NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LAISANT

# Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 13 (1874), p. 573-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__573_1>

# SUR LA LOXODROMIE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION QUELCONQUE;

PAR M. A. LAISANT.

Étant donnée une surface de révolution à méridien quelconque, on peut se proposer d'étudier la courbe qui rencontre tous les méridiens sous un angle constant donné. Nous la nommerons *loxodromie* de cette surface de révolution, par analogie avec la sphère.

L'axe de la surface étant pris pour axe des $z$, et les coordonnées étant rectangulaires, nous nous proposons de faire voir comment on peut toujours obtenir, sous forme différentielle, l'équation en coordonnées polaires de la projection de la courbe sur le plan des $xy$.

Soit $z = f(r)$ la relation qui existe entre le $z$ d'un point quelconque M de la surface et le rayon MI du parallèle correspondant, équation qui fixe la forme du méridien. Appelons $\alpha$ l'angle donné. Soient, au point M de la courbe cherchée, MT, $MT_1$ les tangentes au méridien et à cette courbe. Soit enfin $TT_1$ une perpendiculaire à MT. Dans le plan tangent $MTT_1$, projetons le triangle $MTT_1$ sur le plan des $xy$ en $mtt_1$.

Il est clair que MT se projette suivant le rayon vecteur $Om$ et $MT_1$ suivant la tangente à la projection cherchée. Donc l'angle $tmt_1 = v$ est l'angle que forme le rayon vecteur avec la tangente; par suite,

$$\tang v = \pm \frac{r}{r'_\omega}.$$

Or

$$\tang v = \frac{tt_1}{mt},$$

$$\tang \alpha = \frac{TT_1}{MT} = \frac{tt_1}{MT}.$$

Ainsi

$$\tang v = \tang \alpha \frac{MT}{mt}.$$

Or, dans le plan méridien considéré, l'équation de la courbe méridienne est $z = f(r)$. Donc

$$\frac{MT}{mt} = \sqrt{1 + [f'(r)]^2},$$

$$\frac{r}{r'_\omega} = \tang \alpha \sqrt{1 + [f'(r)]^2} = r\omega'_r,$$

$$\omega_r = \tang \alpha \frac{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}}{r}.$$

Toutes les fois qu'on pourra remonter à la fonction primitive, on aura donc, sous forme finie, l'équation cherchée.

1° Si $\alpha = 90°$, $\omega'_r = \infty$, $r'_\omega = 0$, $r = \text{const.}$, on retrouve dans ce cas un parallèle.

2° Si $\alpha = 0$, $\omega'_r = 0$, $\omega = \text{const.}$, la courbe se réduit à un méridien.

3° Lorsque le méridien est une droite, c'est-à-dire que la surface est conique, $f'(r) = \text{const.}$, et $\omega'_r$ prend la forme $k\frac{1}{r}$, d'où $\omega = k\log\frac{r}{C}$, $r = Ce^{\frac{\omega}{k}}$; de sorte que la projection est une spirale logarithmique.

4° Dans le cas d'une sphère, $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, et il vient

$$\omega'_r = R\tang\alpha\,\frac{1}{r\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

En remontant à la fonction primitive,

$$\omega = \tang\alpha\log\frac{\dfrac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{r}}{C};$$

d'où l'on tire l'équation connue

$$r = 2R\,\frac{Ce^{\omega\cot\alpha}}{1 + C^2e^{2\omega\cot\alpha}}.$$

Une dernière remarque importante consiste en ce qu'une telle courbe peut toujours être rectifiée lorsque le méridien est lui-même rectifiable; car chaque élément étant incliné d'un angle constant sur le méridien est égal à l'élément correspondant du méridien, divisé par le cosinus de cette inclinaison. Il en est donc de même pour un arc fini compris entre deux parallèles de la surface; et cet arc est égal à l'arc du méridien compris entre les mêmes parallèles divisé par $\cos\alpha$.

*N. B.* — Le nom de *loxodromie* employé ici pourrait tout aussi bien être remplacé par celui d'*hélice*, car ces courbes se définissent comme l'hélice cylindrique, et la loxodromie proprement dite n'est autre chose qu'une *hélice sphérique*.