

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13 (1874), p. 59-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__59_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Catalan.

Parmi toutes les manières de démontrer la *formule du binôme*, a-t-on remarqué celle-ci?

Soit

$$(1) \quad y = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

x étant compris entre $+1$ et -1 (exclusivement), de manière que la série soit convergente.

Si l'on prend les dérivées des deux membres, on a

$$y' = m \left[1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \right];$$

puis, en multipliant par $1+x$,

$$(1+x)y' = m \left[\begin{array}{c|c} 1 + \frac{m-1}{1} & x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \\ + 1 & + \frac{m-1}{1} \end{array} \middle| x^2 + \dots \right];$$

c'est-à-dire, à cause de l'égalité (1),

$$(1+x)y' = my,$$

ou

$$(2) \quad \frac{y'}{y} = m \frac{1}{1-x}.$$

On conclut, de cette équation *caractéristique*,

$$(3) \quad y = (1+x)^m.$$

2. On sait, depuis Dirichlet (?), qu'il n'est pas toujours permis de grouper, d'une manière arbitraire, les termes d'une série. L'exemple suivant me paraît très-propre à démontrer cette proposition.

Soit

$$l_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \\ - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \dots,$$

et, par conséquent,

$$2l_2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} \\ - \frac{1}{6} + \frac{2}{13} - \frac{1}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{8} + \dots$$

Si l'on réduit les termes semblables, il semble que l'on a

$$2l_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots,$$

ou, en groupant différemment les termes,

$$2l_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots,$$

c'est-à-dire $2l_2 = l_2!$