NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. LEFÉBURE DE FOURCY

Sur les coniques bitangentes à une autre conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 513-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__513_0>

SUR LES CONIQUES BITANGENTES A UNE AUTRE CONIQUE;

PAR M. R. LEFÉBURE DE FOURCY.

La *Revue scientifique*, dans un de ses derniers Bulletins, mentionne un travail récent communiqué par M. Niewtschik à l'Académie de Vienne. Voici l'énoncé du problème :

Inscrire une ellipse à un cercle, étant donnés le centre et une tangente à cette ellipse.

Nous nous sommes attaché à résoudre ce problème par une méthode qui donne cette solution plus générale : construction d'une conique bitangente à une autre et déterminée d'ailleurs par trois autres conditions. Tel est le sujet que nous allons traiter.

Construction d'une ellipse déterminée par son centre, un cercle bitangent et un cercle tangent.

Si l'on suppose le problème résolu, on reconnaît facilement que le cercle peut être considéré comme la ligne de contour d'une sphère sur un plan horizontal passant par son centre; l'ellipse sera la projection d'une section plane, ayant son centre sur une normale au plan, et dont par suite la trace est le point donné, et de plus ayant une tangente commune avec une autre section de la même sphère, section qui fait deux dièdres égaux avec le plan horizontal puisqu'elle se projette suivant la corde donnée.

Le problème plan est ainsi ramené à un problème de l'espace qui se résout par la règle et le compas en projetant la figure sur différents plans, ou, ce qui revient au même, par des mouvements de rotation. Voici comment :

On aperçoit tout de suite que toute section de la sphère assujettie à toucher une autre section donnée a son centre sur un tore engendré par un cercle de rayon $\frac{R}{2}$, R étant le rayon de la sphère. De plus, ce tore est tangent à la sphère tout le long de la section donnée. Si donc nous voulons avoir la section particulière dont la projection donne l'ellipse cherchée, il suffit de prendre l'intersection du tore et de la droite qui se projette suivant un point. Cette droite, dans le cas de notre figure, étant perpendiculaire à l'axe du tore, la construction se fait avec la règle et le compas.

On voit ainsi que nous aurons en général quatre solutions.

Nous allons étudier les conditions de possibilité du problème; les résultats que nous obtiendrons seront la clef des conditions de possibilité pour les problèmes analogues auxquels nous devons passer bientôt.

La zone où doit se trouver le centre n'est autre que la projection du tore, puisqu'il faut qu'il y ait rencontre de la droite avec cette surface pour que le problème soit possible.

Nous aurons deux solutions seulement si le centre tombe dans l'un des deux cercles qui figurent la section horizontale du tore. En effet, la droite dont ce point est la trace ne rencontre que deux fois la surface.

Nous aurons quatre solutions dans la partie intermédiaire.

Parmi ces solutions, il faudra distinguer celles qui donnent des contacts effectifs de celles qui ne donnent que des contacts idéaux.

On trouverait pour ligne de séparation la projection d'une courbe gauche placée sur une certaine sphère, et, quel que soit le plan de projection, toujours d'un degré supérieur.

On traiterait sans difficulté à l'aide de procédés analogues notre problème, en y changeant les données de la façon suivante :

(2) Cercle, — centre, — point de la courbe ;

(3) Cercle, — ligne du centre, — point avec sa tangente (*) ;

(4) Cercle, — ligne du centre, — deux points ;

(5) Cercle, — trois points.

Quant aux combinaisons autres, on rencontre immédiatement des impossibilités.

Il est temps de généraliser, en passant, un cas où la conique à construire devient extérieure au cercle, ce qui aura lieu forcément quand la tangente ou un des points donnés seront eux-mêmes en dehors.

Prenons d'abord le problème de la tangente comme nous l'avons fait précédemment ; cette fois elle est donnée extérieure au cercle bitangent.

Pour ne pas changer de méthode, nous sommes naturellement conduit à prendre notre figure plane comme projection d'une figure de l'espace. Le cercle sera le cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution, la droite une section verticale, le centre la trace d'une droite normale au plan de projection.

Supposons maintenant une autre section parallèle à la première : par les deux on fera passer un cône. Menons un plan tangent le long d'une directrice ; il détermine dans l'hyperboloïde une section dont la projection sera bitangente au cercle de gorge, et tangente à chacune des sections projetées. Le centre se projette au centre de la

(*) Le point et sa tangente peuvent se remplacer par point et ellipse tangente en ce point, l'ellipse étant telle qu'on puisse la supposer la projection d'un cercle de la sphère. Un mouvement de rotation ramène au cas le plus simple.

génératrice, et, quand elle change de place, décrit une courbe semblable aux courbes directrices, et qui, par suite, comme elles, se projette suivant une droite. Il reste à déterminer la section arbitraire de telle sorte que cette droite rencontre le point.

On a deux cônes qui donnent chacun deux solutions.

Nous aurons encore les problèmes indiqués au chapitre de la sphère, c'est-à-dire

(2) Cercle, — centre, — point;

(3) Cercle, — ligne du centre, — point et sa tangente;

(4) Cercle, — ligne du centre, — deux points;

(5) Cercle, — trois points.

Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails. Prenons le n° (3).

Pour qu'une droite passant par le point donné contienne le centre de la courbe, il faut que la tangente à l'extrémité inconnue soit parallèle à la tangente donnée. Nous sommes ainsi conduit à chercher sur l'hyperboloïde le lieu des points tels que les tangentes à des sections verticales parallèles soient parallèles. On vérifie facilement que ce lieu se projette en ligne droite sur un plan vertical, ce plan étant déterminé par une ligne de terre parallèle à la droite donnée. Nous avons donc une section plane de l'hyperboloïde. Le centre cherché décrira une courbe semblable et moitié moindre; on prendra l'intersection avec le plan projetant de la ligne du centre, et, en revenant à la figure primitive, on aura les deux solutions.

(4) Cherchons les plans tangents à la surface en chaque point. Les tangentes aux sections se rencontrent deux à deux à l'intersection de ces plans. Le diamètre conjugué à la corde donnée passe par le point de rencontre de ces

tangentes. Il décrit donc un plan dans l'espace en passant par un point fixe.

Pour avoir le lieu du centre, nous sommes ramené à ce problème :

Par un point fixe, on mène une sécante à une conique : trouver le lieu du milieu de la corde. On sait que ce lieu est une conique.

Rien à dire du n° (5).

Il resterait à démontrer que notre méthode donne toutes les solutions des problèmes étudiés.

La démonstration est facile : il suffit de la signaler à l'attention.

Généralisation.

Nous avons traité le cas du cercle bitangent : nous allons démontrer que ce cercle peut être remplacé par une ellipse quelconque.

En effet, la courbe étant fermée, on pourra toujours par une projection orthogonale la déformer de telle sorte qu'elle devienne un cercle; dans cette opération, les droites, les points, le centre donnés prendront une position nouvelle et, quand on aura fait la construction sur cette figure, on reviendra à la primitive. Une seule chose sera changée, les axes seront devenus des diamètres conjugués. On peut par suite construire les nouveaux axes.

Si, au contraire, la courbe est à branches infinies, on ne pourra la fermer que par la projection perspective. Or on sait que les centres de deux sections non parallèles ne sont pas sur une même droite avec le sommet.

Cette difficulté ne nous permet pas d'étendre aux autres coniques ce que nous avons dit de l'ellipse, et nous ne pensons pas qu'on puisse y parvenir.

La généralisation subsiste pour le cas où les données sont trois points et une conique bitangente.