Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 59-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__59_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Catalan.

Parmi toutes les manières de démontrer la *formule du binôme*, a-t-on remarqué celle-ci?

Soit

$$(1)\qquad y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

x étant compris entre $+1$ et -1 (exclusivement), de manière que la série soit convergente.

Si l'on prend les dérivées des deux membres, on a

$$y' = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \ldots\right];$$

puis, en multipliant par $1+x$,

$$(1+x)y' = m\left[\begin{array}{l|l|l} 1 + \dfrac{m-1}{1} & x + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2} & x^2 + \ldots \\ + \quad 1 & + \quad \dfrac{m-1}{1} & \end{array}\right];$$

c'est-à-dire, à cause de l'égalité (1),

$$(1+x)y' = my,$$

ou

$$\frac{y'}{y} = m\,\frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

On conclut, de cette équation *caractéristique*,

$$y = (1+x)^m. \tag{3}$$

2. On sait, depuis Dirichlet (?), qu'*il n'est pas toujours permis de grouper, d'une manière arbitraire, les termes d'une série*. L'exemple suivant me paraît très-propre à démontrer cette proposition.

Soit

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$2l2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \frac{2}{13} - \frac{1}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

Si l'on réduit les termes semblables, *il semble* que l'on a

$$2l2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

ou, en *groupant différemment les termes*,

$$2l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

c'est-à-dire $2l2 = l2$!