JOSEPH LUBIN

Caractères généraux de la divisibilité d'un nombre par un diviseur quelconque A

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 528-530

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__528_0>

CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE PAR UN DIVISEUR QUELCONQUE A;

PAR M. JOSEPH LUBIN,
Élève du collége Stanislas.

Nous avons trois cas à considérer, suivant que A est inférieur, égal ou supérieur à 10.

1er CAS. — $A < 10$.

Puisque A est < 10, je puis poser $A = 10 - \alpha$, d'où $\alpha = 10 - A$ et $A + \alpha = 10$.

THÉORÈME I. — *Toute puissance de* 10 *est égale à un multiple de* A *augmenté d'une puissance de* α *dont l'exposant est égal au sien.*

En effet, on a successivement

$$10 = A + \alpha,$$

$$10^2 = (A + \alpha)^2 = A^2 + 2\alpha A + \alpha^2 = \text{mult. } A + \alpha^2,$$

$$10^3 = 10^2 \times 10 = (\text{mult. } A + \alpha^2)(A + \alpha) = \text{mult. } A + \alpha^3, \ldots,$$

$$10^{(n+1)} = 10^n \times 10 = (\text{mult. } A + \alpha^n)(A + \alpha) = \text{mult. } A + \alpha^{(n+1)}.$$

Corollaire. — Le nombre formé d'un chiffre significatif, suivi d'un certain nombre de zéros, est égal à un multiple de A, augmenté du produit de ce chiffre par une puissance de α marquée par le nombre de zéros qui le suivent.

THÉORÈME II. — *Tout nombre est égal à un multiple de* A *augmenté de la somme des produits de chacun de ses chiffres par une puissance de* α *marquée par le nombre de chiffres qui le suivent.*

IIe Cas. — $A = 10$ (résultat connu).

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit divisible par* 10 *est qu'il soit terminé par un zéro.*

Corollaire. — Le reste de la division d'un nombre par 10 est le même que le chiffre de ses unités.

IIIe Cas. — $A > 10$.

Puisque A est > 10, je puis poser $A = 10 + \alpha$, d'où $A - \alpha = 10$.

Théorème I. — *Toute puissance de* 10 *est égale à un multiple de* A *augmenté ou diminué (suivant que l'exposant de cette puissance est pair ou impair) d'une puissance de* α *d'exposant égal au sien.*

En effet, on a

$$10 = A - \alpha,$$
$$10^2 = (A - \alpha)^2 = A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 = \text{mult.}\,A + \alpha^2,$$
$$10^3 = 10^2 \times 10 = (\text{mult.}\,A + \alpha^2)(A - \alpha) = \text{mult.}\,A - \alpha^3, \ldots,$$
$$10^{2n} = 10^{(2n-1)} \times 10 = (\text{mult.}\,A - \alpha^{(2n-1)})(A - \alpha) = \text{mult.}\,A + \alpha^{2n},$$
$$10^{(2n+1)} = 10^{2n} \times 10 = (\text{mult.}\,A + \alpha^{2n})(A - \alpha) = \text{mult.}\,A - \alpha^{(2n+1)}.$$

Corollaire. — Le nombre formé d'un chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros est égal à un multiple de A, augmenté ou diminué (suivant que le nombre de zéros est pair ou impair) du produit de ce chiffre par une puissance de α marquée par le nombre de zéros qui le suivent.

Théorème II. — *Tout nombre est égal à un multiple de* A *augmenté de la différence de la somme des produits de chacun de ses chiffres de rangs impairs à partir de la droite sur la somme des produits de chacun de ses* *chiffres de rangs pairs, par une puissance de α marquée par le nombre de chiffres qui le suivent.*

Applications. — Chercher le caractère de la divisibilité d'un nombre par 2 et par 5.

Pour cela, je remarque que, quand, au lieu d'avoir $A + \alpha = 10$, on a $kA + \alpha' = 10$, il suffit, pour avoir le reste de la division du nombre par A, de prendre les puissances de α' et non pas les puissances de α. En effet, $\alpha = (k - 1)A + \alpha'$; or les puissances de α se composeront de deux parties, dont l'une sera un multiple de A (qui disparaîtra en opérant la division), et l'autre une puissance de α' d'exposant égal à l'exposant considéré de la puissance de α; donc il suffit de prendre les puissances de α', ce qui démontre l'énoncé.

Cela posé, je remarque que $10 = 5 \times 2$, ou que

$$10 = \text{mult.}\, 2 + 0 \quad \text{et} \quad 10 = \text{mult.}\, 5 + 0.$$

Or les puissances de α' seront aussi égales à zéro, et, par suite, leurs produits par les chiffres du nombre; et tous les chiffres du nombre étant multipliés par des puissances de α, excepté le chiffre des unités qui est multiplié par 1, il suffira de considérer le chiffre des unités et de le diviser par 2 ou par 5, pour avoir le reste de la division du nombre par 2 ou par 5.