Nouvelles annales de mathématiques

A. Picart

Développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes, entières et positives d'une autre fonction. Série de Taylor. Série de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 69-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__69_1>

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION
suivant les puissances ascendantes, entières et positives d'une autre fonction.
Série de Taylor. — Série de Lagrange.

PAR M. A. PICART.

On sait que, si $F(z)$ est une fonction synectique, c'est-à-dire continue et bien déterminée dans une certaine portion du plan, l'intégrale $\int F(z)\,dz$, prise tout le long d'un contour fermé C intérieur à cette région, est égale à zéro.

Cela posé, considérons l'expression $\frac{f(Z)-f(z)}{\varphi(Z)-\varphi(z)}$, où $f(Z)$ et $\varphi(Z)$ sont des fonctions synectiques de Z dans une certaine aire A, z désignant la valeur de Z qui correspond à un point O situé dans cette aire. Si $\varphi(\mathrm{Z})$ ne peut être égal à $\varphi(z)$ que pour $\mathrm{Z} = z$, et si la dérivée $\varphi'(\mathrm{Z})$ ne s'annule pour aucun point de l'aire, il est évident que cette expression est une fonction synectique de Z, et l'on a

$$\int \frac{f(\mathrm{Z}) - f(z)}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)}\, d\mathrm{Z} = 0,$$

cette intégrale étant prise tout le long d'un contour C intérieur à l'aire, ou

$$f(z) \int \frac{d\mathrm{Z}}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)} = \int \frac{f(\mathrm{Z})\, d\mathrm{Z}}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)}.$$

Mais $\dfrac{1}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)} = \dfrac{1}{\varphi'(z)}\,\dfrac{1}{\mathrm{Z} - z} + \psi(\mathrm{Z})$ (*), $\psi(\mathrm{Z})$ désignant une fonction de Z synectique dans toute l'étendue de l'aire; donc

$$f(z) \int \frac{d\mathrm{Z}}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)} = \frac{f(z)}{\varphi'(z)} \int \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - z}.$$

Or on sait que l'intégrale, prise tout le long d'un contour, ne change pas de valeur quand le contour se déforme sans franchir aucun point pour lequel la différentielle devienne infinie ou acquière des valeurs égales; donc l'intégrale $\displaystyle\int \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z} - z}$ est égale à l'intégrale prise tout le long d'une circonférence de centre O, c'est-à-dire à

$$\int_0^{2\pi} \frac{r i e^{\theta i}\, d\theta}{r e^{\theta i}}, \quad \text{ou} \quad \int_0^{2\pi} i\, d\theta, \quad \text{ou} \quad 2\pi i;$$

donc

$$f(z) \int \frac{d\mathrm{Z}}{\varphi(\mathrm{Z}) - \varphi(z)} = \frac{f(z)}{\varphi'(z)}\, 2\pi i.$$

(*) Cette formule n'est démontrée que pour une fonction entière $\varphi(z)$; mais, comme la série de Taylor s'ensuit pour une fonction synectique, il est facile de l'étendre à une pareille fonction.

D'autre part, si l'on suppose que le long du contour C le module de $\varphi(Z)$ soit plus grand que celui de $\varphi(z)$, l'expression $\frac{1}{\varphi(Z)-\varphi(z)}$ pouvant se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{\varphi(z)}{\varphi(Z)}$, savoir :

$$\frac{1}{\varphi(Z)}+\frac{\varphi(z)}{\varphi^2(Z)}+\frac{\varphi^2(z)}{\varphi^3(Z)}+\ldots+\frac{\varphi^n(z)}{\varphi^{n+1}(Z)}+\ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)-\varphi(z)}=\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}&+\varphi(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}\\&+\varphi^2(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}+\ldots\\&+\varphi^n(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^{n+1}(Z)}+\ldots;\end{aligned}$$

donc, enfin,

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{\varphi'(z)}{2\pi i}\Big[\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}&+\varphi(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}\\&+\varphi^2(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}+\ldots\Big].\end{aligned}$$

Et, si l'on désigne par $F(z)$ la fonction (à une constante près) qui a pour dérivée $f(z)$, on a, en intégrant,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}F(z)=K+\frac{1}{2\pi i}\Big[\varphi(z)\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}&\\+\frac{\varphi^2(z)}{2}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}&\\+\frac{\varphi^3(z)}{3}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}&+\ldots\\+\frac{\varphi^n(z)}{n}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^n(Z)}&+\ldots\Big],\end{aligned}\right.$$

K étant une constante.

Ainsi, si, dans l'intérieur d'un contour C, le module de la fonction synectique $\varphi(z)$ est inférieur au plus petit module que prend cette fonction sur la ciconférence du contour; et si, de plus, $\varphi(z)$ ne peut pas prendre la même valeur pour deux points différents de l'intérieur du contour, et que la dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans cette portion de plan; la fonction $F(z)$, synectique dans cette étendue, peut se développer suivant les puissances ascendantes, entières et positives de $\varphi(z)$, pour toutes les valeurs de z intérieures au contour. Et, si l'on suppose que $\varphi(z)$ ne s'annule que pour une valeur a de z correspondant à un point O de l'intérieur du contour, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(z)=F(a)+\frac{1}{2\pi i}\Bigg[\varphi(z)\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi(z)} \\ +\frac{\varphi^2(z)}{2}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^2(z)} \\ +\frac{\varphi^3(z)}{3}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^3(z)}+\ldots \\ +\frac{\varphi^n(z)}{n}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^n(z)}+\ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Telle est la formule générale qui donne le développement d'une fonction $F(z)$, suivant les puissances ascendantes d'une autre fonction $\varphi(z)$.

Supposons que $\varphi(z)=z-a$, alors la formule devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(z)=F(a)+\frac{1}{2\pi i}\Bigg[(z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{z-a} \\ +\frac{(z-a)^2}{2}\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2}+\ldots \\ +\frac{(z-a)^n}{n}\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n}+\ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Ici, comme le module de $z - a$, qui est constant sur une circonférence de centre O, va constamment croissant avec le rayon de ce cercle, on voit que le développement a lieu pour toutes les valeurs de z correspondant aux points de l'intérieur de la circonférence de centre O au delà de laquelle la fonction $F(z)$ cesse d'être synectique.

On sait que, lorsqu'une série, qui procède suivant les puissances ascendantes entières d'une variable, est convergente, la série des dérivées de ses différents termes est aussi convergente et a pour somme la dérivée de la somme de la première série; donc on a

$$
\begin{aligned}
F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& \int \frac{F'(z)\,dz}{z-a} + (z-a)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2} \\
& + (z-a)^2 \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} + \ldots \\
& + (z-a)^n \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F''(z) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2} + 2(z-a)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} \\
& + 3(z-a)^2 \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4} + \ldots \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F'''(z) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& 2\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} \\
& + 2.3(z-a)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4} + \ldots \Bigg],
\end{aligned}
$$

. . . . ,

$$
\begin{aligned}
F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& 2.3.4\ldots(n-1)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n} \\
& + 2.3\ldots n\,(z-a)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots \Bigg];
\end{aligned}
$$

d'où

$$(4)\quad \begin{cases} F'(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{F'(z)\,dz}{z-a}, \\ F''(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2}, \\ F'''(a) = \dfrac{2}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3}, \\ F^{\text{IV}}(a) = \dfrac{2.3}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F^{(n)}(a) = \dfrac{2.3\ldots(n-1)}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n}. \end{cases}$$

Cette dernière formule, si l'on pose $F'(z) = f(z)$, peut s'écrire

$$f^n(a) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui enveloppe le point O, et dans l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ est synectique. Si ce contour est une circonférence de centre O et de rayon r, on peut la mettre sous la forme

$$f^n(a) = \frac{1.2.3\;..n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

M désignant la valeur maximum que prend le module de $f(z)$ sur la circonférence, le module de l'intégrale est moindre que $\int_0^{2\pi} M\,d\theta$, c'est-à-dire que $2\pi M$; et, par suite, le module de $f^n(a)$ est moindre que

$$1.2.3\ldots n\frac{M}{r^n}.$$

Cette remarque nous sera utile plus loin.

Remplaçant dans la formule (3) toutes les intégrales définies par leurs valeurs (4), on obtient la série de Taylor

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &F(z) = F(a) + (z-a)F'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2}F''(a) \\ &\quad + \frac{(z-a)^3}{1.2.3}F'''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(a) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Supposons, en second lieu, que la fonction $\varphi(z)$ soit égale à $\frac{z-a}{\psi(z)}$, et désignons cette quantité par x. La formule générale (2) devient dans ce cas

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) = F(a) + \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& x\int\frac{F'(z)\psi(z)dz}{z-a} \\ & + \frac{x^2}{2}\int\frac{F'(z)\psi^2(z)dz}{(z-a)^2} + \ldots \\ & + \frac{x^n}{n}\int\frac{F'(z)\psi^n(z)dz}{(z-a)^n} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Mais nous venons de voir que généralement

$$(7)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\chi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{\chi^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n},$$

$\chi(z)$ désignant une fonction synectique de z dans l'intérieur du contour C; donc le développement précédent peut s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &F(z) = F(a) + xF'(a)\psi(a) + \frac{x^2}{1.2}D_a[F'(a)\psi^2(a)] \\ &\quad + \frac{x^3}{1.2.3}D^2_{a^2}[F'(a)\psi^3(a)] + \ldots \\ &\quad + \frac{x^n}{1.2\ldots n}D^{n-1}_{a^{n-1}}[F'(a)\psi^n(a)] + \ldots \end{aligned}\right.$$

C'est la formule de Lagrange qui exprime une fonction $F(z)$ de l'une des racines de l'équation $\frac{z-a}{\psi(z)}=x$, ou $z=a+x\psi(z)$, en série procédant suivant les puissances ascendantes de x.

Mais reportons-nous aux conditions générales qui doivent être remplies pour qu'une fonction $F(z)$ soit développable suivant les puissances d'une autre fonction $\varphi(z)$, pour toutes les valeurs de z qui correspondent à l'intérieur d'un certain contour C. Il faut que, dans toute l'étendue de l'aire embrassée par ce contour, le module de $\varphi(z)$ soit moindre que sur le périmètre de ce contour; de plus, que $\varphi(z)$ ne puisse prendre la même valeur pour deux points différents de cette aire, et que $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans l'intérieur du contour. Or, ici, la fonction $\varphi(z)$ est $\frac{z-a}{\psi(z)}$; pour $z=a$, elle s'annule [on suppose $\psi(a)$ différent de zéro]. Si l'on pose $z=a+re^{\theta i}$, le module de $\frac{z-a}{\psi(z)}$ ou de $\frac{re^{\theta i}}{\psi(a+re^{\theta i})}$ sera une fonction de r et de θ de la forme $\frac{r}{\varpi(r,\theta)}$ [$\varpi(r,\theta)$ ne s'annulant ni ne devenant infini pour $r=0$]. En l'égalant à une constante positive m, on aura le lieu des points pour lesquels la fonction $\varphi(z)$ prend le même module m. Pour des valeurs suffisamment petites de m, on voit aisément que l'une des branches de cette courbe devra se réduire à un contour fermé s, dans l'intérieur duquel se trouve le point O. La fonction $\varphi(z)$ étant supposée uniforme (c'est-à-dire susceptible d'une seule valeur), si m croît à partir de zéro, le contour fermé s, qui, pour $m=0$, se réduit au point O, va toujours en s'élargissant par degrés insensibles jusqu'à ce que m ait atteint une certaine valeur μ pour laquelle ce contour isolé se réunit à une autre branche de la courbe pour s'ouvrir ensuite. Le contour correspondant à cette valeur μ est alors la limite C de l'aire dans l'intérieur de laquelle le module de $\varphi(z)$ est moindre que sur le périmètre. Mais quelle est cette valeur μ de m? Imaginons en chaque point du plan, qui a pour coordonnées r et θ, une perpendiculaire dont la longueur représente la valeur du module correspondant de $\varphi(z)$. Le lieu des extrémités de ces perpendiculaires est une certaine surface qui représente la variation du module. Les courbes de module constant dont il vient d'être question sont les projections des courbes de niveau de cette surface. La courbe limite C qui s'accole à une autre branche, c'est-à-dire qui acquiert un point multiple, est donc la projection d'une courbe de niveau située dans un plan tangent; et l'ordonnée du point de contact, ou la valeur correspondante du module, jouit de la propriété du maximum, savoir, que les dérivées partielles relatives à r et θ sont toutes deux nulles. Seulement ce n'est pas un maximum proprement dit, c'est ce qu'on peut appeler un maximum minimorum.

Le maximum minimorum d'une fonction de deux variables est la plus grande des valeurs minima que prend la fonction lorsque, l'une des variables restant fixe, l'autre varie. Or le module de $\varphi(z)$ est une fonction de r et de θ, savoir $\chi(r, \theta)$; la valeur maximum minimorum de ce module s'obtiendra donc en cherchant le minimum de $\chi(r, \theta)$ quand θ varie seul : c'est une certaine fonction $\lambda(r)$; puis en cherchant le maximum de cette fonction $\lambda(r)$.

Il faut bien distinguer le maximum d'une fonction du maximum minimorum. Ce qui caractérise le maximum ou le minimum proprement dit, c'est, si l'on représente la fonction de deux variables par une surface, que le plan tangent au point dont l'ordonnée est maximum ou minimum laisse autour de ce point la surface d'un même côté, tandis que, pour le maximum minimorum, le plan tangent coupe la surface en ce point.

Mais on sait que, toutes les fois que le module d'une fonction $\varphi(z)$ passe par un maximum ou un minimum, la dérivée $\varphi'(z)$ s'annule; donc μ est le plus petit des modules de $\varphi(z)$ qui correspondent aux diverses racines de $\varphi'(z) = 0$. Le contour C, dans l'intérieur duquel le module de $\varphi(z)$ est moindre qu'à la périphérie, est donc défini par l'équation

$$\text{mod.}\,\frac{z-a}{\psi(z)} = \mu.$$

Dans toute l'étendue de l'aire limitée par cette courbe, $\varphi'(z)$ est, d'après ce qui vient d'être dit, différent de zéro. De plus, la fonction $\varphi(z)$ ne peut prendre dans cette étendue la même valeur pour deux valeurs différentes de z; car, s'il en était ainsi, il faudrait que l'on eût

$$\frac{z-a}{\psi(z)} = \frac{z_1-a}{\psi(z_1)} = x,$$

le module de x étant inférieur à μ, c'est-à-dire que l'équation $z = a + x\psi(z)$ devrait avoir deux racines z et z_1 dans l'intérieur du contour C.

Or, si l'on désigne généralement par $a, b, c, \ldots, l$ les racines d'une équation $F(x) = 0$ comprises dans un contour C, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ leur ordre respectif de multiplicité, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{F'(x)\,dx}{F(x)} \quad \text{ou} \quad \int \frac{d \log F(x)}{dx}\,dx,$$

prise tout le long du contour C, est égale à

$$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda)\,2\pi i,$$

comme on le démontre aisément en mettant la fraction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \ldots + \frac{\lambda}{x-l} + \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}$$

et prenant les intégrales des différents termes. On obtient ainsi, en effet,

$$2\pi i(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda),$$

car, la fonction $\frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}$ étant synectique dans l'intérieur du contour, on a $\int \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}dx = 0$. Pour connaître le nombre des racines de l'équation $z=a+x\psi(z)$ comprises dans le contour C, il faut donc trouver la valeur de l'intégrale $\int \frac{d\log[z-a-x\psi(z)]}{dz}dz$. Mais

$$\log[z-a-x\psi(z)] = \log(z-a)+\log\left(1-\frac{x\psi(z)}{z-a}\right);$$

d'ailleurs, sur le contour C, le module de $\frac{\psi(z)}{z-a}$ est $\frac{1}{\mu}$, et, comme le module de x est plus petit que μ, le module de $\frac{x\psi(z)}{z-a}$ est plus petit que l'unité; on peut donc écrire

$$\log[z-a-x\psi(z)]$$
$$= \log(z-a) - \frac{x\psi(z)}{z-a} - \frac{1}{2}\frac{x^2\psi^2(z)}{(z-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3\psi^3(z)}{(z-a)^3} - \ldots .$$

Mais $\psi(z)$ étant supposé synectique dans l'intérieur et sur le périmètre du contour C, $\psi(z)$ peut se développer en série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de $z-a$; donc $\log[z-a-x\psi(z)]$ est égal à $\log(z-a)$, plus une série convergente procédant suivant les puissances entières, positives et négatives, de $z-a$. Si nous prenons la dérivée de cette fonction, nous aurons $\frac{1}{z-a}$, plus une série de termes qui ne renferment pas la première puissance de $\frac{1}{z-a}$; donc

$$\int \frac{d\log[z-a-x\psi(z)]}{dz}dz = \int \frac{dz}{z-a} + \sum \int \frac{A_p\,dz}{(z-a)^p}.$$

Or

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \quad \int \frac{A_p\, dz}{(z-a)^p} = \frac{i A_p}{r^{p-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(p-1)\theta i}\, d\theta = 0,$$

puisque p est différent de l'unité; donc, enfin,

$$2\pi i(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda) = 2\pi i,$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = 1,$$

c'est-à-dire que l'équation $z - a - x\psi(z) = 0$, quand le module de x est inférieur à μ, n'a qu'une racine comprise dans l'intérieur de la courbe C.

De cette discussion, nous pouvons conclure que la série de Lagrange (8) a lieu pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur au plus petit μ des modules de $\frac{z-a}{\psi(z)}$ qui correspondent aux racines de l'équation

$$(z-a)\psi'(z) - \psi(z) = 0,$$

ou au plus petit μ des modules de α qui satisfont aux équations simultanées

$$(z-a)\psi'(z) - \psi(z) = 0,$$
$$1 - \alpha\psi'(z) = 0,$$

et qu'elle fournit le développement relatif à la racine z de l'équation $z = a + x\psi(z)$ qui est comprise, à l'exclusion des autres, dans l'intérieur du contour fermé C défini par l'équation

$$\text{mod.} \frac{z-a}{\psi(z)} = \mu.$$

On peut donc dire que c'est la racine de plus petit module.

Du reste, on peut reconnaître que la série (8) est convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur au maximum des modules minima qu'acquiert la fonction $\frac{z-a}{\psi(z)}$ sur chacune des circonférences concentriques qui ont leur centre en O; car le module du terme général $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,D^{n-1}_{a^{n-1}}[F'(a)\psi^n(a)]$ est, d'après une formule démontrée ci-dessus, moindre que

$$\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}\,1.2.3\ldots(n-1)\frac{\mu m^n}{r^{n-1}},\quad \text{ou}\quad \frac{\mu r}{n}\left(\frac{\rho m}{r}\right)^n,$$

ρ désignant le module de x, μ et m les modules maxima de $F'(z)$ et de $\psi(z)$ sur la circonférence de rayon r décrite du point O comme centre; et, par suite, la série est convergente si $\frac{\rho m}{r} < 1$, ou $\rho < \frac{r}{m}$. La plus grande valeur de $\frac{r}{m}$ donnera donc la limite supérieure que ne devra pas dépasser ρ, c'est-à-dire le module de x, pour qu'on soit assuré de la convergence de la série (8).

Telles sont les conditions auxquelles a lieu la série de Lagrange. Il me semble que jusqu'ici ces conditions n'avaient pas encore été établies avec le même degré de précision. En appliquant la série de Maclaurin au développement de la fonction $F(z)$ suivant les puissances ascendantes, entières et positives de x, et invoquant le théorème célèbre de Cauchy relatif à ce développement, on limitait le cercle de convergence de la série à la valeur de x de plus petit module pour laquelle l'équation a une racine double. Mais pourquoi la valeur de plus petit module? car généralement la convergence de la série de Maclaurin est limitée à la valeur de la variable pour laquelle la valeur de la fonction à détermination multiple, que l'on développe, devient infinie ou égale à une autre valeur de cette fonction, et cette valeur de la variable n'est pas nécessairement, comme vient de le démontrer

M. Maximilien Marie, celle qui a le plus petit module parmi les valeurs qui rendent la fonction ou sa dérivée infinie.

Par une méthode empruntée comme la nôtre à Cauchy, mais qui substitue aux intégrales définies prises le long d'un contour la considération équivalente des résidus, c'est-à-dire du coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement convergent suivant les puissances de $z-a$ d'une fonction qui devient infinie pour $z=a$, M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII) a montré que le développement s'applique à la racine de plus petit module de l'équation, et qu'il a lieu pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à l'inverse du module minimum de $\frac{\psi(z)}{z-a}$; c'est bien là la limite que nous avons trouvée. Il fait remarquer ensuite que ce module minimum correspond à l'une des valeurs de z fournies par l'équation

$$z=a+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)};$$

mais il ne s'attache pas à démontrer que cette valeur de z est, parmi toutes les racines de cette équation, celle qui fait prendre à la quantité x, dans l'équation $1-x\psi'(z)=0$, le plus petit module : il se borne à l'énoncer. Malgré cette petite lacune, le travail de M. Rouché a été considéré jusqu'alors comme le dernier mot sur la question; et, en effet, la considération du module minimum maximorum de $\frac{\psi(z)}{z-a}$, dont l'inverse lui donne la valeur limite de x, est préférable à la recherche directe du plus petit module de α satisfaisant aux équations

$$z=a+\frac{\psi(z)}{\psi'(z)},\quad 1-\alpha\psi'(z)=0.$$

Cependant, en examinant de près la méthode qu'il a suivie, on voit qu'elle suppose déjà connu le théorème de Cauchy relatif au développement d'une fonction suivant les puissances entières, positives ou négatives de la variable, tandis que celle que nous proposons ici se suffit à elle-même, et donne en même temps, par la même analyse, le théorème de Cauchy et celui de Lagrange.