Nouvelles annales de mathématiques

Floquet

Intégration de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'hyperboloïde réglé

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 120-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__120_1>

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER PAR LES LIGNES DE COURBURE DE L'HYPERBOLOÏDE RÉGLÉ.

Par M. FLOQUET,
Professeur au lycée de Belfort.

Soit l'hyperboloïde réglé

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

où nous supposons $a>b$.

Coordonnées u et v.

Considérons les deux couples d'équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}&=\frac{z}{c}\cos u+\sin u,\\ \frac{y}{b}&=\frac{z}{c}\sin u-\cos u;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}&=\frac{z}{c}\cos v-\sin v,\\ \frac{y}{b}&=\frac{z}{c}\sin v+\cos v.\end{aligned}\right.$$

u variant de zéro à 2π, le couple (1) représente successivement toutes les génératrices de l'un des systèmes, et, v variant de zéro à 2π, le couple (2) donne toutes les génératrices de l'autre. Or nous pouvons prendre comme lignes coordonnées d'un point de la surface les deux génératrices qui passent par ce point; mais ces deux génératrices sont définies par un couple de valeurs des paramètres angulaires u et v : donc nous dirons que les deux coordonnées d'un point de l'hyperboloïde sont u et v.

Transformation des coordonnées.

Évaluons les coordonnées x, y, z d'un point de la surface en fonction de son u et de son v. Il nous suffit, pour cela, de résoudre par rapport à x, y, z les quatre équations (1) et (2), lesquelles se réduisent à trois. Nous trouvons ainsi

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\,\frac{\cos\dfrac{u+v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}},\\ y &= b\,\frac{\sin\dfrac{u+v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}},\\ z &= c\,\frac{\cos\dfrac{u-v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Problème. — *Trouver les deux équations en u et v qui représentent les deux lignes de courbure passant par le point* $(u = 0, v = v_0)$.

Pour résoudre la question, nous pouvons opérer de deux façons : 1° soit en remplaçant simplement x et y par les valeurs (3) dans l'équation connue de la projection d'une ligne de courbure sur le plan des xy, puis déterminant convenablement la constante; 2° soit en suivant la marche directe.

Premier procédé. — L'équation (voir *Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. II, p. 509) de la projection d'une ligne de courbure sur le plan des xy est

$$\begin{aligned} &a^2(b^2+c^2)x^2C'^2 \\ &\quad+[b^2(a^2+c^2)x^2-a^2(b^2+c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)]C' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -b^2(a^2+c^2)y^2=0. \end{aligned}$$

Or les formules (3) donnent

$$x^2=a^2\frac{1+\cos(u+v)}{1-\cos(u-v)},\quad y^2=b^2\frac{1-\cos(u+v)}{1-\cos(u-v)}.$$

Substituons

$$\begin{aligned} &a^4\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}[1+\cos(u+v)]C'^2 \\ &\quad+a^2b^2\Big\{1+\cos(u+v)-\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}[1-\cos(u+v)] \\ &\qquad\qquad -\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}[1-\cos(u-v)]\Big\}C' \\ &\qquad\qquad\qquad -b^4[1-\cos(u+v)]=0. \end{aligned}$$

Mais si nous posons

$$C'=\frac{b^2}{a^2}C,\quad \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}=k^2\quad (k \text{ compris entre zéro et } 1),$$

l'équation précédente s'écrira

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-k^2)[1+\cos(u+v)]C^2 \\ &\quad-2[(1-k^2)\sin u\sin v-\cos u\cos v]C \\ &\qquad\qquad -[1-\cos(u+v)]=0. \end{aligned}\right.$$

Déterminons maintenant la constante C, de façon que, pour $u=0$, on ait $v=v_0$,

$$(5)\quad (1-k^2)(1+\cos v_0)C^2+2\cos v_0.C-(1-\cos v_0)=0;$$

puis éliminons C : le résultat de l'élimination de C entre les deux équations du second degré (4) et (5) est, d'après la formule ordinaire,

$$\begin{aligned}&\Big\{\cos v_0 [1 + \cos(u+v)]\\ &\qquad + (1+\cos v_0)[(1-k^2)\sin u \sin v - \cos u \cos v]\Big\}\\ &\qquad \times \Big\{\cos v_0 [1 - \cos(u+v)]\\ &\qquad\qquad + (1-\cos v_0)[(1-k^2)\sin u \sin v - \cos u \cos v]\Big\}\\ &\qquad\qquad = (1-k^2)[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2.\end{aligned}$$

Ce résultat se met successivement sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned}&(1-k^2)[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2\\ &\quad = [\cos v_0 - \cos(u+v) - k^2 \sin u \sin v]^2 - k^4 \cos^2 v_0 \sin^2 u \sin^2 v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&k^2[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2\\ &\quad - 2k^2[\cos v_0 - \cos(u+v)]\sin u \sin v + k^4 \sin^2 v_0 \sin^2 u \sin^2 v = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1-k^2\sin^2 u \sin^2 v)\sin^2 v_0 - \cos(u+v)\cos(u-v) - 1\\ &\quad = -2\cos u \cos v \cos v_0.\end{aligned}$$

Élevons maintenant les deux membres au carré, et remplaçons $\cos^2 v_0$ par $1 - \sin^2 v_0$:

$$\begin{aligned}&[(1-k^2\sin^2 u \sin^2 v)\sin^2 v_0 - \cos(u+v)\cos(u-v) - 1]^2\\ &\quad = 4\cos^2 u \cos^2 v (1 - \sin^2 v_0).\end{aligned}$$

Ordonnons par rapport à $\sin v_0$:

$$\begin{aligned}&(1-k^2\sin^2 u \sin^2 v)^2 \sin^4 v_0\\ &\quad + 2\Big\{2\cos^2 u \cos^2 v - (1-k^2\sin^2 u \sin^2 v)\\ &\qquad\qquad \times [1 + \cos(u+v)\cos(u-v)]\Big\}\sin^2 v_0\\ &\qquad\qquad + [\cos(u+v)\cos(u-v) + 1]^2 - 4\cos^2 u \cos^2 v = 0.\end{aligned}$$

Enfin, remarquant les deux identités

$$\begin{aligned}&2\cos^2 u \cos^2 v - (1-k^2\sin^2 u \sin^2 v)[1 + \cos(u+v)\cos(u-v)]\\ &\quad = -[\sin^2 u(1-k^2\sin^2 v)\cos^2 v + \sin^2 v(1-k^2\sin^2 u)\cos^2 u],\end{aligned}$$

$$[\cos(u+v)\cos(u-v) + 1]^2 - 4\cos^2 u \cos^2 v = (\cos^2 u - \cos^2 v)^2,$$

nous écrirons notre équation

$$\begin{aligned}(1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v)^2 \sin^4 v_0 \\ - 2[\sin^2 u (1 - k^2 \sin^2 v) \cos^2 v + \sin^2 v (1 - k^2 \sin^2 u) \cos^2 u] \\ \times \sin^2 v_0 + (\cos^2 u - \cos^2 v)^2 = 0.\end{aligned}$$

Elle est alors de la forme bicarrée

$$\alpha^2 \sin^4 v_0 - 2\beta \sin^2 v_0 + \gamma^2 = 0.$$

Résolvons par rapport à $\sin v_0$

$$\sin v_0 = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta + \alpha\gamma}{2}} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta - \alpha\gamma}{2}};$$

mais on a

$$\frac{\beta + \alpha\gamma}{2} = \sin^2 v \cos^2 u (1 - k^2 \sin^2 u),$$

$$\frac{\beta - \alpha\gamma}{2} = \sin^2 u \cos^2 v (1 - k^2 \sin^2 v).$$

Donc la valeur de $\sin v_0$ est

$$(6) \quad \sin v_0 = \frac{\pm \sin v \cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \pm \sin u \cos v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v}.$$

Il semblerait, d'après cela, que $\sin v_0$ a quatre valeurs; mais il n'en est rien : deux seulement répondent à la question. L'équation (5) exprime, en effet, non pas que, pour $u = 0$, on a $v = v_0$, comme il le faudrait, mais simplement que, pour $u = 0$, on a $\cos v = \cos v_0$, c'est-à-dire $v = v_0$ ou $v = 2\pi - v_0$. De là l'introduction de deux valeurs étrangères au problème, puisqu'elles appartiennent à $\sin(2\pi - v_0)$ ou $-\sin v_0$, et non à $+\sin v_0$. Il est facile de distinguer ces deux solutions étrangères; car, dans la formule (6), faisons les hypothèses $u = 0$ et $v = v_0$, nous trouvons

$$\sin v_0 = \pm \sin v_0 \pm 0.$$

C'est donc le signe — du premier signe $\pm$ qu'il faut supprimer pour les éliminer, de sorte que, finalement, les deux équations en u et v qui représentent les deux lignes de courbure passant par le point $(u=0,\ v=v_0)$ sont

$$(7)\quad \sin v_0 = \frac{+\sin v\cos u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\pm\sin u\cos v\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}{1-k^2\sin^2 u\sin^2 v}.$$

Second procédé. — Suivons la marche directe. Calculons dx, dy, dz :

$$dx = a\frac{\cos u\,dv-\cos v\,du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}},\quad dy = b\frac{\sin u\,dv-\sin v\,du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}},$$

$$dz = c\frac{dv-du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}};$$

puis écrivons que $(p\,dx+q\,dy-dz)$ est nul

$$(a\cos u.p+b\sin u.q-c)dv-(a\cos v.p+b\sin v.q-c)du=0,$$

ce qui donne

$$a\cos u.p+b\sin u.q=c,$$
$$a\cos v.p+b\sin v.q=c.$$

De là déduisons p et q :

$$p=\frac{c}{a}\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\cos\frac{u-v}{2}},\quad q=\frac{c}{b}\frac{\sin\frac{u+v}{2}}{\cos\frac{u-v}{2}}.$$

Remplaçons enfin, dans l'égalité

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

les lettres x, y, z, p, q par leurs valeurs en u et v, et, toutes réductions faites, nous obtenons l'équation

$$(8)\quad \frac{du^2}{a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u+c^2}=\frac{dv^2}{a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v+c^2},$$

qui est l'équation différentielle des lignes de courbure de l'hyperboloïde proposé. Or, si nous désignons toujours $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}$ par k^2, l'équation (8) s'écrit

$$(9) \qquad \frac{du^2}{1 - k^2 \sin^2 u} = \frac{dv^2}{1 - k^2 \sin^2 v};$$

donc l'équation différentielle à intégrer n'est autre chose que l'équation d'Euler. Si nous posions

$$\sin u = \mathrm{X}, \quad \sin v = \mathrm{Y},$$

nous l'aurions sous sa forme ordinaire, savoir :

$$(10) \qquad \frac{d\mathrm{X}^2}{(1 - \mathrm{X}^2)(1 - k^2\mathrm{X}^2)} = \frac{d\mathrm{Y}^2}{(1 - \mathrm{Y}^2)(1 - k^2\mathrm{Y}^2)}.$$

En intégrant alors cette équation par une des méthodes connues, nous achèverions la solution du problème.

Intégration de l'équation d'Euler.

Le rapprochement des deux procédés de solution donne l'intégrale de l'équation d'Euler et en fournit une méthode d'intégration. Il est évident, en effet, que l'équation (7) est l'intégrale de l'équation différentielle (9), et par suite que l'équation

$$\mathrm{Z} = \frac{+ \mathrm{Y}\sqrt{1 - \mathrm{X}^2}\sqrt{1 - k^2\mathrm{X}^2} \pm \mathrm{X}\sqrt{1 - \mathrm{Y}^2}\sqrt{1 - k^2\mathrm{Y}^2}}{1 - k^2\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2}$$

est l'intégrale de l'équation différentielle (10), $\sin u$, $\sin v$ et $\sin v_0$ ayant été remplacés par X, Y et Z. Ainsi le problème proposé conduit à l'intégrale algébrique d'Euler.

L'équation (10) se décompose en deux, il est vrai,

$$(11) \qquad \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1 - \mathrm{X}^2)(1 - k^2\mathrm{X}^2)}} = \frac{d\mathrm{Y}}{\sqrt{(1 - \mathrm{Y}^2)(1 - k^2\mathrm{Y}^2)}},$$

$$(12) \qquad \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{(1 - \mathrm{X}^2)(1 - k^2\mathrm{X}^2)}} + \frac{d\mathrm{Y}}{\sqrt{(1 - \mathrm{Y}^2)(1 - k^2\mathrm{Y}^2)}} = 0;$$

mais il n'en résulte aucun inconvénient, et l'on voit facilement que (11) intègre

$$(13)\quad Z = \frac{+Y\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-k^2X^2}-X\sqrt{1-Y^2}\sqrt{1-k^2Y^2}}{1-k^2X^2Y^2},$$

tandis que (12) intègre

$$(14)\quad Z = \frac{+Y\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-k^2X^2}+X\sqrt{1-Y^2}\sqrt{1-k^2Y^2}}{1-k^2X^2Y^2}.$$

Si, en effet, nous supposons $k = 0$, l'ellipse de gorge devient circulaire, mais les termes des équations (11) et (12) aussi, de sorte qu'on les intègre de suite.

(11) devient $du = dv$, et donne, par conséquent, $v_0 = v - u$ (parallèle), ce que fournit précisément (7) quand on y garde le signe —, c'est-à-dire ce que fournit (13).

(12) devient $du + dv = 0$, et donne, par conséquent, $v_0 = v + u$ (méridien), ce que fournit précisément (7) quand on y garde le signe +, c'est-à-dire ce que fournit (14).

Ainsi (11) est l'intégrale de (13), et (12) celle de (14).

En résumé, on voit que l'équation en u et v de la ligne de courbure d'un hyperboloïde réglé est précisément l'intégrale algébrique d'Euler où l'on a introduit les amplitudes. Les lignes de courbure de cette surface intègrent donc l'équation différentielle d'Euler, grâce à l'emploi de ces coordonnées u et v; et même l'intégrale s'amène facilement à la forme qu'on lui donne d'habitude.