NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. SANCERY

Propriétés des quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leurs bissectrices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 145-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__145_0>

PROPRIÉTÉS DES QUADRILATÈRES COMPLETS QUI RESSORTENT DE LA CONSIDÉRATION DE LEURS BISSECTRICES;

Par M. L. SANCERY, à Nice.

M. Mention a démontré dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. I, p. 16 et 65) une belle proposition de Steiner, relative à un quadrilatère complet et à ceux qu'on en dérive à l'aide des douze bissectrices de ses angles. Je me propose d'indiquer quelques autres propriétés des mêmes quadrilatères.

1. *Notation.* — Étant donné un quadrilatère ABCD que, pour fixer les idées, nous supposerons convexe, prolongeons les côtés opposés AB et CD, BC et AD jusqu'à leurs rencontres E, F. Désignons les angles BAD, CBA, DCB, ADC, DEA, AFB respectivement par angles intérieurs A, B, C, D, E, F, et leurs suppléments par angles extérieurs A, B, C, D, E, F. Menons les douze bissectrices des angles intérieurs et extérieurs du quadrilatère, et soient : 1° A', B', C', D' les intersections des bissectrices des angles intérieurs A et B, B et C, C et D, D et A; 2° A'', B'', C'', D'' celles des bissectrices des angles extérieurs C et D, D et A, A et B, B et C; 3° A_1 l'intersection des bissectrices de l'angle intérieur C et de l'angle extérieur B, et de même B_1, C_1, D_1 celles des angles A et B, A et D, C et D; A_2, B_2, C_2, D_2 celles des angles D et A, D et C, B et C, B et A; H, I, K, L, G, J celles des angles C et A, D et B, A et C, B et D, E et F, F et E; le premier angle est toujours intérieur et le second exté

rieur; 4° P, Q, T les intersections des bissectrices des angles intérieurs A et C, B et D, E et F; R, S, V les intersections des bissectrices des angles extérieurs A et C, B et D, E et F; 5° a, b, c les intersections des droites BD et EF, EF et AC, AC et BD; a', b', c', a'', b'', c'' celles des droites QS et TV, TV et PR, PR et QS, IL et GJ, GJ et HK, HK et IL; α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' celles des droites PR et HK, QS et IL, TV et GJ; HK et AC, IL et BD, GJ et EF, AC et PR, BD et QS, EF et TV.

2. On nous permettra de rappeler dans ce paragraphe des propositions déjà connues, mais nécessaires pour la suite.

Les points où se coupent les bissectrices des angles opposés du quadrilatère complet ABCDEF, tant intérieurs qu'extérieurs, mais pris simultanément : 1° de même espèce; 2° d'espèces différentes, sont les sommets de deux quadrilatères complets PQRSTV, HIKLGJ. Chacun des côtés de ces quadrilatères est un axe d'homologie correspondant à quatre centres d'homologie situés sur une même circonférence. On obtient ainsi les quadrilatères $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A'A''C_1C_2$, $D'D''B_1B_2$, $C'C''A_1A_2$, $B'B''D_1D_2$ inscriptibles dans des circonférences dont les centres sont O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2. Si λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' sont les cercles ayant pour diamètres les diagonales PR, QS, TV, HK, IL, GJ des deux quadrilatères PQRSTV, HIKLGJ, les cercles O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'' et ω', ω'', ω_1, ω_2, λ, λ', λ'' forment deux séries de cercles orthogonaux. L'axe radical des premiers cercles est la médiane des diagonales du quadrilatère PQRSTV, celui des autres est la médiane des diagonales du quadrilatère HIKLGJ. On peut ajouter à ces deux séries les cercles Δ', Δ'' circonscrits aux triangles diagonaux $a'b'c'$, $a''b''c''$ des deux quadrilatères PQRSTV, HIKLGJ.

3. THÉORÈME. — *Sur chacun des côtés de l'un quelconque des quadrilatères* ABCD, PQRS, HIKL *se croisent, et par quatre groupes différents, deux côtés des deux autres quadrilatères.*

On peut donner à ce théorème plus de précision. Supposons que l'on choisisse un côté de l'un des trois quadrilatères, pour savoir quels sont les côtés des deux autres qui se croisent sur le côté choisi, on parcourra l'un de ces quadrilatères dans le sens de la notation et à partir du premier sommet. Quant au second, selon que le côté choisi est de rang impair ou de rang pair, on le parcourra dans le sens de la notation ou dans le sens contraire, en partant du sommet qui est de même ordre que le côté choisi, ou du sommet suivant. Les côtés des deux quadrilatères qui, dans leur parcours, ont le même numéro d'ordre, se croisent sur le côté choisi.

Prenons le côté PQ, qui est le premier dans le quadrilatère PQRS; sur ce côté PQ se croisent, d'après la règle, AB et HI, BC et IK, CD et KL, DA et LH. En effet, les triangles AHP, BIQ sont homologiques, puisque AH et BI se coupent en C″, HP et IQ en C′, PA et QB en A′, et que les points C″, C′, A′ sont en ligne droite. Il en résulte que les droites AB, HI, PQ se coupent en un même point 1. De même les triangles BIQ, CKP ont la droite D″D′B′ pour axe d'homologie; par conséquent les lignes BC, IK, QP se coupent en un même point 2. Pareillement les triangles CKP, DLQ ont la droite A″A′C′ pour axe d'homologie, et les lignes CD, KL, PQ ont un même point commun 3. Enfin les triangles DLQ, AHP ont la droite B″B′D′ pour axe d'homologie et les lignes DA, LH, QP se coupent en un même point 4.

Pareillement, sur le côté RS, qui est le troisième dans le quadrilatère PQRS, se croisent AB et KL en 1′, BC et LH en 2′, CD et HI en 3′, DA et IK en 4′; sur le deuxième côté QR se coupent AB et KI en 1″, BC et IH en 2″, CD et HL en 3″, DA et LK en 4″; sur le quatrième côté SP se croisent AB et HL en 1‴, BC et LK en 2‴, CD et KI en 3‴, DA et IH en 4‴.

4. Toutes les droites précédemment considérées ayant été tracées, par chacun des sommets des quadrilatères ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ passent quatre droites formant un faisceau harmonique.

Pour les sommets A, B, C, D, E, F la propriété résulte de la construction elle-même. Considérons les autres sommets. Soit 1° le point P. Par le quadrilatère complet A′B′C′D′QP, on voit que le faisceau P(B′, A′, T, Q) est harmonique. Soit 2° le point H. Le quadrilatère complet 2′3″2″3′HR montre que le faisceau H (I, L, C, R) est harmonique. Il en est de même pour les autres sommets.

5. Théorème. — *Sur chacune des diagonales de l'un quelconque des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ *se croisent, et par deux groupes différents, deux diagonales appartenant aux deux autres. La diagonale du premier quadrilatère est ainsi divisée harmoniquement; elle l'est aussi par les diagonales restantes des deux autres.*

Pour donner à ce théorème plus de précision, considérons le tableau suivant, formé des diagonales des trois quadrilatères

$$\begin{matrix} AC & PR & HK, \\ BD & QS & IL, \\ EF & TV & GJ, \end{matrix}$$

puis, regardant ce tableau comme celui d'un déterminant, opérons comme si nous voulions le développer selon les éléments de la première colonne, nous obtiendrons alors comme se coupant sur AC : 1° les diagonales QS et GJ en δ; 2° TV et IL en δ'; sur BD : 1° TV et HK en ε; 2° PR et GJ en ε'; sur EF : 1° PR et IL en η; 2° QS et HK en η'. De plus, AC sera divisée harmoniquement en δ et δ', BD en ε et ε', EF en η et η'. En ordonnant le déterminant selon les éléments de la deuxième colonne, on trouverait que sur PR se coupent BD et GJ en ε', EF et IL en η, et que PR est divisée harmoniquement en ε' et η. Et ainsi de même des autres diagonales.

Occupons-nous de la diagonale AC. Considérons d'abord les deux couples de faisceaux harmoniques

$$B(A, C, Q, S) \text{ et } D(C, A, S, Q), \quad B(A, C, I, L) \text{ et } D(C, A, L, I),$$

puis les deux couples

$$P(A, C, Q, S) \text{ et } R(C, A, S, Q), \quad P(A, C, T, V) \text{ et } R(C, A, V, T).$$

On sait que la droite qui joint les intersections de deux couples quelconques de rayons homologues, mais dissociés, passe par un point fixe. C'est sous cette forme que nous rappellerons le théorème énoncé dans la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, p. 75, art. III, ou encore dans l'*Introduction à la Géométrie supérieure* de M. Housel, p. 58, art. III. Si donc nous indiquons par

$$\left.\begin{matrix} BA \\ DA \end{matrix}\right| A$$

que les droites BA, DA se coupent en A, on pourra former le tableau suivant :

B (ACQS)	BA	A,	BA	d,	BA	$e, \ldots,$	BQ	Q,
D (CASQ)	DA		DS		DQ		DQ	
	BC	C,	BQ	d',	BS	$e', \ldots,$	BS	S;
	DC		DC		DC		DS	
B (ACIL)	BA	A,	BA	d,	BA	$e, \ldots,$	BI	I,
D (CALI)	DA		DL		DI		DI	
	BC	C,	BI	e',	BL	$d', \ldots,$	BL	L;
	DC		DC		DC		DL	
P (ACQS)	PA	A,	PA	d_1,	PA	$e_1, \ldots,$	PQ	Q,
R (CASQ)	RA		RS		RQ		RQ	
	PC	C,	PQ	d'_1,	PS	$e'_1, \ldots,$	PS	S;
	RC		RC		RC		RS	
P (ACTV)	PA	A,	PA	d_1,	PA	$e_1, \ldots,$	PT	T,
R (CAVT)	RA		RV		RT		RT	
	PC	C,	PT	e'_1,	PV	$d'_1, \ldots,$	PV	V.
	RC		RC		RC		RV	

D'où l'on conclura que les droites dd', ee' passent par l'intersection δ de AC et de QS; que de' et ed' passent par l'intersection δ' de AC et de IL; que $d_1 d'_1$ et $e_1 e'_1$ se croisent en δ sur AC et QS, et que $d_1 e'_1$ et $e_1 d'_1$ concourent en δ'_1, intersection de AC et de TV. Puis le quadrilatère $dd'ee'$ ayant pour diagonales de, $d'e'$, $\delta\delta'$, montre que $\delta\delta'$ est divisée harmoniquement par de et $d'e'$ aux points A et C, et réciproquement que AC est ainsi divisé en δ et δ'. De même pour le quadrilatère $d_1 d'_1 e_1 e'_1$, qui a pour diagonales $d_1 e_1$, $d'_1 e'_1$, $\delta\delta'_1$, on voit que $\delta\delta'_1$ est divisée harmoniquement par $d_1 e_1$ et $d'_1 e'_1$ en A et C, ou bien que AC l'est en δ, δ'_1.

De là il suit que δ et δ'_1, étant conjugués harmoniques de δ par rapport à AC, coïncident; autrement dit, TV et IL se coupent sur AC.

Que l'on prenne maintenant les deux couples de faisceaux harmoniques

B(ACQS) et D(CASQ), B(ACIL) et D(CALI),

puis les deux couples

E(ACTV) et F(CAVT), E(ACGJ) et F(CAJG),

et l'on verra que AC est divisée harmoniquement, d'abord en δ' et δ par IL et QS, puis en δ' et δ_1 par TV et GT; d'où il suit que δ et δ_1 coïncident; autrement dit, AC, QS et GT passent par le même point δ.

Il est facile de déduire du tableau des diagonales les faisceaux qui viennent d'être considérés, et, par suite, de faire une démonstration analogue pour une autre diagonale.

On vient de voir que la diagonale AC était divisée harmoniquement par QS et IL, TV et GJ; elle l'est également par les diagonales PR et HK. En effet, le quadrilatère complet ACKHRα' montre que HK est divisée harmoniquement en α et α', AC en α' et α'', PR en α'' et α. On voit de même, par le quadrilatère BDLISβ', que IL est divisée harmoniquement en β et β', BD en β' et β'', QS en β'' et β, et, par le quadrilatère EFGJTγ', que GJ est divisée harmoniquement en γ et γ', EF en γ' et γ'', TV en γ'' et γ.

Corollaire. — En observant que, dans chacun des quadrilatères considérés, une diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres, on pourra dire : huit diagonales des quadrilatères ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ déterminent sur la neuvième une involution de six points dans laquelle les extrémités de cette dernière diagonale sont les points doubles.

Le tableau ci-dessus montre facilement quelles sont les diagonales conjuguées. Ainsi, pour la division faite sur AC, sont conjuguées entre elles les diagonales BD et EF, PR et HK, QS et IL, TV et GJ; ces deux derniers couples donnent les mêmes points conjugués. Si l'on veut considérer la division faite sur QS, on transformera, à l'aide de permutations circulaires, le tableau ci-dessus dans le suivant :

QS	IL	BD
TV	GJ	EF
PR	HK	AC

et alors seront conjuguées TV et PR, IL et BD, GJ et EF, HK et AC. Ces deux derniers couples fournissent les mêmes points conjugués.

6. Théorème. — *Les triangles diagonaux* abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ *des quadrilatères* ABCD, PQRS, HIKL *sont semblables et homologiques entre eux. Ils ont pour centre d'homologie le point de rencontre* h *des hauteurs du triangle diagonal* abc *relatif au quadrilatère donné.*

Considérons les angles c, c''; je dis qu'ils sont égaux. En effet, dans les quadrilatères concaves $\mathrm{C}c\mathrm{D}c'$, $\mathrm{KA'L}c''$, on a

$$\mathrm{C}c\mathrm{D} = \mathrm{C'D}c + \mathrm{CC'D} + c\mathrm{CC'},$$
$$\mathrm{KA'L} = c''\mathrm{LA'} + \mathrm{K}c''\mathrm{L} + \mathrm{A'K}c'';$$

la dernière égalité peut s'écrire

$$2^d - \mathrm{BA'K} = c''\mathrm{LA'} + 2^d - \mathrm{I}c''\mathrm{K} + \mathrm{A'K}c'',$$

ou bien

$$\mathrm{I}c''\mathrm{K} = c''\mathrm{LA'} + \mathrm{BA'K} + \mathrm{A'K}c'';$$

mais, par les quadrilatères inscriptibles IBDL, A'B'C'D', HACK, on a

$$C'Dc = c''LA', \quad CC'D = BA'K, \quad cCC' = A'Kc'';$$

donc

$$CcD = Ic''K \quad \text{ou} \quad bca = b''c''a''.$$

On peut démontrer de même que les angles c et c' sont égaux; mais il est plus simple d'observer que, le quadrilatère $\alpha c'\beta c''$ ayant deux angles droits $c''\alpha c$ et $c'\beta c''$, il en résulte

$$\alpha c'\beta = \beta c''K \quad \text{ou bien} \quad b'c'a' - b''c''a''.$$

On a donc

$$bca = b'c'a' = b''c''a''.$$

Il en est de même des autres angles des triangles diagonaux; donc ces triangles sont équiangles et semblables.

Maintenant, de ce que les points δ', ε se trouvent sur la diagonale TV, et de ce que le quadrilatère $\delta'c''\varepsilon c$ est inscriptible, il résulte que l'angle

$$\delta' cc'' = \delta'\varepsilon c'' = b'\varepsilon\alpha = 1^d - \alpha b'\varepsilon = 1^d - c'a'b';$$

donc le prolongement de $c''c$ rencontre à angle droit le côté ab du triangle abc. Pareillement, les points δ, ε' étant sur la diagonale GJ et le quadrilatère $\delta c\varepsilon' c'$ étant inscriptible, on a

$$c'c\varepsilon' = c'\delta\varepsilon' = \beta\delta\varepsilon' = 1^d - \beta a''\delta = 1^d - c''a''b''.$$

Donc le prolongement de $c'c$ rencontre à angle droit le côté ab du triangle abc. De là il suit que les sommets c, c', c'' sont en ligne droite et sur la hauteur du triangle abc issue du point c. De même, les sommets a, a', a'' sont sur la hauteur issue du point a, et b, b', b'' sur la hauteur issue du point b. Les trois triangles abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ sont donc homologiques deux à deux, et ont le point de rencontre h des hauteurs du triangle abc pour centre commun d'homologie.

Corollaire I. — Si α, β, γ sont les intersections des côtés $b'c'$ et $b''c''$, $c'a'$ et $c''a''$, $a'b'$ et $a''b''$, les points α, β, γ sont en ligne droite; de même, les points α', β', γ', α'', β'', γ'' sont en ligne droite. Enfin les trois axes d'homologie $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ se rencontrent en un même point h_1.

Corollaire II. — L'angle $b'ha'$ étant le supplément de $a'c'b'$, le quadrilatère $hb'c'a'$ est inscriptible; il en est de même du quadrilatère $hb''c''a''$.

Ainsi les cercles circonscrits aux triangles diagonaux des deux quadrilatères dérivés passent par le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal du quadrilatère donné.

7. Théorème. — *Les séries des cercles orthogonaux précédemment considérées se trouvent augmentées chacune de trois autres cercles circonscrits aux quadrilatères formés par les couples des diagonales des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV *d'une part, et* ABCDEF, HIKCLJ *de l'autre, qui comprennent des angles égaux entre eux.*

Les diagonales BD et EF, QS et TV forment le quadrilatère $a\varepsilon a'\eta'$ qui est inscriptible, puisque les angles $\varepsilon a\eta'$, $\eta' a'\varepsilon$ sont supplémentaires. Or, la diagonale HK étant divisée harmoniquement en ε, η', le cercle $a\varepsilon a'\eta'$ est orthogonal au cercle μ qui a HK pour diamètre. Je dis que le même cercle $a\varepsilon a'\eta'$ dont le centre est ω_3 coupe orthogonalement le cercle Δ' circonscrit au triangle diagonal $a'b'c'$ du quadrilatère PQRSTV. Joignons le point a' commun à ces deux cercles aux centres ω_3 et Δ'. On a

$$\Delta' a' \omega_3 = \Delta' a' b' + b' a' a + a a' \omega;$$

or,

$$\Delta' a' b' = 1^d - a' c' b' = \varepsilon a a' = \varepsilon \eta' a',$$

$$b' a' a = \varepsilon a' a = a \eta' \varepsilon,$$

$$a a' \omega_3 = 1^d - a \eta' a^{\varepsilon};$$

donc

$$\Delta' a' \omega_3 = \varepsilon \eta' a' + a \eta' \varepsilon + 1^d - a \eta' a' = 1_d.$$

Le cercle ω_3 orthogonal aux cercles μ et Δ' est orthogonal à tous ceux de la série O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'', Δ'. Il en est de même des cercles ω_4, ω_5 circonscrits aux quadrilatères $b\eta b'\delta'$, $c\delta c'\varepsilon'$ formés respectivement par les diagonales EF, AC, TV, PR et AC, BD, PR, QS.

Une démonstration analogue peut être faite à l'aide du cercle Δ'' circonscrit au triangle diagonal $a''b''c''$ relativement aux cercles O_3, O_4, O_5 circonscrits aux quadrilatères $a\varepsilon' a''\eta$, $b\eta' b''\delta$, $c\delta' c''\varepsilon$ formés respectivement par les diagonales BD, EF, IL, GJ; EF, AC, GJ, HK; AC, BD, HK, IL. Ces cercles sont orthogonaux à ceux de la série ω', ω'', ω_1, ω_2, λ, λ', λ'' Δ''.

8. Supposons maintenant que le quadrilatère donné soit inscriptible dans un cercle de centre O, et que A et B désignent les angles aigus, A étant le plus petit. Alors :

1° Le quadrilatère EVFT formé par les bissectrices des angles E, F devient un rectangle, et, par suite, les quadrilatères $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ ont leurs diagonales rectangulaires.

2° Le quadrilatère PQRS devient inscriptible. En effet, dans le faisceau harmonique $T(P, Q, A', D')$, les deux rayons TA', TD', étant rectangulaires, divisent en deux parties égales les angles formés par les deux autres. Ainsi TA' est la bissectrice de l'angle PTQ formé par les côtés opposés SP, QR du quadrilatère PQRS. De même, VF est la bissectrice de l'angle SVP formé par les côtés opposés RS, PQ du même quadrilatère; mais, l'angle TFV formé par ces bissectrices étant droit, il en résulte que le quadrilatère PQRS est inscriptible.

3° Le quadrilatère HIKL devient un rectangle inscrit dans la même circonférence que le quadrilatère proposé ABCD. Dès lors les sommets G, J et la diagonale GJ sont situés à l'infini ; le faisceau harmonique GIH, GKL, GET, GVF devient le système harmonique des quatre parallèles IH, KL, ET, VF, et le faisceau JLH, JKI, JFT, JVE se transforme dans le système harmonique des quatre parallèles LH, KI, FT, VE. De là il résulte que les deux rectangles HIKL, TEVF ont leurs côtés parallèles deux à deux, et que les côtés parallèles forment un système harmonique.

4° Les triangles $C'HC''$, A_1HA_2, ayant les angles $HC'C''$ et $C'C''H$, HA_1A_2 et A_1A_2H égaux à $\frac{B}{2}$, sont isoscèles, et $HC' = HC''$, $HA_1 = HA_2$. De même les triangles $C''IC'$, A_1IA_2, ayant les angles $IC''C'$ et $C''C'I$, IA_1A_2 et A_1A_2I égaux à $\frac{A}{2}$, sont isoscèles, et $C''I = IC'$, $A_2I = IA_1$. Il en résulte que HI est perpendiculaire sur les milieux de $C'C''$ et de A_1A_2. Pareillement, IK est perpendiculaire sur les milieux de $D'D''$ et de B_1B_2 ; KL sur les milieux de $A'A''$ et de C_1C_2, et LH sur ceux de $B'B''$ et de D_1D_2. Donc, dans les quadrilatères $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$, les distances des sommets homologues sont divisées en deux parties égales par les côtés du quadrilatère HIKL. Il suit de là que les quadrilatères $A'A''C_1C_2$, $D'D''B_1B_2$, $C'C''A_1A_2$, $B'B''D_1D_2$ sont des trapèzes isoscèles.

5° Le quadrilatère HIKL étant un rectangle inscrit dans le cercle O, les cercles μ et μ' coïncident avec le cercle O, le cercle μ'' passant par les points E, F devient la droite EF elle-même. De là il suit que la série des cercles O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'' se réduit à O', O'', O_1, O_2, O, et qu'elle a EF pour axe radical. Le triangle diagonal $a''b''c''$ a deux de ses sommets a'', b'' à l'infini; quant au sommet c'', il coïncide avec le centre O. Les points a'', b'', γ, γ', δ, ε' sont rejetés à l'infini. Il en résulte que les diagonales AC et QS qui se coupent en δ sont parallèles entre elles, et que les diagonales BD et PR qui se coupent en ε' le sont aussi; que δ', ε, γ'', η, η', γ'' sont respectivement les milieux de AC, BD, EF, PR, QS, TV. Or la droite TV passe par les points δ', ε, γ'', et la droite EF par η, η', γ'; on peut donc conclure ce théorème :

Théorème. — *Dans les deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, PQRS, *les diagonales intérieures de l'un sont parallèles aux diagonales intérieures de l'autre, et la troisième diagonale de l'un passe par les milieux des diagonales de l'autre.*

9. Si l'on désigne par σ_1, σ_3 les points où la bissectrice de l'angle intérieur F rencontre les côtés opposés AB et CD, par σ_2, σ_4 ceux où la bissectrice de l'angle intérieur E rencontre les côtés opposés BC, DA, les triangles $\sigma_1 E \sigma_3$ $\sigma_2 F \sigma_4$ seront isoscèles, et la figure $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ sera un losange inscrit dans le quadrilatère ABCD. Pareillement, si l'on représente par Σ_1 et Σ_3, Σ_2 et Σ_4 les points où les bissectrices des angles extérieurs F, E rencontrent les côtés opposés AB et CD, BC et DA, les triangles $\Sigma_1 E \Sigma_3$, $\Sigma_2 F \Sigma_4$ seront isoscèles, et la figure $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ sera un losange exinscrit dans le quadrilatère ABCD. Les hauteurs des triangles $\sigma_1 E \sigma_3$, $\Sigma_1 E \Sigma_3$ abaissées des extrémités des bases $\sigma_1\sigma_3$, $\Sigma_1\Sigma_3$ sont respectivement doubles des perpendiculaires menées des points T, V sur AB et CD; nous les représenterons par $2T_1$, $2V_1$. Pareillement, $2T_2$, $2V_2$ désigneront les hauteurs analogues des triangles $\sigma_2 F \sigma_4$, $\Sigma_2 F \Sigma_4$. Le quadrilatère ABCD donne lieu à quatre

triangles ayant chacun quatre cercles tangents à ses côtés; il en résulte qu'on peut mener seize cercles tangents à trois des lignes AB, BC, CD, DA. Ces cercles ont pour centres les points A', B', C', D', A'', B'', C'', D'', A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 répartis, comme on l'a vu, sur les circonférences O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2. Nous représenterons les côtés AB, BC, CD, DA par a, b, c, d respectivement, le rayon d'un cercle par la même lettre que son centre, et par p_a la perpendiculaire abaissée d'un certain point p sur l'un des côtés a du quadrilatère. Si l'on considère un des cercles tangents, le côté qu'il ne touche pas est opposé à un côté sur lequel se trouve un contact que nous appellerons le *premier contact du cercle consideré.*

Les cercles A', C'', B_1, D_2 ne touchent pas le côté c et ont leur premier contact sur a.

Les cercles B', D'', A_1, C_2 ne touchent pas le côté d et ont leur premier contact sur b.

Les cercles C', A'', D_1, B_2 ne touchent pas le côté a et ont leur premier contact sur c.

Les cercles D', B'', C_1, A_2 ne touchent pas le côté b et ont leur premier contact sur d.

Les points σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sont des centres de similitude inverse pour les cercles A' et C'', B' et D'', C' et A'', D' et B''; les points Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, des centres de similitude directe pour les cercles B_1 et D_2, A_1 et C_2, D_1 et B_2, C_1 et A_2.

10. Théorème. — *Si l'on considère l'un des seize cercles* A', B',... *et que l'on joigne son centre à ceux des cercles* O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2 *qui passent par ce point, la première droite sera perpendiculaire et la seconde parallèle au côté sur lequel se trouve le premier contact de ce cercle.*

Soit le cercle A' ayant son premier contact sur le côté AB, et par le centre duquel passent les cercles O' et ω'; je dis que $A'O'$ est perpendiculaire sur AB, et que $A'\omega'$ lui est parallèle. En effet, 1° l'angle $C'A'O' = 1^d - A'B'C' = \frac{1}{2}E$; cet angle $C'A'O'$ est donc le complément de l'angle $E\sigma_1 A'$, et par suite $A'O'$ est perpendiculaire sur AB; 2° l'angle $C_2 A'\omega' = 1^d - A'C_1 C_2 = C_1 B_1 V = \frac{1}{2}B$; les angles $C_2 A'\omega'$, $A'BA$ sont donc égaux, et, comme ils sont alternes-internes, $A'\omega'$ est parallèle à AB.

La première partie donne lieu à ce corollaire : Le rayon qui joint le centre d'un des cercles A', B',... à son premier contact passe par le centre de celle des circonférences O', O'', O_1, O_2 sur laquelle se trouve le centre de ce cercle.

11. Théorème. — *Le centre* O *est le milieu des distances* O', O'', et O_1, O_2.

En effet, les deux cercles A' et C'' étant l'un inscrit, l'autre exinscrit au triangle ABF, le milieu m_1 de la distance $\zeta_1 \zeta'_1$ qui sépare leurs contacts avec le côté AB est aussi le milieu de ce côté; par conséquent, dans le trapèze birectangle $O'\zeta_1\zeta'_1 O''$, la perpendiculaire menée par le point m_1 sur le côté AB passe par le milieu de $O'O''$ et aussi par le centre O. De même, les cercles D', B'' étant l'un inscrit, l'autre exinscrit au triangle AED, le milieu m_4 de la distance $\zeta_4\zeta'_4$ est aussi le milieu du côté DA, et par conséquent, dans le trapèze birectangle $O'\zeta_4\zeta'_4 O''$, la perpendiculaire menée par le point m_4 sur le côté DA passe par le milieu de $O'O''$ et aussi par le centre O. Il résulte de là que le point O est justement le milieu de $O'O''$.

Que l'on substitue aux cercles A', C'', D', B'' respectivement les cercles A_1, C_2, D_1, B_2, et l'on verra de même que O est le milieu de O_1O_2.

12. THÉORÈME. — *La seconde tangente issue de l'un des centres de similitude* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ *aux cercles correspondants est parallèle au côté que ces cercles ne touchent pas.*

Soit $f'\sigma_1 g'$ la seconde tangente intérieure commune aux cercles A′ et C″ (la première est sur le côté AB), g' étant son contact avec le cercle C″; alors l'angle $g'C''\sigma_1 = \sigma_1 C''\zeta'_1$; mais $\sigma_1 C''\zeta'_1 = TE\sigma_1$, puisque ces angles sont les compléments de $E\sigma_1 T$: donc $g'C''\sigma_1$ est le complément de $E\sigma_1 T$ ou de son égal $T\sigma_3 E$. Il en résulte que $C''g'$ est perpendiculaire sur ED; par suite, $\sigma_1 g'$ et CD sont parallèles, et ainsi des autres.

13. THÉORÈME. — 1° *La distance du centre de l'un des cercles* A′, B′, C′, D′ *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance à ce côté du point d'intersection* T *des diagonales intérieures du quadrilatère* A′B′C′D′, *moins le rayon de ce cercle :*

$$A'_c = 2T_1 - A', \quad B'_d = 2T_2 - B',$$
$$C'_a = 2T_1 - C', \quad D'_b = 2T_2 - D'.$$

2° *La distance du centre de l'un des cercles* A″, B″, C″, D″ *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance du point* T *à ce côté, plus le rayon de ce cercle :*

$$A''_a = 2T_1 + A'', \quad B''_b = 2T_2 + B'',$$
$$C''_c = 2T_1 + C'', \quad D''_d = 2T_2 + D''.$$

3° *La distance du centre de l'un des cercles* A_1, B_1, C_1, D_1 *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance à ce côté du point* V *intersection des diagonales intérieures du quadrilatère* $A_1B_1C_1D_1$, *moins le rayon de ce cercle :*

$$A_{1d} = 2V_2 - A_1, \quad B_{1c} = 2V_1 - B_1,$$
$$C_{1b} = 2V_2 - C_1, \quad D_{1a} = 2V_1 - D_1.$$

4° *La distance du centre de l'un des cercles* A_2, B_2, C_2, D_2 *au côté qu'il ne touche pas est égale en valeur absolue au rayon de ce cercle, moins deux fois la distance du point* V *au même côté :*

$$A_{2b} = A_2 - 2V_2, \quad B_{2a} = 2V_1 - B_2,$$
$$C_{2d} = 2V_2 - C_2, \quad D_{2c} = D_2 - 2V_1.$$

14. Les quadrilatères inscriptibles $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ ayant leurs diagonales rectangulaires, les milieux des côtés de chacun d'eux sont les sommets d'un rectangle inscrit dans une circonférence dont le centre est au milieu de la distance qui sépare le centre du cercle circonscrit au quadrilatère du point de rencontre de ses diagonales. Ainsi, pour le quadrilatère $A'B'C'D'$, les milieux u_1, u_2, u_3, u_4 de ses côtés seront les sommets d'un rectangle inscrit dans une circonférence ayant pour centre le milieu M' de $O'T$.

Si l'on prend les milieux u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 des distances TA', TB', TC', TD', les points u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 sont sur une même circonférence ayant son centre en M' et son rayon ρ' égal à la moitié du rayon du cercle O'. De plus les droites $M'u'_1$, $M'u'_2$, $M'u'_3$, $M'u'_4$ sont respectivement perpendiculaires sur AB, BC, CD, DA. En effet, dans le triangle $A'OT$, M' et u'_1 étant les milieux de TO' et de TA', la droite $M'u'_1$ est parallèle à $O'A'$ et égale à sa moitié; donc, puisque $A'O'$ est perpendiculaire sur AB, il en est de même de $M'u'_1$; de plus, u'_1 est sur la circonférence décrite de M' comme centre avec la moitié de $O'A'$ pour rayon.

15. Théorème. — *Le quadrilatère* ABCD *étant inscriptible :*

1° *Le diamètre du cercle* O', *qui passe par les centres* *des cercles* A', B', C', D' *est égal à la somme des rayons des cercles opposés* A' *et* C', *moins la somme des deux autres* B' *et* D';

2° *Le diamètre du cercle* O_1, *qui passe par les centres des cercles* A_1, B_1, C_1, D_1, *est égal à la somme des rayons des cercles opposés* A_1 *et* C_1, *moins la somme des deux autres* B_1 *et* D_1;

3° *Le diamètre du cercle* O'', *qui passe par les centres des cercles* A'', B'', C'', D'', *est égal à la somme des rayons de ces cercles ;*

4° *Le diamètre du cercle* O_2, *qui passe par les centres des cercles* A_2, B_2, C_2, D_2, *est égal à la somme des rayons de ces cercles.*

1° Les côtés AB, BC, CD, DA étant pris successivement pour axes de projection, on a

$$\begin{aligned}
A' + T_1 &= 2u'_{1a} = 2(M'_a + \rho'), \quad + \\
B' + T_2 &= 2u'_{2b} = 2(M'_b - \rho'), \quad - \\
C' + T_1 &= 2u'_{3c} = 2(M'_c + \rho'), \quad + \\
D' + T_2 &= 2u'_{4d} = 2(M'_d - \rho'). \quad -
\end{aligned}$$

Combinant ces équations d'après le signe mis en regard, il vient

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A' + C' - B' - D' + 2T_1 - 2T_2 \\ &\quad = 8\rho' + 2(M'_a + M'_c - M'_b - M'_d). \end{aligned} \right.$$

Prenant le côté AB pour axe de projection, on obtient

$$\begin{aligned}
A' + B' &= 2u_{1a}, \\
B' + 2T_1 - C' &= 2u_{2a}, \\
2T_1 - C' + D' &= 2u_{3a} \\
D' + A' &= 2u_{4a},
\end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad A' + B' + D' + 2T_1 - C' = u_{1a} + u_{2a} + u_{3a} + u_{4a} = 4M'_a. \quad +$$

Projetant sur le côté BC, on a

$$A' + B' = 2u_{1b},$$
$$B' + C' = 2u_{2b},$$
$$C' + 2T_2 - D' = 2u_{3b},$$
$$2T_2 - D' + A' = 2u_{4b},$$

d'où

(3) $B' + C' + A' + 2T_2 - D' = u_{1b} + u_{2b} + u_{3b} + u_{4b} = 4M'_b. \quad -$

Le côté CD étant l'axe de projection, il vient

$$2T_1 - A' + B' = 2u_{1c},$$
$$B' + C' = 2u_{2c},$$
$$C' + D' = 2u_{3c},$$
$$D' + 2T_1 - A' = 2u_{4c},$$

d'où

(4) $C' + D' + B' + 2T_1 - A' = u_{1c} + u_{2c} + u_{3c} + u_{4c} = 4M'_c. \quad +$

Enfin, projetant sur le côté DA, on a

$$A' + 2T_2 - B' = 2u_{1d},$$
$$2T_2 - B' + C' = 2u_{2d},$$
$$C' + D' = 2u_{3d},$$
$$D' + A' = 2u_{4d};$$

d'où

(5) $D' + A' + C' + 2T_2 - B' = u_{1d} + u_{2d} + u_{3d} + u_{4d} = 4M'_d. \quad -$

Combinant les équations (2), (3), (4), (5) selon les signes mis en regard, il vient

(6) $B' + D' - A' - C' + 2T_1 - 2T_2 = 2(M'_a + M'_c - M'_b - M'_d)$;

retranchant l'équation (6) de l'équation (1), on a

$$A' + C' - B' - D' = 4\rho' = 2O'.$$

3° Désignant par ρ'' le rayon du cercle $p'_1 p'_2 p'_3 p'_4$ dont le centre est en M'', et projetant successivement sur AB, BC, CD, DA, on a

$$\begin{aligned} C'' - T_1 &= 2p'_{3a} = 2(\rho'' - M''_a), \quad + \\ T_2 - D'' &= 2p'_{4b} = 2(M''_b - \rho''), \quad - \\ T_1 - A'' &= 2p'_{1c} = 2(M''_c - \rho''), \quad - \\ B'' - T_2 &= 2p'_{2d} = 2(\rho'' - M''_d). \quad + \end{aligned}$$

Combinant ces équations d'après les signes mis en regard, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A'' + B'' + C'' + D'' - 2T_1 - 2T_2 \\ & = 8\rho'' - 2(M''_a + M''_b + M''_c + M''_d). \end{aligned} \right.$$

Prenant le côté AB pour axe de projection, on obtient

$$\begin{aligned} A'' + 2T_1 + B'' &= 2p_{1a}, \quad + \\ - B'' + C'' &= 2p_{2a}, \quad - \\ C'' - D'' &= 2p_{3a}, \quad - \\ D'' + A'' + 2T_1 &= 2p_{4a}, \quad + \end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad A'' + B'' + D'' + 2T_1 - C'' = p_{1a} + p_{2a} + p_{3a} + p_{4a} = 4M''_a.$$

Projetant sur le côté BC, il vient

$$\begin{aligned} A'' + B'' + 2T_2 &= 2p_{1b}, \quad + \\ B'' + 2T_2 + C'' &= 2p_{2b}, \quad + \\ C'' - D'' &= 2p_{3b}, \quad + \\ - D'' + A'' &= 2p_{4b}, \quad + \end{aligned}$$

d'où

$$(3) \quad B'' + C'' + A'' + 2T_2 - D'' = p_{1b} + p_{2b} + p_{2b} + p_{4b} = 4M''_b.$$

Projetant sur le côté CD, il vient

$$\begin{aligned} - A'' + B'' &= 2p_{1c}, \quad + \\ B'' + C'' + 2T_1 &= 2p_{2c}, \quad + \\ C'' + 2T_1 + D'' &= 2p_{3c}, \quad + \\ - D'' + A'' &= 2p_{4c}, \quad - \end{aligned}$$

d'où

(4) $C'' + D'' + B'' + 2T_1 - A'' = p_{1c} + p_{2c} + p_{3c} + p_{4c} = 4M''_c$.

Enfin, le côté DA étant pris pour axe de projection, on a

$$\begin{aligned} -A'' + B'' &= 2p_{1d}, \quad - \\ -B'' + C'' &= 2p_{2d}, \quad + \\ C'' + D'' + 2T_2 &= 2p_{3d}, \quad + \\ D'' + 2T_2 + A'' &= 2p_{4d}, \quad + \end{aligned}$$

d'où

(5) $D'' + A'' + C'' + 2T_2 - B'' = p_{1d} + p_{2d} + p_{3d} + p_{3d} = 4M''_d$.

En ajoutant les équations (2), (3), (4), (5), on obtient

(6) $A'' + B'' + C'' + D'' + 2T_1 + 2T_2 = 2(M''_a + M''_b + M''_c + M''_d)$;

ajoutant les équations (1) et (6), il vient

$$A'' + B'' + C'' + D'' = 4\rho'' = 2O''.$$

On démontre d'une manière analogue la deuxième et la quatrième partie du théorème