NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GAMBEY

Solution des questions élémentaires proposées au concours d'agrégation de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 43-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__43_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DES QUESTIONS ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1875 ;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Solution de la question de Géométrie.

Soit le triangle ABC. Appelons O_1, O_2, O_3 les centres des cercles exinscrits, O_1 étant dans l'angle A, etc.; puis, en allant de A vers B, notons les points de contact ainsi : M_1, N_1; M_2, N_2,; M_3, N_3. Conservons pour le reste les notations ordinaires.

I. Les deux triangles $A'B'C'$, $O_1O_2O_3$ ont leurs côtés respectivement parallèles. Ainsi $B'C'$ et O_2O_3 sont parallèles, parce qu'ils sont à la fois perpendiculaires sur O_1A. Or on voit facilement que l'angle O_1 est égal à $\frac{B+C}{2}$ ou $90^\circ - \frac{A}{2}$.

Donc les angles A', B', C' ont les valeurs respectives

$$90^\circ - \frac{A}{2}, \quad 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

II. Les deux triangles AM_3A', AN_2A' donnent

$$\frac{AA'}{\sin AM_3A'} = \frac{AM_3}{\sin AA'M_3}, \quad \frac{AA'}{\sin AN_2A'} = \frac{AN_2}{\sin AA'N_2}.$$

Or

$$AM_3A' = 90^\circ + \frac{C}{2}, \quad AN_2A' = 90^\circ + \frac{B}{2},$$

$$AM_3 = p - b, \quad AN_2 = p - c,$$

et si l'on pose

$$AA'M_3 = \alpha,$$

on aura

$$AA' = \frac{(p-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\alpha} = \frac{(p-c)\cos\frac{B}{2}}{\cos\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)}.$$

Développant le cosinus de $\alpha + \frac{A}{2}$, et éliminant les lignes trigonométriques au moyen de leurs valeurs en fonction de a, b, c et du périmètre du triangle ABC, il vient

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \operatorname{tang}\frac{C}{2},$$

d'où

$$\alpha = \frac{C}{2}.$$

Par suite, l'angle $M_3AA' = 90^\circ - C$ et la droite AA' est perpendiculaire sur BC.

On démontrerait de même que BB', CC' sont respectivement perpendiculaires sur AC et sur AB.

III. Soient R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC; R′ le rayon du cercle circonscrit au triangle A′B′C′.

Les triangles AM_3A', BN_3B' donnent facilement

$$A'M_3 = \frac{(p-b)\cos C}{\sin\frac{C}{2}}, \quad B'N_3 = \frac{(p-a)\cos C}{\sin\frac{C}{2}}.$$

et l'on tire, du triangle isoscèle CM_3N_3.

$$M_3N_3 = 2p\sin\frac{C}{2}.$$

Donc

$$A'M_3 + M_3N_3 + B'N_3 = A'B' = \frac{c\cos C + 2p\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}:$$

mais, de la relation

$$A'B' = 2R'\sin C' = 2R'\cos\frac{C}{2},$$

on tire

$$R' = \frac{A'B'}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{c\cos C + 2p\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C},$$

ou bien

$$R' = \frac{c + 2(p-c)\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C}.$$

L'élimination des lignes trigonométriques conduit à

$$R' = 2R + r.$$

Si l'on tient compte de la relation

$$4R' = r_a + r_b + r_c - r,$$

où r_a, r_b, r_c sont les rayons des cercles exinscrits, on arrive aussi à

$$R' = \frac{r_a + r_b + r_c + r}{2}.$$

IV. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle A' B' C'. On trouve facilement que l'angle OA'B' est le complément de l'angle C'; mais l'angle C' vaut $90° - \frac{C}{2}$, donc

$$OA'B' = \frac{C}{2}.$$

C'est justement l'angle que font les droites A'B' et A'A. Il s'ensuit que AA' passe par le point O; il en est donc de même de BB' et de CC'.

Solution de la question de Mécanique.

Soient les centres d'attraction C, C', C'',... en nombre n, dont les coordonnées sont a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'',...;

x, y, z les coordonnées du point M dans sa position d'équilibre;

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$,... les angles que font respectivement les droites CM, C'M', C''M'',... avec trois axes rectangulaires se coupant au centre de la sphère;

λ, μ, ν ceux du rayon passant en M avec les mêmes axes;

R une force égale à la résistance de la sphère et pouvant remplacer cette sphère, de sorte que le point M puisse être considéré comme entièrement libre.

Posons

$$CM = d, \quad CM' = d', \quad CM'' = d'', \ldots,$$

et prenons pour unité l'attraction de l'un quelconque des centres sur le point M à l'unité de distance. Les forces attractives seront alors mesurées par les distances $d, d', d'', \ldots$

L'équation de la sphère sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2.$$

Cela posé, les conditions d'équilibre d'un point matériel entièrement libre donnent, dans l'hypothèse actuelle,

$$\begin{aligned}
d\cos\alpha + d'\cos\alpha' + \ldots + \mathrm{R}\cos\lambda &= \Sigma d\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\lambda = 0,\\
d\cos\beta + d'\cos\beta' + \ldots + \mathrm{R}\cos\mu &= \Sigma d\cos\beta + \mathrm{R}\cos\mu = 0,\\
d\cos\gamma + d'\cos\gamma' + \ldots + \mathrm{R}\cos\nu &= \Sigma d\cos\gamma + \mathrm{R}\cos\nu = 0;
\end{aligned}$$

mais on a

$$\cos\alpha = \frac{a-x}{d}, \quad \cos\beta = \frac{b-y}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{c-z}{d},$$

$$\cos\alpha' = \frac{a'-x}{d'}, \quad \cos\beta' = \frac{b'-y}{d'}, \quad \cos\gamma' = \frac{c'-z}{d'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\cos\lambda = \frac{x}{r}, \quad \cos\mu = \frac{y}{r}, \quad \cos\nu = \frac{z}{r}.$$

Les équations d'équilibre deviennent ainsi

$$\Sigma(a-x) + \frac{\mathrm{R}x}{r} = 0,$$

$$\Sigma(b-y) + \frac{\mathrm{R}y}{r} = 0,$$

$$\Sigma(c-z) + \frac{\mathrm{R}z}{r} = 0.$$

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre des moyennes distances des n centres d'attraction, ces équations conduisent, par l'élimination de R, à

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z}.$$

La résultante des attractions passe donc par le centre des moyennes distances des centres donnés.

On trouve, sans difficulté, pour les valeurs de x, y, z :

$$x = \frac{rx_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$y = \frac{ry_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$z = \frac{rz_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

ou, en appelant d_1 la distance du point (x_1, y_1, z_1) au centre de la sphère,

$$x = \frac{rx}{\pm d_1}, \quad y = \frac{ry_1}{\pm d_1}, \quad z = \frac{rz_1}{\pm d_1}.$$

On prendra devant d_1 le signe $+$, parce que x, y, z ont le même signe que x_1, y_1, z_1.

L'intensité de la résultante se calcule ensuite facilement. On trouve

$$-\mathrm{R} = n(d_1 - r).$$

Si l'intensité R est donnée, les équations d'équilibre deviennent d'abord

$$n(x_1 - x) = -\frac{\mathrm{R}x}{r}.$$

$$n(y_1 - y) = -\frac{\mathrm{R}y}{r}.$$

$$n(z_1 - z) = -\frac{\mathrm{R}z}{r}.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$n^2[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2] = \mathrm{R}^2 = n^2(d_1 - r)^2,$$

ou bien

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (d_1 - r)^2,$$

équation d'une sphère. Les coordonnées du point M devant aussi vérifier les équations de la sphère donnée, le lieu de ce point est un cercle déterminé par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = d_1 r.$$