 106, § 11) une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est présentée sous une forme un peu différente dans les *Nouvelles Annales* du mois de janvier 1869 (question 898).

Je rappelle ici la solution de cette question 898, et je vais montrer tout le parti qu'on peut en tirer pour démontrer par la Géométrie les propriétés démontrées par M. Cremona d'une autre manière.

Enfin j'appliquerai cette même méthode à la démonstration de la question 868 proposée dans les *Nouvelles Annales* du mois de mai 1868.

I. On donne un cercle C (*fig.* 1) tangent à une droite D en O. D'un point M de la circonférence on mène MA perpendiculaire à D, et l'on prend AB = AO. On joint BM et l'on demande l'enveloppe de la droite BM quand le point M se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables (question 898).

Fig. 1.

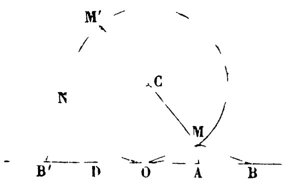
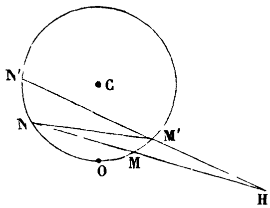


Fig. 2.



Remarquons d'abord que l'arc OM qui mesure l'angle en O du triangle isoscèle MOB est moitié de l'arc ON qui mesure l'angle M extérieur à ce triangle, ce qui montre que la question proposée revient à la propriété suivante énoncée par M. Cremona (*Journal de Crelle*, p. 106) :

Deux rayons CM, CN du cercle C tournent simultanément autour du point C, en sens opposé et avec la condition que leurs vitesses angulaires aient le rapport 1 : 2; trouver l'enveloppe de la corde MN (*).

Si l'on considère deux de ces cordes MN et M'N' (*fig.* 2) se coupant en H, le triangle M'NH, qui a deux angles égaux, est isoscèle, et par suite, lorsque les cordes MN, M'N' se rapprochent jusqu'à se confondre, on aura à la limite MN = MH.

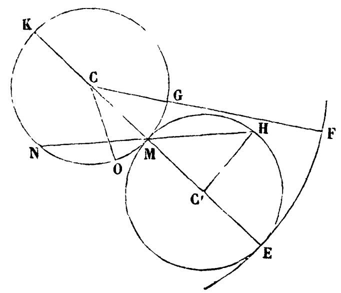
Cela résulte de ce que l'arc NN' est double de l'arc MM'.

(*) Voir *Crelle*, p. 117, § 33.

On est donc ramené à chercher le lieu du point H tel que MH = MN, l'arc ON étant double de l'arc OM.

Pour cela, il suffira de mener un cercle touchant en M (*fig.* 3) le cercle donné C et passant par le point H, de

Fig. 3.



prolonger le rayon CM en E où il rencontre cette seconde circonférence. Si, de C comme centre, on décrit l'arc EF qui sous-tend un angle $\widehat{OCF}$ tel que l'on ait $\widehat{OCG} = 60°$, on aura $ECF = 60° - \widehat{OCM}$.

D'autre part, l'arc EH = arc NK $= \frac{\pi}{2} - 3(OM)$; donc angle $3\,\widehat{ECF} = \widehat{ECH}$ et arc EF = arc EH.

Il résulte de là que, si l'on fait rouler sur le cercle CF le cercle C' qui le touche primitivement en F, ce point F du cercle C' viendra en H quand le contact des deux cercles se fera en E.

Le lieu du point H est donc l'hypocycloïde.

II. *Remarque*. — En se reportant à la *fig.* 2, on voit que, étant donnée une droite fixe coupant le cercle C aux points M et N, si une droite mobile qui coupe le cercle aux points M' et N' se déplace de manière qu'on ait constamment arc $NN' = 2$ arc MM', la droite $M'N'$ enveloppera une hypocycloïde qu'elle touche au point H tel que $M'H = M'N'$.

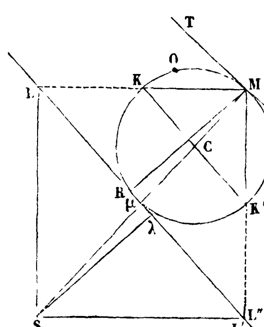
III. *Lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde* (*).

Reportons-nous à la *fig.* 1.

Soit $M'B'$ la tangente à l'hypocycloïde qui passe par le point M' diamétralement opposé à M; les angles $M'OB'$, MOB étant complémentaires, les angles $M'B'O$, MBO respectivement égaux aux précédents le seront aussi: donc les tangentes MB, $M'B'$ à l'hypocycloïde sont perpendiculaires et se coupent sur la circonférence C qui est le lieu cherché.

IV. *Du point* M *situé sur le cercle* C (*fig.* 4), *on peut*

Fig. 4.



mener à l'hypocycloïde trois tangentes dont deux sont rectangulaires.

Soit MR celle de ces tangentes qui fait avec les deux autres des angles aigus, MT une tangente au

(*) *Crelle*, p. 103, § 6.

cercle C; si MK est bissectrice de l'angle $\widehat{RMT}$, comme arc OR = 2 arc OM, il en résulte arc OM = 2 arc OK, donc MK est une tangente à l'hypocycloïde; donc :

Si, par un point du cercle C, *on mène une tangente au cercle et trois tangentes à l'hypocycloïde, deux de ces tangentes sont les bissectrices des angles formés par la troisième et la tangente au cercle.*

V. Arc MK = arc KR (*fig.* 4) : donc MR est perpendiculaire à KC (*).

Il résulte de là que, MK, MK', MR étant trois tangentes menées par un point du cercle C à l'hypocycloïde, la parallèle RL à KK' touche l'hypocycloïde, parce que l'angle R est droit et que le cercle C est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

En prenant $\mu\lambda = \mu R$, on a le point de contact λ de cette tangente, et comme KL = KM, que K'L' = K'M, les points L, L' sont les points de contact des tangentes KL, K'L'.

Ainsi :

VI. *La droite* LL', *qui joint les points de contact* L, L' *de deux tangentes rectangulaires, est tangente à la courbe* (**).

VII. *La longueur* LL' *est constante et égale à quatre fois le rayon du cercle* C.

Réciproque du théorème VI :

VIII. *Les tangentes à l'hypocycloïde aux points* L, L', *où une tangente à cette courbe la rencontre, sont rectangulaires.*

(*) *Crelle*, p. 103, § 9.
(**) *Crelle*, p. 106, § 12.

Menons la tangente LM en L (*fig.* 4) à l'hypocycloïde et la tangente ML″ perpendiculaire à ML; la droite LL″ est tangente à l'hypocycloïde d'après le théorème VI, et comme, par un point L pris sur la courbe, on ne peut mener que deux tangentes LM et LL′, LL″ se confond avec LL′, et le point L″ avec le point L′, car $LL'' = LL'$.

IX. Si l'on achève le rectangle LML′S dont la diagonale MS passe par les points C et μ milieux des droites KK′, LL′, on a le théorème suivant :

Le lieu des intersections S *des normales rectangulaires est une circonférence qui a* C *pour centre et pour rayon* 3CM.

X. *Développée.* — Les trois normales SL, SL′, Sλ enveloppent évidemment une hypocycloïde inversement homothétique (le point C étant le centre d'homothétie) de celle qu'enveloppent leurs homologues MK, MK′, MR, c'est-à-dire que :

La développée de l'hypocycloïde est une hypocycloïde inversement homothétique à la première (C *est le centre d'homothétie*); *le rapport d'homothétie est* $\frac{1}{3}$.

Reportons-nous à la *fig.* 4, nous verrons que la parabole qui a S pour foyer et qui touche les droites ML, ML′ a pour tangente au sommet la droite LL′ qui passe par les pieds L et L′ des perpendiculaires abaissées du foyer S sur les tangentes ML, ML′; par suite, cette parabole a son sommet au point λ, où LL′ touche l'hypocycloïde.

Il résulte de là que :

XI. *Cette parabole enveloppe l'hypocycloïde elle-même ;*

XII. *Son axe enveloppe la développée de l'hypocycloïde ;*

XIII. *Son sommet* λ *décrit l'hypocycloïde ;*

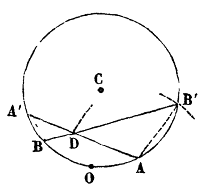
XIV. *Son foyer* S *décrit le cercle qui passe par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde ;*

Enfin :

XV. *Sa directrice est la parallèle menée par le point* M *à* LL', et, comme cette parallèle est symétrique de LL' par rapport au point C, *elle enveloppe une hypocycloïde symétrique par rapport au point* C *de celle qu'enveloppe* LL'.

XVI. Considérons deux tangentes AA', BB' (*fig.* 5) à l'hypocycloïde.

Fig. 5.



Soit arc OA $= \alpha$, et par suite arc OA' $= 2\alpha$; de même OB $= \beta$ et OB' $= 2\beta$. L'angle $\widehat{ADB'}$ a pour mesure

$$\text{arc}\,\frac{AB' + BA'}{2} = \text{arc}\,\frac{2\beta - \alpha + 2\alpha - \beta}{2} = \text{arc}\,\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

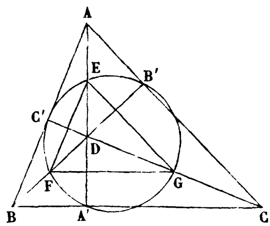
Les angles B' et A' ont aussi chacun pour mesure arc $\frac{\alpha + \beta}{2}$; donc *les triangles* DAB', DBA' *sont isoscèles.*

XVII. On voit par là que :

Étant donnée une tangente AA' à l'hypocycloïde et un point D sur cette tangente, pour mener par D une seconde tangente, il suffit de décrire du point A (le plus rapproché de O des deux points A, A') un arc de cercle de rayon AD qui coupe le cercle C au point B′; joignant B′D, on a une tangente BD à l'hypocycloïde.

XVIII. Soit AA′ (*fig.* 6) une tangente menée à l'hypocycloïde par un point arbitraire D.

Fig. 6.



Du point E où AA′ coupe le cercle C comme centre, décrivons avec ED comme rayon une circonférence qui coupe la circonférence C aux points B′ et C′; d'après ce qui a été dit (XVII), B′D et C′D seront des tangentes menées par le point D à l'hypocycloïde.

Ces deux tangentes coupent encore le cercle C en F et en G.

En se reportant au théorème XVI, on voit que les triangles FDA′, GDA′ sont isoscèles; donc FG est perpendiculaire au milieu de A′D; de même EF est perpendiculaire au milieu de C′D, et EG est perpendiculaire au milieu de B′D.

Il résulte de là que les parallèles menées aux côtés du triangle EFG respectivement par les points A′, B′, C′ forment un triangle ABC homothétique à EFG, le point d'intersection D des hauteurs du triangle EFG étant le centre d'homothétie, et, par suite, le triangle ABC a pour hauteurs celles du triangle EFG qui, comme on sait, touchent l'hypocycloïde.

Si, maintenant, on se reporte à la *fig.* 1, on voit que

MN étant une tangente à l'hypocycloïde, si l'on a

$$2 \operatorname{arc} OM = \operatorname{arc} ON,$$

c'est par le point N que passe la tangente perpendiculaire à MN.

Si, d'un autre côté, nous nous reportons à la *fig.* 5, nous verrons que, si l'on a $2 \operatorname{arc} OA = \operatorname{arc} OA'$, c'est du point A comme centre qu'on a décrit la circonférence qui sert à déterminer une nouvelle tangente BB'.

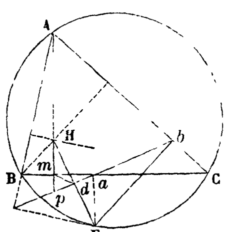
Comme, dans le problème actuel (*fig.* 6), nous avons décrit le cercle du point E comme centre, c'est la droite BC qui sera une tangente à l'hypocycloïde; il en sera de même de AB et de AC.

Donc :

Si trois tangentes à l'hypocycloïde passent par un même point, les tangentes perpendiculaires respectivement à celles-là forment un triangle dont les trois premières tangentes sont les hauteurs.

XIX. *D'un point quelconque* F *du cercle circonscrit au triangle* ABC, *abaissons des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle. On sait que les pieds de ces*

Fig. 7.



perpendiculaires sont en ligne droite; trouver l'enveloppe de cette droite (question 868) (*).

(*) Voir *Crelle*, p. 110, § 19, et *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 73, la solution de M. P. Serret.

La droite *ab* (*fig.* 7) qui joint les pieds des perpendiculaires est tangente au sommet d'une parabole inscrite au triangle ABC. Cette parabole a le point F pour foyer, et sa dircetrice passe par le point de concours H des hauteurs.

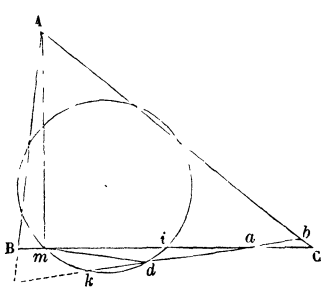
La droite HF rencontre *ab* en *d*, et le point *d* est le milieu de HC; donc les triangles *dp*H et *da*F sont égaux et $da = dp$.

Il résulte de là que le triangle *dam* est isoscèle.

Comme d'ailleurs le cercle des neuf points du triangle ABC passe par les milieux de HA, HB, HC, il passera aussi par le milieu *d* de HF.

On voit par là que ABC (*fig.* 8) étant le triangle donné, *m* le pied de la hauteur A*m*, *ad* une des droites

Fig. 8.



dont on cherche l'enveloppe et qui rencontre en *a* le côté BC et en *d* le cercle des neuf points, le triangle *adm* est isoscèle. Or l'angle *m* de ce triangle a pour mesure $\dfrac{\text{arc}\, di}{2}$, α l'angle en *a* a pour mesure $\dfrac{\text{arc}(mk - di)}{2}$; donc $\text{arc}\, mk = 2\, \text{arc}\, di$, donc la droite *ab* enveloppe une hypocycloïde circonscrite au cercle des neuf points et touchant les trois côtés et les trois hauteurs du triangle donné, ce qu'on pouvait prévoir en prenant le point F à un sommet ou au point diamétralement opposé à un sommet de ce triangle.

On voit aussi que l'hypocycloïde est l'enveloppe des tangentes au sommet des paraboles inscrites à un triangle (*).