C. CHADU

Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation de 1874

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 175-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__175_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1874;

PAR M. C. CHADU.

Étant donné un triangle ABC, *on mène par chacun de ses sommets une droite qui partage le côté opposé en deux segments respectivement proportionnels aux carrés des côtés adjacents :*

1° *Faire voir que les droites partant des trois sommets concourent en un même point* M;

2° *Démontrer que si de ce point* M *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, MR *sur les côtés du triangle*

ABC, *les longueurs* MP, MQ, MR *sont respectivement proportionnelles aux côtés du triangle* ABC, *et que le point* M *est le centre de gravité du triangle* PQR *formé par les pieds de ces perpendiculaires;*

3° *Calculer, en fonction des côtés du triangle* ABC, *la somme* $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2$ *ainsi que les côtés et l'aire du triangle* PQR.

I. — Soient a, b, c les côtés du triangle ABC; AD, BE, CF les droites satisfaisant à l'énoncé.

On aura les relations

$$(1)\qquad \frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{AF}{BF} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{a^2}{c^2}.$$

En multipliant ces trois relations membre à membre, on obtient

$$\frac{BD.AF.CE}{CD.BF.AE} = 1,$$

égalité qui montre que les droites considérées se coupent en un même point.

II. — Exprimons que le triangle AMC est la différence des triangles ADC et DMC, nous aurons

$$(2)\qquad b.MQ = DC\,(h - MP),$$

h étant la hauteur du triangle ABC, abaissée du sommet A.

On aurait de même

$$(3)\qquad c.MR = BD\,(h - MP).$$

En divisant membre à membre les équations (2) et (3) et tenant compte des relations (1), on obtient

$$\frac{b.MQ}{c.MR} = \frac{DC}{BD} = \frac{b^2}{c^2}$$

ou bien

$$\frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c},$$

par suite

$$\frac{MP}{a} = \frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c}.$$

Si l'on remarque que

$$a\,MP + b\,MQ + c\,MR = 2S,$$

S surface du triangle ABC, on a

$$(4) \qquad \frac{MP}{a} = \frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a aussi

$$(5) \qquad \frac{MP}{\sin A} = \frac{MQ}{\sin B} = \frac{MR}{\sin C}.$$

Les triangles PMQ, QMR, RMP ont respectivement pour mesure la moitié des produits

$$MP.MQ \sin C, \quad MR.MQ \sin A, \quad MP.MR \sin B.$$

Les relations (5) montrent que les surfaces de ces trois triangles sont équivalentes; le point M est donc le centre de gravité du triangle PQR.

III. — Des équations (4) on déduit facilement la relation

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le triangle PQM donne

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{QM}^2 + 2PM.QM \cos C.$$

En remplaçant PM et QM par leurs valeurs tirées des équations (4), et remarquant que

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2,$$

on a

$$\overline{PQ}^2 = \frac{4S^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

L'aire du triangle PQR est égale à trois fois l'aire du triangle PMQ; en désignant par S_1 l'aire du triangle PQR, on aura

$$S_1 = \frac{3\,MP.MQ\sin C}{2} = \frac{6S^2 ab\sin C}{(a^2 + b^2 + c^2)^2};$$

mais $ab\sin C = 2S$; donc

$$S_1 = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Note. — M. Jules Lefebvre, d'Amiens, nous a envoyé une solution de la même question.