NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Propriétés de la strophoïde. Démonstration d'un théorème de Poncelet. Propriétés de figures anallagmatiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 193-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__193_0>

PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOÏDE.

Démonstration d'un théorème de Poncelet. — Propriétés de figures anallagmatiques ;

PAR M. L. MALEYX.

(Suite d'un article précédent.)

Quelques jours avant la mort de mon regretté collègue et ami Gros, qui avait suivi avec intérêt mon travail sur la strophoïde, il voulut bien me communiquer le théorème suivant, que je me fais un devoir de rapporter ici, ainsi que la démonstration qu'il m'en donna :

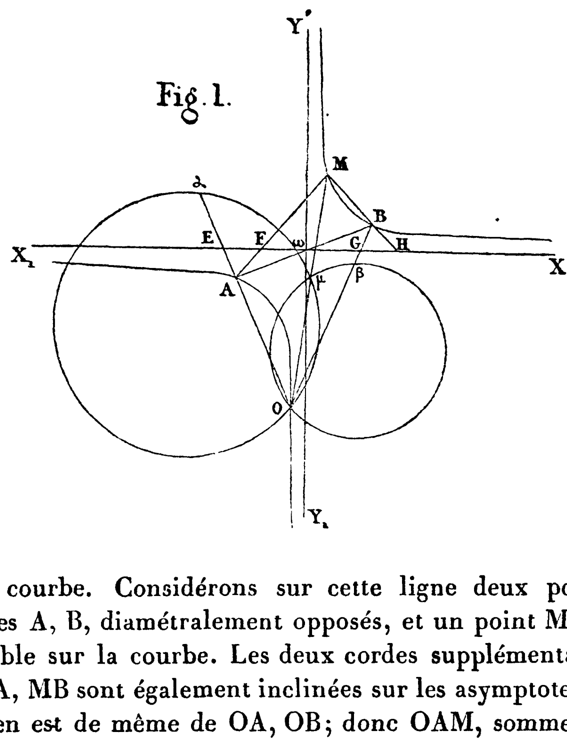
Si l'on donne dans une conique deux tangentes et une directrice, le lieu géométrique du foyer correspondant est une strophoïde dont le point double est au point de concours des deux tangentes ; les points de rencontre de ces tangentes et de la directrice en sont deux points correspondants.

Soient SA, SA_1 les deux tangentes coupant la directrice aux points A et A_1, F le foyer d'une des coniques répondant à l'énoncé, C, C_1 les points de contact avec les tangentes SA, SA_1 ; on sait que les droites FA, FA_1 sont respectivement perpendiculaires sur les droites FC, FC_1. La droite SF qui fait des angles égaux avec FC, FC_1 fait aussi des angles égaux avec les droites FA, FA_1, perpendiculaires à FC et FC_1. Le théorème est donc démontré.

Nous avons montré dans notre article précédent que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde, en prenant le point double pour pôle, est une hyperbole équilatère passant par le pôle, point transformé de celui qui est à l'infini; réciproquement, si l'on transforme une hyperbole équilatère par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle un point quelconque de la courbe, la transformée est une strophoïde.

Soit O (*fig.* 1) le pôle de transformation pris sur

Fig. 1.



la courbe. Considérons sur cette ligne deux points fixes A, B, diamétralement opposés, et un point M variable sur la courbe. Les deux cordes supplémentaires MA, MB sont également inclinées sur les asymptotes, et il en est de même de OA, OB; donc OAM, somme des angles MFX, OEX, est égal à OBM, somme des angles MHX_1, OGX_1. Soient actuellement α, β, μ les points transformés de A, B, M, respectivement; le point μ sera à l'intersection des deux cercles transformés des droites AM, BM; ces cercles passeront respectivement par les points O, α, O, β, et couperont les droites Oα, Oβ sous des angles égaux, puisqu'ils sont transformés de deux droites jouissant de cette propriété; le point μ décrira donc une strophoïde dont le point double sera en O, et dont les points α, β seront deux points correspondants.

Il résulte de là que deux points quelconques diamétralement opposés dans l'hyperbole ont pour transformés deux points correspondants de la strophoïde.

La direction de l'asymptote de la strophoïde est celle de la tangente à l'hyperbole en O; le foyer de la strophoïde étant le point correspondant de celui qui est à l'infini, on déduit de la proposition précédente qu'il est le point transformé de celui qui dans l'hyperbole est diamétralement opposé à O.

Les tangentes au point double sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, et l'on voit qu'elles sont également inclinées sur la direction asymptotique et le rayon qui va du point double au foyer.

Deux strophoïdes sont évidemment semblables quand les rayons allant de leurs points doubles à leurs foyers font respectivement des angles égaux avec leurs directions asymptotiques; elles ont alors, pour ainsi dire, la même figure. Si nous faisons mouvoir le point O sur toute l'étendue de la moitié de l'une des branches de l'hyperbole, l'angle de la direction asymptotique de la strophoïde transformée avec le rayon qui va du point double au foyer passera par tous les états de grandeur de zéro à un droit; la strophoïde transformée prendra donc toutes les figures qu'elle peut avoir.

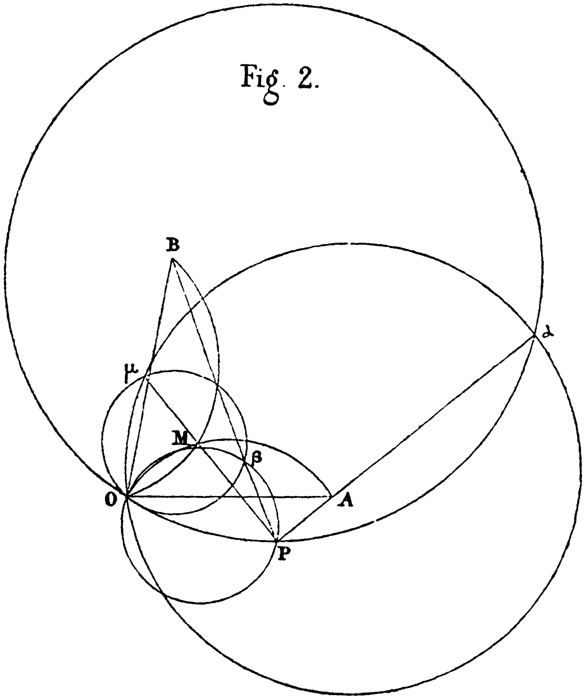
Quand le point O sera en un des sommets de l'hyperbole, la strophoïde sera rectangulaire. Si le point O s'éloigne indéfiniment, et qu'on accepte une puissance variable de transformation telle que le foyer reste à une distance constante du point double, la transformée finale se composera d'une circonférence de cercle et d'une droite passant par son centre, comme on s'en rend facilement compte au moyen du cercle de construction, si l'asymptote se rapproche indéfiniment du foyer.

Le diamètre AB de l'hyperbole se transforme en une circonférence passant par le point double de la strophoïde et deux points correspondants; le cercle passe en outre par le point fixe transformé du centre de l'hyperbole, et diamétralement opposé au point double de la strophoïde dans le cercle de construction; le diamètre AB de l'hyperbole coupant cette courbe en deux points et sous des angles égaux, le cercle transformé, passant par le point double de la strophoïde et deux points correspondants, y coupe cette courbe sous des angles égaux.

Nous avons démontré précédemment que la strophoïde se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôles les deux points correspondants principaux, et en une strophoïde égale quand le pôle est au foyer; nous allons maintenant établir que, si l'on transforme une strophoïde par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle un point quelconque de la courbe, la transformée est encore une strophoïde. Soient O (*fig.* 2) le point double d'une strophoïde A, B, deux de ses points correspondants supposés fixes, P un troisième point fixe de la courbe pris pour pôle, et M un point variable sur cette ligne. Le point M peut être considéré comme le point de rencontre de deux cercles passant respectivement par O et A, O et B, et coupant les droites OA, OB sous un même angle variable. Pour simplifier la figure, prenons pour puissance de transformation le carré de la distance PO; pour une autre puissance on obtiendrait une figure semblable.

Soient α, β, μ les points transformés de A, B, M; les droites OA, OB auront respectivement pour transformées les cercles OPα, OPβ; les cercles OMA, OMB seront transformés suivant les cercles O$\mu\alpha$, O$\mu\beta$ et couperont les cercles OPα, OPβ sous des angles égaux. Le lieu du point μ, transformé de M, est donc décrit par

Fig. 2.



l'intersection de deux cercles variables, passant respectivement par O et α, O et β, et coupant en α et β les cercles fixes OPα, OPβ sous des angles égaux; du reste, le pôle P étant une des positions du point M, le lieu du point μ aura un point à l'infini et un point double en O. Pour établir que le lieu du point μ est une strophoïde, il suffit de faire voir que, si on le transforme par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle en O, la transformée est une hyperbole équilatère passant par le point O, d'après le théorème précédent.

Or il est évident qu'il en est ainsi, car les quatre cercles $OP\alpha$, $OP\beta$, $O\mu\alpha$, $O\mu\beta$ se transformeront en quatre droites dont les deux premières sont fixes; les deux secondes couperont respectivement les deux premières aux points transformés de α et de β, et feront avec elles des angles égaux; elles feront alors avec la droite, unissant les points transformés de α et de β, deux angles ayant une différence constante : la transformée sera donc une hyperbole équilatère passant par O, puisque le lieu de μ a un point à l'infini.

Dans la transformation que nous venons de faire d'une strophoïde en une autre, les points transformés de deux points correspondants sont des points correspondants de la transformée.

Soient (*fig.* 3) O le point double d'une strophoïde; A, B deux de ses points correspondants; M, N deux autres points correspondants; transformons-la en prenant B pour pôle et $\overline{BO}^2$ pour puissance; soient μ, ν les points transformés de M, N.

L'une des tangentes au point double O est OX, bissectrice commune des angles BOA, MON; la tangente correspondant à la transformée en O est $O\xi$, faisant l'angle $BO\xi = BOX$. Pour vérifier la proposition, il suffit de montrer l'égalité des angles $\mu O\xi$, $\nu O\xi$. Or

$$\mu O\xi = BO\mu - BO\xi = BMO - BOX,$$
$$\nu O\xi = \nu OB + BO\xi = BNO + BOX;$$

mais

$$BMO - BOX = BNO + BOX,$$

car

$$BMO - ONB = 2\,BOX,$$

puisque dans le quadrilatère SMTN

$$BMO - ONB = 2 - \frac{M+N}{2} = \frac{S+T}{2},$$

et l'on sait que, dans un quadrilatère, l'angle des bissectrices des angles formés par deux côtés opposés est la demi-somme des deux angles opposés du quadrilatère.

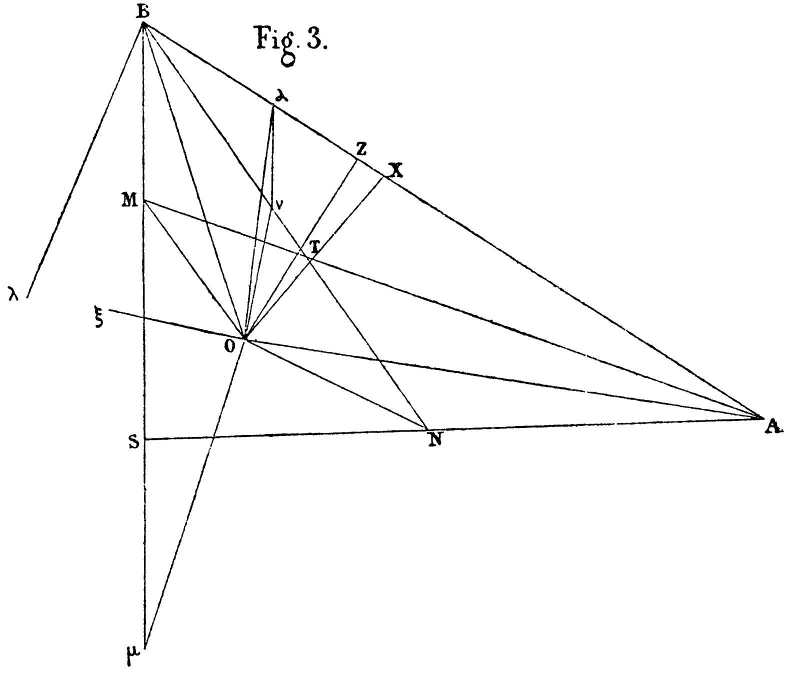


Fig. 3.

Nous avons vu que la tangente à la première strophoïde en B est la droite symétrique par rapport à BO de la droite BA qui joint B à son correspondant; soit Bλ cette tangente, ce sera la direction asymptotique de la strophoïde transformée : le point transformé de B étant à l'infini, le foyer de la seconde strophoïde sera le transformé α de son correspondant A. C'est, comme nous l'avons vu, l'angle des droites $O\alpha$, $B\lambda$ qui caractérise la forme ou figure de la strophoïde transformée : évaluons cet angle.

En menant par α une parallèle à $B\lambda$, on voit que l'angle cherché, que nous désignerons par ω, est égal à

$$\omega = O\alpha B - (2 - \lambda B\alpha) = BOA - (2 - 2OBA)$$
$$= 2 - (OBA + OAB) - (2 - 2OBA),$$
$$\omega = OBA - OAB.$$

Or dans le triangle BOA, dont OX est bissectrice,

$$OBA + BXO = OAB + 2 - BXO,$$

d'où

$$OBA - OAB = 2(1 - BXO);$$

donc

$$\omega = 2(1 - BXO).$$

Projetant le point O sur AB, par la perpendiculaire OZ, Z sera un point de la strophoïde, et nous aurons

$$\omega = 2ZOX.$$

On voit par là que la forme de la strophoïde transformée reste la même si nous prenons successivement pour pôles de transformation deux points correspondants; nous en avons une vérification dans la transformation en prenant pour pôles les deux points correspondants principaux.

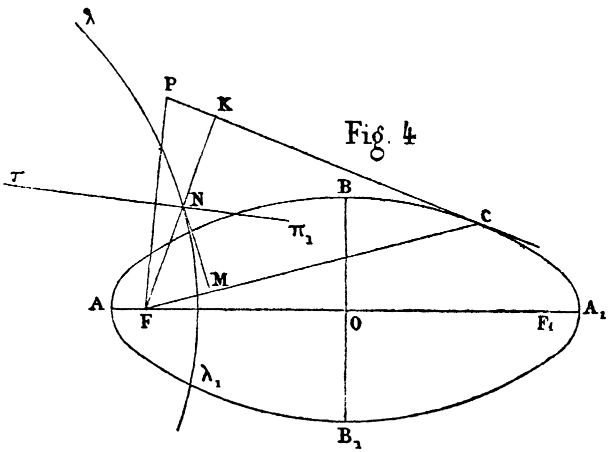
La forme de la transformée est définie par l'angle ZOX; chaque droite passant par le point double O, ne rencontrant la courbe qu'en un autre point, il suffira de faire varier ZOX de zéro à deux droits, pour avoir toutes les transformées; chaque position de OZ dans cet intervalle fournira deux points correspondants, réels ou imaginaires, donnant la même forme. Si ZOX varie de zéro à deux droits, ω variera de zéro à quatre droits, et l'angle aigu caractérisant la forme de la transformée passera quatre fois par le même état de grandeur : il existe donc en général huit points d'une strophoïde pour lesquels elle se transforme en une strophoïde de même forme. Ces huit points peuvent se construire avec la règle et le compas, pour une forme donnée définie par une valeur de ω; il suffira pour cela de faire ZOX égal à l'une des valeurs $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\pi-\frac{\omega}{2}$, de déterminer le point Z situé sur chacun de ces rayons, d'élever en chaque point, tel que Z, une perpendiculaire à OZ, et de déterminer les points communs de cette droite et de la strophoïde, ce qu'on sait faire. On voit facilement, d'après cette construction, que quatre seulement des huit points dont on vient de parler sont réels, et que ces quatre points existent toujours. En effet, pour que la perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon OZ rencontre la strophoïde en deux autres points réels, il faut et il suffit que le rayon OZ soit moins long que le rayon dirigé du point O vers le point correspondant de Z, ce qui n'a lieu que si le point Z est situé sur la boucle de la strophoïde.

On retrouve ainsi les trois points pour lesquels nous avons vu que la strophoïde se transformait en elle-même ou en une strophoïde égale, et un quatrième point correspondant du foyer qui est à l'infini.

Il n'y a que deux points pour lesquels la strophoïde se transforme en une strophoïde rectangulaire; dans ce cas le nombre des solutions devient deux fois moindre, parce que $\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$.

Il résulte des considérations précédentes que l'hyperbole équilatère transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde peut être considérée comme une strophoïde dont le point double est à l'infini. On voit du reste directement qu'il en est ainsi, puisque les angles des deux cordes supplémentaires issues des extrémités d'un diamètre fixe admettent pour bissectrices des parallèles aux asymptotes. De plus, à toute manière d'engendrer une hyperbole équilatère par intersection de lignes ou par enveloppe correspond une manière analogue d'engendrer une strophoïde.

Considérons une suite de coniques ayant pour foyers communs F et F_1 (*fig.* 4); soit ABA_1B_1 l'une d'elles,



menons-lui la tangente PC du point fixe P; quand la conique variera, le point C décrira une strophoïde. Formons la figure polaire réciproque en prenant pour centre du cercle directeur le foyer F, la courbe polaire réciproque de ABA_1B_1 sera le cercle $\lambda\lambda_1$ transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point K, projection du foyer F sur la tangente PC (théorème III, corollaire I de notre précédent article); le pôle de la droite PC sera à l'intersection N du cercle $\lambda\lambda_1$ et de la polaire $\pi\pi_1$ du point P. La polaire du point C est la tangente NM au cercle $\lambda\lambda_1$ menée en N; si R est le rayon du cercle directeur, $FM \times FC = R^2$, et le lieu du point M, transformé par rayons vecteurs réciproques de la strophoïde décrite par le point C et passant par le pôle F, est une strophoïde. Les cercles, tels que $\lambda\lambda_1$, sont transformés par rayons vecteurs réciproques d'une série de cercles concentriques, ils ont même axe radical avec le point F qui est le transformé de celui dont le rayon est infini; en effet ces cercles transformés coupent orthogonalement les cercles transformés de deux diamètres quelconques des cercles concentriques, et l'on sait que tous les cercles qui en coupent orthogonalement deux autres ont pour axe radical commun la ligne des centres des deux cercles fixes.

Il résulte de ce qui précède que si l'on considère une suite de cercles ayant un même axe radical avec un point, qu'on projette ce point sur les tangentes aux cercles de la suite, menées à leurs points communs avec une droite fixe, le lieu de ces projections sera une strophoïde.

Le théorème I de notre précédent article prend, par suite des conséquences que nous en avons déduites, un degré de généralité plus grand. On peut encore le démontrer généralement et directement de la manière suivante.

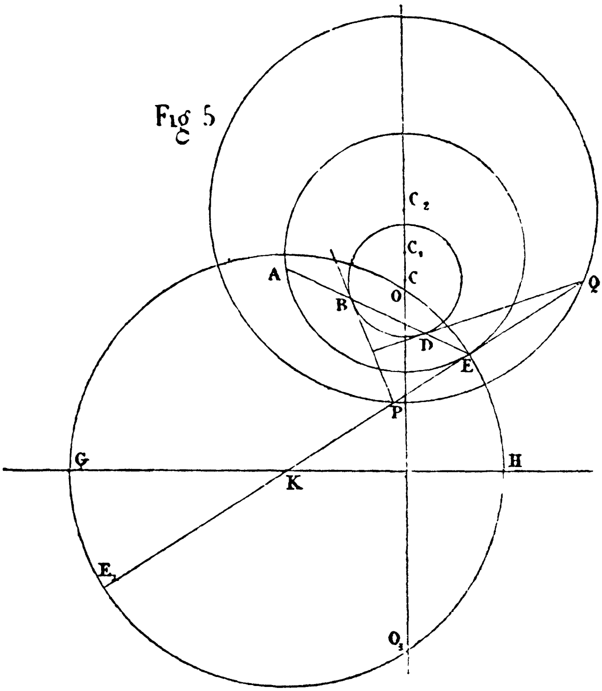
Soient C, C_1 (*fig.* 5) deux cercles quelconques ne se coupant pas, O, O_1 les deux points ayant avec eux même axe radical GH; coupons-les par la sécante ABDE, menons les tangentes BP, DQ, PEQ, les points P et Q appartiennent à un cercle ayant même axe radical avec les deux premiers, et les segments PE, EQ sont vus des points O et O_1 sous un même angle. En effet, les deux triangles QDE, PBE ont l'angle $D = B$, et les angles en E supplémentaires; il en résulte la proportion

$$\frac{QE}{QD} = \frac{PE}{PB}.$$

Donc les points P et Q appartiennent à un cercle C_2 ayant même axe radical avec les deux premiers.

Prolongeons PQ jusqu'à sa rencontre avec GH en K,

Fig 5



et du point K comme centre décrivons le cercle orthogonal ayant KE pour rayon; il passe par les deux points O et O_1; le cercle qu'on vient de construire étant orthogonal aux cercles C, C_1, C_2, on a

$$KP \times KQ = \overline{KE}^2.$$

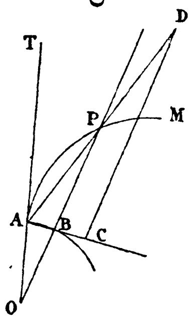
Les points E et E_1 sont donc conjugués harmoniques par rapport à P et Q; si maintenant on construit les rayons OE_1, OP, OE, OQ, le premier et le troisième étant rectangulaires, puisque l'angle E_1OE est inscrit dans un demi-cercle, OE_1 et OE sont les bissectrices des angles formés par OP et OQ. La même démonstration s'applique évidemment au point O_1.

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire la démonstration du théorème analogue au théorème IV de notre précédent article.

Une partie des considérations précédentes, jointes à quelques lemmes simples, nous ont conduit à une démonstration d'un théorème remarquable, dû à Poncelet, et dont il a aussi donné une démonstration géométrique. Nous allons exposer ici notre solution, à cause des rapports qu'elle présente avec les principes dont nous venons de faire usage.

Lemme I. — Soit (*fig.* 6) APM une courbe tangente à la droite OAT en A; faisons l'angle arbitraire TOP dont

Fig 6

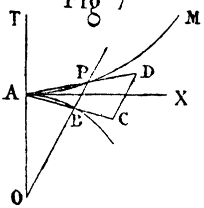


le second côté coupe la courbe en P, décrivons du point O comme centre avec OA pour rayon l'arc AB, et construisons la corde AB de cet arc; nous allons montrer que le rapport $\frac{PB}{AB}$ croît indéfiniment quand l'angle TOP tend vers zéro.

En effet, prenons sur AB la longueur fixe $AC = l$, puis par le point C menons CD parallèle à OP et limitée en D à la corde AP; on a $\frac{PB}{AB} = \frac{CD}{l}$. Or, quand TOP tendra vers zéro, APD prendra la direction de la tangente AT; ABC deviendra perpendiculaire à OT, et CD parallèle à OT croîtra au delà de toute limite : donc il en sera de même du rapport $\frac{CD}{l}$ et de son égal $\frac{PB}{AB}$.

Lemme II.—Soit (*fig.* 7) APM une courbe normale à la droite OAT en A; faisons l'angle arbitraire TOP

Fig 7

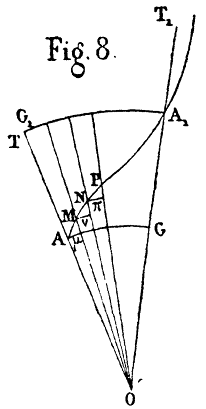


dont le second côté rencontre la courbe en P; décrivons du point O comme centre, avec OA pour rayon, l'arc AB, et construisons la corde AB de cet arc; nous allons montrer que le rapport $\frac{PB}{AB}$ tend vers zéro en même temps que l'angle TOP. En effet, prenons sur AB la longueur fixe $AC = l$; puis par le point C, menons CD parallèle à OP et limitée à la corde AP en D; on a $\frac{PB}{AB} = \frac{CD}{l}$. Or quand TOP tendra vers zéro, AD et AC devenant respectivement tangentes à la courbe APM et à l'arc AB se confondront suivant AX perpendiculaire à AT, CD parallèle à OT deviendra nulle : il en sera de même du rapport $\frac{CD}{l}$ et de son égal $\frac{PB}{AB}$.

Lemme III. — Il n'existe aucune courbe tangente à toutes les droites infiniment voisines issues du même point et comprises dans un angle donné.

En effet, s'il existait une telle courbe AMN... A_1 (*fig.* 8), tous ses points n'étant pas à l'infini, on pourrait toujours prendre dans l'intérieur de l'angle considéré deux droites OT, OT_1, se coupant en son sommet

Fig. 8.



et faisant un angle assez petit, quoique fini, pour que tous les rayons dirigés du point O vers les points de la courbe et compris dans l'angle TOT_1 soient finis et croissent quand le rayon s'écarte de la position OT pour se rapprocher de la position OT_1. Divisons l'angle TOT_1 en n parties égales, les rayons de divisions seraient tous tangents à la courbe en leurs points A, M, N, P, ..., A_1 communs avec cette ligne. Du point O comme centre avec des rayons respectivement égaux à OA, OM, ON, ..., décrivons les arcs AG, $M\nu$, $N\pi$, ..., et construisons leurs cordes; les rapports $\frac{M\mu}{\text{corde}\,A\mu}$, $\frac{N\nu}{\text{corde}\,M\nu}$, $\frac{P\pi}{\text{corde}\,N\pi}$, ..., croîtraient chacun au delà de toute limite avec n, d'après le lemme I, et il devrait en être de même du rapport formé en les ajoutant terme à terme, qui est compris entre le plus petit et le plus grand; mais ce dernier rapport est plus petit que le rapport $\frac{A_1 G}{\text{corde AG}}$ qui a même numérateur et un dénominateur plus petit, et qui est fini. Donc l'existence de la courbe est incompatible avec l'hypothèse.

Corollaire. — La seule ligne passant par un point extérieur au centre d'un système de cercles concentriques infiniment voisins, et qui les coupe tous orthogonalement, est la ligne droite qui unit ce point au centre.

Lemme IV. — Si toutes les normales à une courbe passent par un point fixe, cette courbe est un cercle dont le point fixe est le centre.

Soit (*fig.* 8) une courbe AMN... A_1, dont toutes les normales se coupent au point O; on établira que cette courbe est un cercle dont le centre est en O, en faisant voir que ces normales ne peuvent être inégales. Supposons que la courbe AA_1 admette des normales inégales; il faudra qu'en parcourant l'arc AA_1 les normales aillent en croissant ou en décroissant pendant un certain temps; admettons qu'en parcourant l'arc AA_1, qui peut être très-petit, mais fini, les normales aillent constamment en augmentant.

Divisons l'angle AOA_1 en n parties égales par les normales OM, ON, OP,...; du point O comme centre décrivons les arcs de cercle $A\mu$, $M\nu$, $N\pi$,... et construisons leurs cordes; décrivons encore du même centre l'arc A_1G_1 limité aux côtés de l'angle AOA_1. D'après le lemme II, les rapports $\frac{M\mu}{\text{corde } A\mu}$, $\frac{N\nu}{\text{corde } M\nu}$, $\frac{P\pi}{\text{corde } N\pi}$,... doivent tous tendre vers zéro quand n augmente indéfiniment : il doit en être de même du rapport formé en les ajoutant terme à terme, qui est compris entre le plus petit et le plus grand ; mais ce dernier rapport est supérieur au rapport $\frac{A_1 G}{\text{arc } A_1 G_1}$ qui a même numérateur et un dénominateur plus grand, et qui, d'après l'hypothèse, n'est pas nul ; donc les normales ne peuvent être inégales, et le lemme est démontré.

Corollaire. — La seule ligne passant par un point donné et coupant orthogonalement un système de droites infiniment voisines issues d'un point est une circonférence ayant ce point pour centre.

Le théorème de Poncelet, que nous avons en vue de démontrer, consiste en ce qui suit :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et que deux de ses côtés restent constamment tangents à deux cercles ayant avec le premier un même axe radical, le troisième côté reste aussi constamment tangent à un cercle ayant avec les précédents même axe radical.

Soient O, O′, O″ trois cercles ayant un même axe radical (*fig.* 9) ; ABC un triangle inscrit dans le cercle O″, et dont les côtés BC, BA sont respectivement tangents aux cercles O et O′ en P et Q : cherchons d'abord une propriété du point décrivant de l'enveloppe du côté AC. Pour cela, considérons le triangle dans une position voisine $A_1B_1C_1$: soient P_1, Q_1 ses points de contact avec les cercles O, O′ ; H, I, L les points de rencontre de deux positions du même côté ; quand A_1 viendra se confondre avec A, les points I et H se confondront avec P et Q respectivement, et le point L tendra vers une limite λ, qui est le point décrivant de l'enveloppe cherchée. De la similitude des triangles AA_1H, BB_1H ; BB_1I, CC_1I ; CC_1L, AA_1L on déduit

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AH}{HB_1},$$

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BI}{C_1I},$$

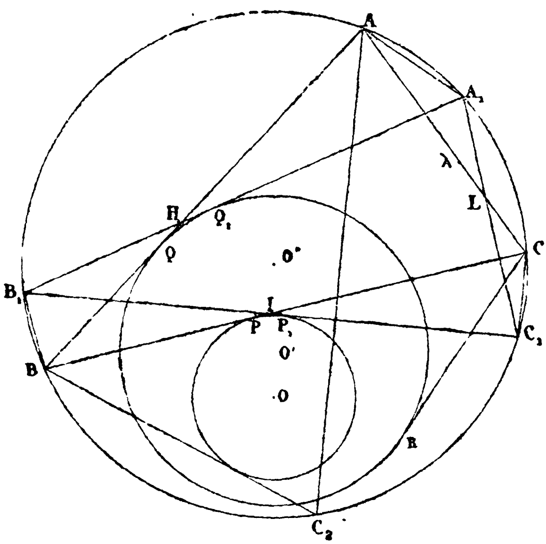
$$\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CL}{A_1L}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre et ramenant à la forme entière, on a

$$AH \times BI \times CL = HB_1 \times C_1I \times A_1L.$$

Supposons maintenant que A_1 vienne se confondre avec A;

Fig 9



il en sera de même de B_1 avec B, C_1 avec C, et l'on aura

$$AQ \times BP \times C\lambda = A\lambda \times CP \times BQ;$$

mais quand trois cercles ont un même axe radical, si d'un point pris sur l'un d'eux on mène des tangentes aux deux autres, elles sont dans un rapport constant; donc, si du point C nous menons CR tangent au cercle O', nous aurons

$$\frac{CR}{CP}=\frac{BQ}{BP},$$

ou

$$CR \times BP = CP \times BQ\,;$$

par comparaison de cette égalité avec la précédente, on conclut

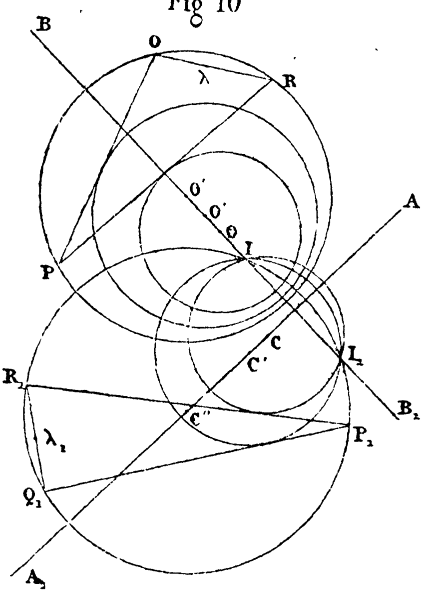
$$\frac{A\lambda}{C\lambda}=\frac{AQ}{CR}.$$

Donc, si l'on construisait un quatrième cercle ayant même axe radical avec les trois premiers et tangent à la droite AC, son point de contact serait au point λ, puisque ce point de contact doit diviser AC en segments proportionnels à AQ et CR.

Considérons maintenant la *fig.* 10 : soient O, O', O'' trois cercles ayant pour axe radical AA_1 ; I, I_1 les deux points ayant avec eux même axe radical; tous les cercles passant par I et I_1 coupent orthogonalement les cercles O, O', O'' et tous ceux qui ont avec eux même axe radical AA_1. Nous désignerons tous les cercles ayant même axe radical que O et O' par la dénomination des *cercles de la suite* (I), et ceux qui les coupent orthogonalement par *cercles de la suite* (R).

Inscrivons le triangle PQR dans le cercle O'', de manière que deux de ses côtés soient tangents aux cercles O et O', le troisième QR sera tangent à son enveloppe et à un cercle de la suite I en λ, et il en résulte qu'en ce point l'enveloppe de QR sera orthogonale au cercle de la suite (R) qui y passe. L'enveloppe de la droite QR sera donc une trajectoire orthogonale des cercles de la suite (R). De même, si nous considérons les trois cercles C, C′, C″ de la suite (R), que nous inscrivions dans le cercle C″ le triangle $P_1Q_1R_1$, dont deux côtés sont tangents aux cercles C et C′, nous verrons de la même manière que l'enveloppe du côté Q_1R_1 est une trajectoire orthogonale des cercles de la suite (I).

Fig 10



Si maintenant nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle en I, les cercles de la suite (R) se transformeront en un système de droites rayonnant autour du point transformé de I_1, et les cercles de la suite (I) se transformeront en cercles concentriques ayant pour centre le même point transformé de I_1. La transformée de l'enveloppe de la droite QR sera une courbe, donc toutes les normales concourront au point transformé de I_1; cette courbe sera donc une circonférence ayant le point transformé de I_1 pour centre (lemme IV), donc l'enveloppe de QR est un des cercles de la suite (I). La transformée de l'enveloppe de la droite Q_1R_1 sera une trajectoire orthogonale des cercles transformés de la suite (I) qui sont concentriques; ce sera donc un diamètre de ces cercles (lemme III, corollaire). Donc l'enveloppe de Q_1R_1 est un des cercles de la suite (R).

Reprenons notre sujet, et établissons quelques théorèmes généraux sur les figures qui ont la propriété de se reproduire par rayons vecteurs réciproques.

Théorème I. — *Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une figure assujettie à la seule condition d'être symétrique par rapport à un plan, la transformée aura la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques; le pôle de la seconde transformation est le point transformé du symétrique du pôle de la première, par rapport au plan de symétrie de la figure considérée; la puissance de la seconde transformation est positive. Si la figure considérée est plane, il suffit qu'elle ait un axe de symétrie; car le plan perpendiculaire au sien conduit suivant l'axe sera pour elle un plan de symétrie.*

Pour le montrer, considérons les deux points A, A_1 (*fig.* 11), symétriques par rapport au plan P et appartenant à une figure jouissant de la même propriété. Transformons cette figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le point O pour pôle. Soit O_1 le point symétrique de O par rapport au plan P; les points A, A_1 sont situés sur une circonférence ayant OO_1 pour diamètre; la droite AA_1 se transformera en une circonférence tangente à OO_1 en O; le cercle OA_1AO_1 se transformera en une droite passant par le point fixe ω, transformé de O_1 ; les points transformés de A et A_1 seront les intersections a, a_1 d'une droite passant en ω avec un cercle tangent à ωO en O; on aura donc

$$\omega a \times \omega a_1 = \overline{\omega O}^2,$$

égalité qui établit la proposition.

Remarque I. — Si le pôle O venait se placer dans le plan P, le point ω s'éloignerait à l'infini; une figure ayant un plan de symétrie peut donc être considérée comme se transformant en elle-même par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant à l'infini sur une perpendiculaire au plan de symétrie et la puissance de transformation étant infinie.

Remarque II. — Si une figure admet plusieurs plans de symétrie, une figure transformée de celle-là par rayons vecteurs réciproques se transformera en elle-même par rayons vecteurs réciproques par rapport à autant de points.

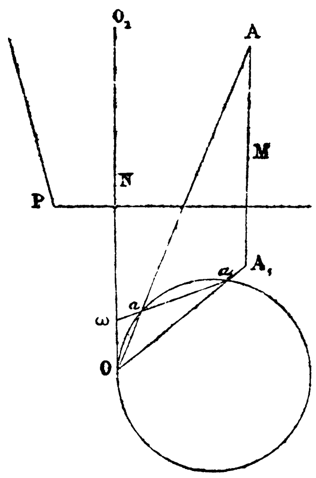
Si les plans de symétrie de la première figure se coupent en un même point, les symétriques du pôle de transformation O par rapport à ces plans seront sur une sphère passant par le point O et ayant pour centre le point commun des plans de symétrie; donc leurs transformés, qui sont les pôles de la seconde transformation, seront dans un même plan transformé de la sphère.

Si les plans de symétrie de la première figure se coupent suivant une droite, les pôles de la seconde transformation sont en ligne droite; ainsi, comme exemple, la surface transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface de révolution se transforme en elle-même par rapport à tous les points d'une droite perpendiculaire au plan méridien passant par le pôle de la première transformation.

Théorème II. — ***Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques suivant une puissance positive, on peut la transformer par rayons vecteurs réciproques en une seconde figure ayant tel plan qu'on voudra pour plan de symétrie.***

Soient a, a_1 (*fig.* 11) deux points correspondants

Fig. 11.



d'une telle figure, ω le pôle de transformation, k^2 la puissance; on a

$$\omega a \times \omega a_1 = k^2.$$

Soit encore P un plan quelconque : abaissons du point ω une perpendiculaire ωN sur ce plan, prenons sur elle $\omega O = k$, puis déterminons le point O_1 symétrique de O par rapport au plan, enfin transformons par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour pôle et pour puissance le produit $\omega O \times OO_1$.

Les deux points a, a_1 sont sur la droite $\omega a a_1$ et sur une circonférence tangente à $O\omega$ en O; la droite $\omega a a_1$ se transforme en une circonférence ayant pour diamètre OO_1 et son centre en N; la circonférence $O a a_1$ se transformera en une corde parallèle à OO_1 de la circonférence précédente, et dont en conséquence le milieu sera dans le plan P; les points A, A_1, respectivement transformés de a, a_1, seront symétriques par rapport au plan P.

Remarque. — Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques, et suivant des puissances positives par rapport à plusieurs pôles, si de plus les sphères décrites de ces pôles comme centre, avec des rayons respectivement égaux aux racines carrées des puissances correspondantes, se coupent en un même point, en prenant ce point pour pôle la figure se transformera par rayons vecteurs réciproques en une autre admettant autant de plans de symétrie qu'il y a de sphères passant par le point. Nous avons une application de cette remarque dans la transformation de la strophoïde en hyperbole équilatère. La strophoïde se transformerait encore, d'après la même remarque, en une courbe sphérique admettant deux plans de symétrie, si l'on prenait pour pôle un point quelconque de la circonférence de petit cercle commun aux deux sphères ayant pour centres les points correspondants principaux et passant par le point double. (*A continuer.*)