NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. HARKEMA

Sur un cas particulier d'intégration de l'équation $f(x,y)dx + \varphi(x,y)dy = 0$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e^ série, tome 13 (1874), p. 545-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__545_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UN CAS PARTICULIER D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0$;

PAR M. C. HARKEMA.

On sait qu'une équation différentielle du premier ordre peut être considérée comme *intégrable* si elle se ramène à une équation homogène, les variables pouvant dès lors être séparées. S'il était possible de trouver dans chaque cas particulier les substitutions qui rendent homogène une équation différentielle donnée, l'intégration des équations n'offrirait aucune difficulté *théorique*. Or ceci n'est possible que dans un nombre de cas très-restreint.

Je veux considérer dans cette Note une substitution fréquemment employée en Analyse et établir les formules exprimant les conditions suffisantes pour qu'une équation différentielle du premier ordre à termes algébriques puisse être rendue homogène en employant cette substitution.

Soit une équation différentielle

$$f(x,y)dx + \varphi(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y) = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + \ldots + a_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m}, \\ \varphi(x,y) = b_1 x^{\gamma_1} y^{\delta_1} + b_2 x^{\gamma_2} y^{\delta_2} + \ldots + a_n x^{\gamma_n} y^{\delta_n}, \end{array}\right. \tag{2}$$

a, b désignant des coefficients quelconques, α, β, γ, δ des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, mais *commensurables*.

Faisons la substitution

$$x = u^\lambda, \quad y = v^\mu,$$

λ et μ étant des nombres constants et indéterminés. L'équation (1) se transforme en celle-ci

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \quad (a_1 u^{\lambda\alpha_1} v^{\mu\beta_1} + a_2 u^{\lambda\alpha_2} v^{\mu\beta_2} + \ldots + a_m u^{\lambda\alpha_m} v^{\mu\beta_m}) \lambda u^{\lambda-1} du \\ + (b_1 u^{\lambda\gamma_1} v^{\mu\delta_1} + b_2 u^{\lambda\gamma_2} v^{\mu\delta_2} + \ldots + b_n u^{\lambda\gamma_n} v^{\mu\delta_n}) \mu v^{\mu-1} dv = 0. \end{array}\right.$$

Pour que cette équation soit homogène, il faut qu'on ait

$$(a) \qquad [m] \ldots \lambda(\alpha_i + 1) + \mu\beta_i - 1 = \mathrm{D},$$

$$(b) \qquad [n] \ldots \lambda\gamma_k + \mu(\delta_k + 1) - 1 = \mathrm{D}.$$

Dans ces formules, D désigne la dimension de l'équation (3) supposée homogène; les indices i et k peuvent prendre respectivement les valeurs 1, 2,..., m; 1, 2,..., n. Les nombres $[m]$ et $[n]$ placés à côté de ces formules indiquent le nombre des équations distinctes renfermées dans chacune.

Les quantités λ, μ, ainsi que D, sont indéterminées; mais on voit que, λ et μ étant une fois choisis, D devient déterminé. Le nombre des équations (a) et (b) étant $m + n$, on voit que le nombre des conditions auxquelles doivent satisfaire les exposants des fonctions f et φ est égal à $m + n - 2$. Si, par exemple, l'équation proposée contient trois termes, les conditions trouvées se réduisent à une seule.

Les relations (a) et (b) peuvent être exprimées en forme de déterminants. En effet, éliminant D entre les équations d'un même groupe, on peut écrire, au lieu de (a) et (b),

$$(a') \qquad [m-1] \ldots \lambda(\alpha_i - \alpha_m) + \mu(\beta_i - \beta_m) = 0,$$

$$(b') \qquad [n-1] \ldots \lambda(\gamma_k - \gamma_n) + \mu(\delta_k - \delta_n) = 0.$$

A ces équations s'applique la même remarque qu'aux précédentes. Il faut ajouter aux équations (a') et (b') celles qui résultent de l'élimination de D entre les équations des groupes différents, savoir :

$$(c') \qquad [1]\ldots \lambda[(\alpha_i+1)-\gamma_k]+\mu[\beta_i-(\delta_k+1)]=0.$$

En vertu des équations (a') et (b'), la formule (c') n'est équivalente qu'à une seule condition. Comme λ et μ ne peuvent être égaux à zéro, il faut, pour que ces équations soient compatibles, qu'on ait identiquement

$$(d) \qquad [m-2]\ldots \begin{vmatrix} \alpha_i-\alpha_m & \beta_i-\beta_m \\ \alpha_{i+1}-\alpha_m & \beta_{i+1}-\beta_m \end{vmatrix}=0,$$

$$(e) \qquad [n-2]\ldots \begin{vmatrix} \gamma_k-\gamma_n & \delta_k-\delta_n \\ \gamma_{k+1}-\gamma_n & \delta_{k+1}-\delta_n \end{vmatrix}=0,$$

ensuite

$$(f) \quad [1]\ldots \begin{vmatrix} (\alpha_i+1)-\gamma_k & \beta_i-(\delta_k+1) \\ (\alpha_{i+1}+1)-\gamma_{k+1} & \beta_{i+1}-(\delta_{k+1}+1) \end{vmatrix}=0$$

et

$$(g) \qquad [1]\ldots \begin{vmatrix} \alpha_i-\alpha_m & \beta_i-\beta_m \\ \gamma_k-\gamma_n & \delta_k-\delta_n \end{vmatrix}=0.$$

On voit au premier abord que, en vertu des expressions (d) et (e), chacune des formules (f) et (g) est équivalente à une seule condition.

Le nombre total des conditions à satisfaire est donc $m+n-2$, ce qui s'accorde avec le nombre trouvé plus haut. (Si l'équation proposée ne contient que deux termes, le nombre des conditions s'annule, ce qui veut dire que toute équation à deux termes peut être rendue homogène; ceci est évident.)

Si les conditions (d), (e), (f) et (g) sont remplies, il suffit, pour rendre homogène l'équation donnée (1), de faire la substitution

$$x=u^{\beta_i-\beta_m}; \quad y=v^{\alpha_m-\alpha_i}.$$

Les formules que nous venons d'établir offrent peu d'intérêt dans le cas où les polynômes f et φ renferment un nombre considérable de termes. Je ne veux que montrer leur application au cas d'une équation de trois et de quatre termes.

I. Soit proposée l'équation

$$dy + dx(a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}) = 0.$$

Dans ce cas, on a $m = 2$, $n = 1$ et les déterminants (d), (e), (g) s'annulent; il ne reste que le déterminant (f), qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + 1 & \beta_1 - 1 \\ \alpha_2 + 1 & \beta_2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette condition est remplie, on peut faire la substitution

$$x = u^{\beta_1 - \beta_2}, \quad y = v^{\alpha_2 - \alpha_1},$$

et l'équation proposée devient homogène.

II. Soit encore donnée l'équation

$$(a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}) dx + (b_1 x^{\gamma_1} y^{\delta_1} + b_2 x^{\gamma_2} y^{\delta_2}) dy = 0.$$

Nous avons maintenant $m = 2$, $n = 2$; les déterminants (d) et (e) s'annulent et il ne reste que (f) et (g); ceux-ci deviennent

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 + 1) - \gamma_1 & \beta_1 - (\delta_1 + 1) \\ (\alpha_2 + 1) - \gamma_2 & \beta_2 - (\delta_2 + 1) \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 & \delta_1 - \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si ces conditions sont remplies par les exposants de l'équation, celle-ci peut être rendue homogène par la même substitution que nous avons employée dans l'exemple précédent.