NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. DOSTOR

Expression en déterminant de la surface d'un quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets consécutifs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 559-563

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__559_1>

EXPRESSION EN DÉTERMINANT

de la surface d'un quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets consécutifs;

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

PROBLÈME I. — *Un quadrilatère* ABCD *a son sommet* A *à l'origine des coordonnées, calculer la surface* Q *du quadrilatère en valeur des coordonnées* $x', y', x'', y'', x''', y'''$ *des trois autres sommets* B, C, D.

Supposons que les droites AB, AC, AD forment des angles croissants avec l'axe des x; nous avons

$$2Q = 2ABC + 2ACD,$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

Retranchons du second membre le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{vmatrix},$$

multiplié par zéro; nous obtenons

$$2Q = 1 \times \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix};$$

il viendra donc

$$(\mathrm{I}) \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

Problème II. — *Déterminer la surface* Q *d'un quadrilatère* ABCD *en valeur des coordonnées* $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ *de ses quatre sommets consécutifs* A, B, C, D.

Transportons l'origine des coordonnées au sommet A, et appelons $x', y', x'', y'', x''', y'''$ les coordonnées des trois autres sommets B, C, D par rapport à cette nouvelle origine, de sorte que

$$x_1 = x + x', \quad x_2 = x + x'', \quad x_3 = x + x''',$$
$$y_1 = y + y', \quad y_2 = y + y'', \quad y_3 = y + y'''.$$

Dans la formule (I), remplaçons les coordonnées x', y', x'', y'', x''', y''' par leurs valeurs tirées de ces égalités; nous obtenons

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix},$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 0 & 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix}.$$

Si, dans ce déterminant, nous ajoutons la première ligne à chacune des trois autres, la valeur du déterminant ne sera pas altérée, et nous aurons

$$(\mathrm{II})\qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

pour la double surface du quadrilatère.

Autre expression de cette surface. — Si l'on développe le déterminant (II), on trouve que

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Or le second et le quatrième de ces déterminants, étant égaux et de signes contraires, s'entre-détruisent; il vient, par suite,

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$2Q = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est le développement suivant les déterminants mineurs du troisième ordre d'un déterminant du quatrième ordre, dont la première colonne a pour éléments 1, 0, 1, 0. On a donc

$$\text{(III)}\qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Aire du quadrilatère Q en valeur des quatre côtés consécutifs a, b, c, d et des deux diagonales m, n. — La formule (I) nous donne

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 0 & x'-x''' & y'-y''' \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x'-x''' & y'-y''' \end{vmatrix},$$

et, en élevant au carré, puis en multipliant chaque colonne par 2,

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2(x''^2+y''^2) & 2(x'x''+y'y'')-2(x''x'''+y''y''') \\ 2(x'x''+y'y'')-2(x''x'''+y''y''') & 2(x'''^2+y'''^2) \end{vmatrix}.$$

Or il est évident que

$$2(x''^2+y''^2) = 2m^2, \quad 2(x'-x''')^2 + 2(y'-y''')^2 = 2n^2;$$

ensuite, puisque

$$a^2 = x'^2 + y'^2, \quad b^2 = x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 - 2(x'x'' + y'y''),$$
$$c^2 = x''^2 + y''^2 + x'''^2 + y'''^2 - 2(x''x''' + y''y'''),$$
$$d^2 = x'''^2 + y'''^2,$$

il vient

$$2(x'x'' + y'y'') - 2(x''x''' + y''y''') = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

Substituant dans la valeur de $16Q^2$, on obtient

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2m^2 & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2n^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2mn & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2mn \end{vmatrix},$$

pour le carré de la quadruple surface du quadrilatère.

En développant, on trouve la formule

$$16Q^2 = 4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2,$$

que nous avons donnée dans ces *Annales*, t. VII, p. 69, 1848.