Nouvelles annales de mathématiques

A. Tourettes

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1874

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 172-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__172_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1874.

PAR M. A. TOURETTES.

Étant donnés un triangle et un point M, *on sait que l'on peut généralement faire passer par ce point deux paraboles circonscrites au triangle.*

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu des points M *pour lesquels les axes des deux paraboles correspondantes font un angle donné.*

Soient O, A, B les trois sommets du triangle; OA et OB les axes des x et des y; θ l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$; α et β les coordonnées du point M; $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$, et K un coefficient variable.

L'équation générale des paraboles circonscrites au triangle sera

$$(y - \mathrm{K}x)^2 - \mathrm{K}^2 ax - by = 0, \tag{1}$$

et, pour que la parabole passe par le point (α, β), il faudra que

$$(\beta - \mathrm{K}\alpha)^2 - \mathrm{K}^2 a\alpha - b\beta = 0,$$

ou bien que

$$(\alpha^2 - a\alpha)\mathrm{K}^2 - 2\alpha\beta\mathrm{K} + \beta^2 - b\beta = 0. \tag{2}$$

Les deux valeurs de K déduites de cette équation sont les coefficients angulaires des axes des deux paraboles; soit V l'angle constant qu'ils doivent former, on aura

$$(3) \qquad \tang V = \frac{(K' - K'') \sin\theta}{1 + (K' + K'')\cos\theta + K'K''}.$$

Or l'équation (2) donne

$$K' + K'' = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - a\alpha}, \quad K'K'' = \frac{\beta^2 - b\beta}{\alpha^2 - a\alpha},$$

$$K' - K'' = \frac{2\sqrt{\alpha\beta(b\alpha + a\beta - ab)}}{\alpha^2 - a\alpha}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), et remplaçant α et β par x et y, on trouve

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax - by \\ = 2\sqrt{xy(bx + ay - ab)}\,\dfrac{\sin\theta}{\tang V}; \end{array} \right.$$

le lieu est une courbe du quatrième degré.

Si $V = \frac{\pi}{2}$, le second membre disparaît, et l'on a

$$(5) \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax - by = 0.$$

C'est l'équation d'une circonférence circonscrite au triangle donné (*).

Considérons le cas général $V \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$.

(*) Les quatre points communs à deux paraboles, dont les axes sont rectangulaires, appartiennent à une même circonférence; et inversement, si les quatre points communs à deux paraboles appartiennent à une même circonférence, les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires.

La démonstration directe de ces propositions est très-simple.

G.

L'équation (4) développée s'écrira

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+2xy\cos\theta)^2\\ &\quad -2(ax+by)(x^2+y^2+2xy\cos\theta)\\ &\quad -\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}xy(bx+ay)\\ &\qquad\qquad +(ax+by)^2+\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}ab\,xy=0. \end{aligned}\right.$$

L'ensemble des termes du quatrième degré donne des directions asymptotiques imaginaires : donc la courbe n'a pas de points à l'infini. On voit qu'elle passe par l'origine qui est un point double. Les tangentes sont données par l'équation

$$(ax+by)^2+\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}ab\,xy=0.$$

Elles sont réelles et situées dans l'angle supplémentaire de θ. Or le choix du sommet O pour origine n'a rien de particulier; par suite, les deux autres sommets sont des points doubles; si l'on transportait l'origine en un de ces points, on trouverait les équations des tangentes en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré. Examinons la forme de la courbe entre les points A et B. Pour cela, je pose

$$x=\lambda\rho,\quad y=\mu\rho,$$

et je substitue dans l'équation (6). On trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\theta)\rho^2\\ &\quad -\left[2(a\lambda+b\mu)(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\theta)\right.\\ &\qquad\qquad \left.+\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}\lambda\mu(b\lambda+a\mu)\right]\rho\\ &\qquad\qquad +(a\lambda+b\mu)^2+\frac{4ab\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}\lambda\mu=0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait varier λ de 1 à zéro et μ de zéro à 1, le rayon ρ décrit l'angle AOB; nous voyons que les deux racines de l'équation (7) restent positives et inégales, car la quantité sous le radical a pour expression

$$\frac{4\sin^4\theta}{\tang^4 V}\lambda^2\mu^2(b\lambda+a\mu)^2$$
$$+\frac{4\sin^2\theta}{\tang^2 V}\cdot\lambda^2\mu^2(\lambda^2+2\lambda\mu\cos\theta+\mu^2)(a^2+b^2-2ab\cos\theta),$$

laquelle est essentiellement positive dans l'hypothèse où je me suis placé. On aura donc deux branches de courbe distinctes partant du point A et allant se couper au point B.

Même raisonnement pour les arcs compris entre B et O, O et A. La courbe se compose de trois lunules qui constituent une courbe proprement dite du quatrième degré et non l'ensemble de deux coniques, car il n'y a que trois points d'intersection.

Note. — M. Gambey nous a envoyé une solution de la même question.