Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 183-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__183_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1137

(voir 2e série, t. XIII, p. 207),

PAR M. MORET-BLANC.

Deux hyperboloïdes gauches H_1, H_2 *ont une génératrice commune* L. *Par tout point m de* L *passent* *une génératrice* L_1 *de* H_1 *et une génératrice* L_2 *de* H_2. *Comment varie l'angle* $\widehat{L_1, L_2}$ *quand* m *parcourt* L?

(Dewulf.)

On sait qu'il existe sur la génératrice L deux points où les hyperboloïdes H_1, H_2 ont le même plan tangent. Je prends l'un de ces points pour origine, la génératrice L pour axe des z et le plan tangent commun pour plan des xz.

Les équations des deux hyperboloïdes seront de la forme

$$(H_1)\quad x(ax + by + cz) + y(ey + fz + g) = 0,$$

$$(H_2)\quad x(a_1x + b_1y + c_1z) + y(e_1y + f_1z + g_1) = 0.$$

Coupons le premier par le plan $y = mx$: la projection de l'intersection sur le plan des xz sera

$$x = 0,\quad (a + bm + em^2)x + (c + fm)z + gm = 0.$$

La seconde génératrice L_1 est à la distance de l'origine

$$z_1 = -\frac{gm}{c + fm},\quad \text{d'où}\quad m = -\frac{cz_1}{fz_1 + g}.$$

Les cosinus des angles que cette génératrice fait avec les axes sont proportionnels à

$$1,\quad m\quad \text{et}\quad -\frac{a + bm + em^2}{c + fm}$$

ou à

$$1,\quad -\frac{cz_1}{fz_1 + g},\quad \frac{a(fz_1 + g)^2 - bcz_1(fz_1 + g) + ec^2z_1^2}{cg(fz_1 + g)}$$

ou enfin à

$$cg(fz_1 + g),\ -c^2gz_1,\ (af^2 - bcf + ec^2)z_1^2 + (2afg - bcg)z_1 + ag^2.$$

Les cosinus des angles que la génératrice L_2 fait avec les axes sont de même proportionnels à

$$c_1g_1(f_1z_1 + g_1),\quad -c_1^2g_1z_1,$$

$$(a_1f_1^2 - b_1c_1f_1 + e_1c_1^2)z_1^2 + (2a_1f_1g_1 - b_1c_1g_1)z_1 + a_1g_1^2.$$

Posant, pour abréger,

$$cg(fz_1+g)=\mathrm{A},\quad -c^2gz_1=\mathrm{B},$$
$$(af^2-bcf+ec^2)z_1^2+(2afg-bcg)z_1+ag^2=\mathrm{C},$$
$$c_1g_1(f_1z_1+g_1)=\mathrm{A}_1,\quad -c_1^2g_1z_1=\mathrm{B}_1,$$
$$(af_1^2-b_1c_1f_1+e_1c_1^2)z_1^2+(2a_1f_1g_1-b_1c_1g_1)z_1+a_1g_1^2=\mathrm{C}_1,$$

on aura

$$\cos\widehat{\mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_2}=\frac{\mathrm{AA}_1+\mathrm{BB}_1+\mathrm{CC}_1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\sqrt{\mathrm{A}_1^2+\mathrm{B}_1^2+\mathrm{C}_1^2}}.$$

Question 1139

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 208);

PAR M. H. QUET,

Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagranval).

Par un point A, *extérieur à une parabole, on mène deux tangentes à la courbe et aux points de contact des normales qui se coupent en un point* B; *quel doit être le lieu des points* A *pour que celui des points* B *soit :* 1° *une droite;* 2° *un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole?* (ANDROWSKI.)

Je prends pour axes l'axe de la parabole et sa tangente au sommet; son équation sera

$$(1)\qquad y^2=2px.$$

Soient a et b les coordonnées du point A, et α, β celles du point B; l'équation de CD, polaire de A, sera

$$(2)\qquad by-px-ap=0.$$

D'un autre côté, l'équation de l'hyperbole passant par les pieds des normales menées du point B est

$$(3)\qquad xy+y(p-\alpha)-p\beta=0.$$

Les équations qui fournissent les ordonnées des points d'intersection de la droite (2) avec les courbes (1) et (3) sont

$$(4)\qquad y^2 - 2by + 2ap = 0,$$

$$(5)\qquad y^2 - \left(\frac{ap + \alpha p - p^2}{b}\right)y - \frac{p^2\beta}{b} = 0.$$

Ces deux équations devant donner les mêmes valeurs pour y, nous aurons, en identifiant,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2b^2 = ap + \alpha p - p^2, \\ 2ab = -p\beta. \end{array}\right.$$

1. Si maintenant nous voulons que le lieu du point B soit une droite, α et β doivent satisfaire à la condition

$$(7)\qquad \beta = c\alpha + d.$$

En éliminant α et β entre les relations (6) et (7), nous aurons une relation entre a et b qui sera l'équation du lieu des points A. Portant dans (7) les valeurs de α et de β tirées des relations (6), il vient, en remplaçant a et b par les coordonnées courantes x, y,

$$-2xy = c(2y^2 + p^2 - px) + pd$$

ou

$$(8)\qquad 2cy^2 + 2xy - cpx + p(pc + d) = 0.$$

Le lieu des points A est donc une hyperbole ayant une de ses asymptotes parallèle à l'axe des x, et l'autre perpendiculaire à la direction de la droite sur laquelle se meut le point B.

Si l'on voulait que le lieu des points B fût une parallèle à l'axe de la parabole, il faudrait faire $c = 0$ dans l'équation (8), et l'équation du lieu deviendrait

$$xy = -\frac{pd}{2},$$

équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Si le lieu du point B est l'axe de la parabole, on a $c=0$, $d=0$, et l'équation $xy=-\frac{pd}{2}$ se réduisant à $xy=0$ montre que le point A doit être sur l'axe de la parabole, ou sur la tangente au sommet de cette courbe.

Proposons-nous de trouver ce que deviendrait le lieu des points A, si le point B était assujetti à se mouvoir sur une droite parallèle à l'axe des y.

Je remarque que, pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer α et β entre les relations (6), et la relation $\alpha=d'$. Remplaçant α par sa valeur dans la première des équations (6), il vient

$$2b^2=ap+pd'-p^2$$

ou, en remplaçant a et b par les coordonnées courantes x et y,

$$y^2=\frac{p}{2}[x-(p-d')]. \tag{9}$$

Le lieu est donc une parabole dont le paramètre est le quart du paramètre de la parabole proposée, et qui a même axe. Si donc le sommet de cette seconde parabole a une abscisse positive, elle sera tout entière comprise dans l'intérieur de la parabole proposée, et nous ne pourrons mener par les points A que des tangentes imaginaires, et, par suite, nous aurons des normales imaginaires correspondantes qui se couperont en des points réels dont le lieu sera la droite $x=d'$. Cherchons la condition pour que le lieu des points A soit tel qu'on puisse mener des tangentes réelles à la courbe proposée. Si nous faisons $y=0$ dans l'équation (9), il reste

$$x=p-d'.$$

On voit donc que, tant que d' sera négatif, le sommet de la courbe (9) sera intérieur à la parabole proposée, et nous n'aurons que des normales imaginaires; si d' est positif et $< p$, il en sera de même; mais si $d' > p$, le sommet de la parabole (9) est extérieur à la première parabole, et le lieu des points A d'où l'on pourra mener des tangentes réelles sera la partie de la courbe (9) extérieure à la première.

2. Le lieu du point de rencontre des normales doit être un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole.

Dans ce cas, pour trouver le lieu des points A, il faut éliminer α et β entre les équations (6) et celle d'un cercle ayant son centre à l'origine, c'est-à-dire entre les équations

$$2b^2 = ap + \alpha p - p^2,$$
$$2ab = -p\beta,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Portant dans la dernière les valeurs de α et β, tirées des deux premières, il vient

$$\frac{(2b^2 + p^2 - ap)^2}{p^2} + \frac{4a^2b^2}{p^2} = r^2$$

ou, en faisant a et b coordonnées courantes,

$$(2y^2 + p^2 - px)^2 + 4x^2y^2 = r^2p^2.$$

Dans ce cas, le lieu est une courbe du quatrième degré, que l'on sait construire.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Joseph Leclercq, élève au lycée d'Amiens; A. Tourettes; Brocard; Moret-Blanc; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; P. S., à Cherbourg; H. Lez; A. Pellissier; de Rufz de Lavison, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin); E. Kruschwitz, à Berlin.

Question 1150

(voir 2e série, t. XIII, p. 191);

PAR M. ASTOR,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Angoulême.

Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés d'un triangle donné.

(A. ROUSSET.)

Prenons pour triangle de référence le triangle donné. L'équation générale des coniques tangentes aux trois côtés est

$$\sqrt{a\alpha} + \sqrt{b\delta} + \sqrt{c\gamma} = 0$$

ou

$$(1)\quad \begin{cases} f(\alpha, \delta, \gamma) = a^2\alpha^2 + b^2\delta^2 + c^2\gamma^2 \\ \qquad - 2bc\delta\gamma - 2ca\gamma\alpha - 2ab\alpha\delta = 0. \end{cases}$$

La condition pour que cette équation (1) représente une hyperbole équilatère s'écrit aisément; elle est la suivante :

$$(2)\quad a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C = 0.$$

Soient α', δ', γ' les coordonnées du point donné; l'équation de sa polaire par rapport à (1) peut s'écrire

$$(3)\qquad \alpha' f'_\alpha + \delta' f'_\delta + \gamma' f'_\gamma = 0.$$

Entre les trois équations homogènes (1), (2), (3) il s'agit d'éliminer a, b, c. Or l'équation (1) peut s'écrire

$$(4)\qquad \alpha f'_\alpha + \delta f'_\delta + \gamma f'_\gamma = 0;$$

(3) et (4) donnent

$$\frac{f'_\alpha}{\beta\gamma' - \gamma\delta'} = \frac{f'_\delta}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{f'_\gamma}{\alpha\delta' - \delta\alpha'},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{a(b\delta + c\gamma - a\alpha)}{\delta\gamma' - \gamma\delta'} = \frac{b(c\gamma + a\alpha - b\delta)}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{c(a\alpha + b\delta - c\gamma)}{\alpha\delta' - \delta\alpha'}.$$

On tire de ces équations les valeurs proportionnelles de a, b, c, par une élimination facile qui consiste à remplacer ces deux équations par des équations du premier degré en a, b, c; elles s'obtiennent aisément en multipliant les deux termes du premier rapport par α, ceux du deuxième par β, ceux du troisième par γ, retranchant terme à terme les numérateurs et dénominateurs de deux des nouveaux rapports et égalant au troisième sous sa forme primitive. On a ainsi

$$\frac{a}{\alpha(\delta\gamma'-\gamma\delta')^2}=\frac{b}{\delta(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2}=\frac{c}{\gamma(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2};$$

il ne reste plus qu'à remplacer a, b, c par ces valeurs qui leur sont proportionnelles dans (2), et l'on a pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned}\alpha^2(\delta\gamma'-\gamma\delta')^4+\delta^2(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^4+\gamma^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^4&\\+2\alpha\beta(\delta\gamma'-\gamma\delta')^2(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2\cos C&\\+2\gamma\alpha(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2\cos B&\\+2\delta\gamma(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2\cos A&=0.\end{aligned}$$

Cette équation représente une courbe du sixième degré dont les trois sommets du triangle sont des points doubles et le point donné un point quadruple.

On pouvait prévoir que la courbe est du sixième ordre et a le point donné pour point quadruple.

En effet la condition pour qu'une droite

$$l\alpha+m\delta+n\gamma=0$$

soit tangente à la courbe est (Salmon)

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0.$$

Cette équation avec l'équation (2) montre qu'il existe deux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés et à une droite quelconque passant par le point donné. Sur toute droite issue du point donné se trouvent donc deux points du lieu, et le point lui-même est un point quadruple du lieu, car on peut mener quatre hyperboles passant par le point donné. Les quatre tangentes en ce point sont les tangentes à ces quatre hyperboles. Le lieu est donc du sixième ordre, puisqu'une droite issue du point donné le coupe en six points.

On peut aisément trouver le lieu par rapport aux paraboles tangentes aux trois côtés, en remplaçant l'équation (2) par la suivante :

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 0,$$

qui exprime que la droite de l'infini

$$\sin A \alpha + \sin B \beta + \sin C \gamma = 0$$

est tangente à la conique. Le lieu a pour équation

$$\frac{\alpha(\delta\gamma' - \gamma\alpha')^2}{\sin A} + \frac{\delta(\gamma\alpha' - x\gamma')^2}{\sin B} + \frac{\gamma(\alpha\delta' - \delta\alpha')^2}{\sin C} = 0.$$

C'est une courbe du troisième ordre passant par les trois sommets du triangle et ayant le point donné pour point double.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Bourguet; Moret-Blanc; Gambey; Genty; Ch. Contet.