NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MOUTIER

Sur la diacaustique d'une surface plane

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 128-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__128_0>

SUR LA DIACAUSTIQUE D'UNE SURFACE PLANE;

PAR M. J. MOUTIER.

Soient deux milieux réfringents séparés par une surface plane, A un point lumineux, MN l'intersection de cette surface par un plan perpendiculaire mené par le point A. Les rayons lumineux partant du point A se réfractent à la surface de séparation des deux milieux; l'enveloppe des rayons réfractés est la caustique par réfraction ou la *diacaustique*. La forme de cette courbe peut se déterminer par des considérations géométriques assez simples.

1° Supposons le point lumineux A placé dans le milieu le plus réfringent; l'indice de réfraction n est alors inférieur à l'unité.

Soient AB un rayon incident, BR le rayon réfracté, A' le point symétrique du point lumineux A par rapport à MN, C le point où le prolongement du rayon réfracté BR coupe AA'. L'angle $BAA' = i$ est l'angle d'incidence; l'angle $BCA' = r$ est l'angle de réfraction.

Construisons le cercle qui passe par les trois points A, B, A'; la droite BC prolongée coupe la circonférence au point P. Cette droite est la bissectrice de l'angle APA'; l'angle BPA' est inscrit dans le même segment que l'angle BAA'; on a donc

$$BPA' = APC = i.$$

Dans les triangles APC, A'PC, on a

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

$$\frac{A'C}{A'P} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

On déduit de là

$$\frac{AC + A'C}{AP + A'P} = n.$$

La somme des rayons vecteurs AP et A'P est constante : le lieu des points P est donc une ellipse, qui a pour foyers les points A et A', pour excentricité l'indice de réfraction.

Le prolongement du rayon réfracté BP, qui divise l'angle APA' en deux parties égales, est donc la normale à l'ellipse au point P; par suite la diacaustique est la développée de cette ellipse.

2° Supposons le point lumineux A placé dans le milieu le moins réfringent; l'indice de réfraction n est alors supérieur à l'unité.

Soient AB un rayon incident, BR le rayon réfracté, A' le point symétrique du point lumineux A par rapport à MN, C le point où le prolongement du rayon réfracté BR coupe la droite AA' prolongée. L'angle $BAA' = i$ est l'angle d'incidence; l'angle $BCA' = r$ est l'angle de réfraction.

Construisons le cercle qui passe par les trois points A, B, A'; la droite BC coupe la circonférence au point P. Cette droite est la bissectrice de l'angle formé par la droite PA avec le prolongement de la droite PA'; l'angle BPA' est inscrit dans le même segment que l'angle BAA' : on a donc

$$BPA' = APC = i.$$

Dans les triangles APC, A'PC, on a

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

$$\frac{A'C}{A'P} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

On déduit de là

$$\frac{A'C - AC}{A'P - AP} = n.$$

La différence des rayons vecteurs A'P et AP est constante; le lieu des points P est donc une hyperbole qui a pour foyers les points A et A', pour excentricité l'indice de réfraction.

Le prolongement du rayon réfracté BP, qui divise en deux parties égales l'angle formé par AP et le prolongement de A'P, est donc la normale à l'hyperbole au point P; par suite la diacaustique est la développée de cette hyperbole.