NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Des cas où l'on peut résoudre l'équation du second degré par approximations successives

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 401-404

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__401_0>

DES CAS OU L'ON PEUT RÉSOUDRE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, par approximations successives, n'est avantageuse que si a est très-petit; mais on peut chercher dans quelles limites la méthode peut s'appliquer, c'est-à-dire donner des valeurs tendant indéfiniment vers une des racines de l'équation. Quand a et c sont de même signe, la question est facile : on démontre d'habitude que l'erreur commise après la $m^{ième}$ approximation est $< \frac{c}{b}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^m$. La méthode est donc applicable si $4ac < b^2$, et cette condition suffisante est nécessaire; car, si elle n'est pas satisfaite, x est imaginaire, et ne saurait être la limite d'une suite de valeurs évidemment réelles.

Considérons le cas où l'équation a la forme

$$\varphi(x) = ax^2 + bx - c = 0.$$

Les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$, obtenues par un procédé bien connu sont tour à tour supérieures et inférieures à x, x désignant à l'avenir la racine positive de l'équation ; on sait même qu'en écartant le cas où x_2 serait négatif, ce qui entraînerait $ac > b^2$, $x_1, x_3, x_5, \ldots$ vont en diminuant, et $x_2, x_4, \ldots$ en croissant, de sorte que ces deux séries de nombres se rapprochent constamment de x; mais il faut qu'elles s'en approchent indéfiniment. Je désigne par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ les valeurs absolues des erreurs correspondant aux approximations successives, et j'écris la relation connue

$$(1) \qquad \varepsilon_{m+1} = \frac{a}{b}(x + x_m)\,\varepsilon_m.$$

On en conclut $\varepsilon_{m+1} < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^m \varepsilon_1$; la méthode est applicable si $\frac{ac}{b^2} < \frac{1}{2}$. Ici cette condition n'est plus nécessaire; mais il est clair que les erreurs ne tendront pas vers zéro quand x sera $> \frac{b}{2a}$. Supposons, en effet, que x soit $> \frac{b}{2a}$ et que ε_m tende vers zéro; x_m se rapprochera de plus en plus de x, et $x + x_m$ deviendra, à partir d'une valeur suffisante de m, $> \frac{b}{a}$; alors ε_{m+1} sera $> \varepsilon_m$; les nombres $\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \ldots$ allant en croissant ne tendent pas vers zéro, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. D'ailleurs, la condition $x > \frac{b}{2a}$ revient à

$$\varphi\left(\frac{b}{2a}\right) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{b^2} > \frac{3}{4}.$$

Je dis maintenant que, si x est $\leq \frac{b}{2a}$, ou $\frac{ac}{b^2} \leq \frac{3}{4}$, les erreurs successives tendent vers zéro. Dans l'équation (1), je fais tour à tour $m = 2n$, et $m = 2n - 1$, et je remplace x_{2n} par $x - \varepsilon_{2n}$, x_{2n-1} par $x + \varepsilon_{2n-1}$:

$$\varepsilon_{2n+1} = \frac{a}{b}(2x - \varepsilon_{2n})\,\varepsilon_{2n},$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{a}{b}(2x + \varepsilon_{2n-1})\,\varepsilon_{2n-1} \ (*).$$

(*) Cette formule montre que si $x = \frac{b}{2a}$, d'où $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, on a $\varepsilon_{2n} > \varepsilon_{2n-1}$; alors les termes de rangs pairs de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ surpassent ceux qui les précèdent immédiatement. Pour que les termes de cette suite aient des valeurs constamment décroissantes, à partir du second ε_2, il faut qu'on ait $\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$ (1re série, t. XVI, p. 436); mais cette condition n'est pas nécessaire pour que les termes deviennent moindres que tout nombre donné. (G.)

Éliminant ε_{2n}, on trouve

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{2n+1} = \frac{a^2}{b^2}\Big[4x^2 + 2x\left(1 - \frac{2ax}{b}\right)\varepsilon_{2n-1} \\ - \frac{4ax}{b}\varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a}{b}\varepsilon_{2n-2}^3\Big]\varepsilon_{2n-1}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on a précisément $x = \frac{b}{2a}$, $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, cette relation devient

$$\varepsilon_{2n+1} = \left(1 - 2\frac{a^2}{b^2}\varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a^3}{b^3}\varepsilon_{2n-1}^3\right)\varepsilon_{2n-1}.$$

On ne peut supposer que les nombres de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{2n+1}$ restent au-dessus d'un nombre fini, car alors $\frac{\varepsilon_{2n+1}}{\varepsilon_{2n-1}}$ étant moindre qu'un nombre < 1, les erreurs considérées décroîtraient plus vite que les termes d'une progression décroissante, et tendraient vers zéro, ce qui renverse l'hypothèse : donc ε_{2n+1} a pour limite zéro, et il en est par suite de même pour ε_{2n}.

Quand x est $< \frac{b}{2a}$ ou $\frac{ac}{b^2} < \frac{3}{4}$, les approximations successives doivent, *a fortiori*, converger vers x; mais la formule (2) le prouve rigoureusement. Comme $\frac{ac}{b^2}$ est < 1, nous sommes sûr que x_1, $x_3, \ldots$ décroissent constamment, ainsi que ε_1, $\varepsilon_3, \ldots$; on aura donc $\varepsilon_{2n-1} = \theta\varepsilon_1$, θ étant < 1. Posons $x = \frac{b}{2a}(1 - h)$, on a

$$\varepsilon_1 = \frac{ax^2}{b} = \frac{b(1-h)^2}{4a}, \qquad \varepsilon_{2n-1} = \theta(1-h)^2\frac{b}{4a}.$$

Substituons dans (2), et représentons par $-k^2(1-h)^2$ la somme des deux derniers termes de la parenthèse, il vient

$$\varepsilon_{2n+1} = (1-h)^2\left[1 + \frac{\theta h}{4}(1-h) - k^2\right]\varepsilon_{2n-1}.$$

La parenthèse est moindre que $(1+h)^2$, donc

$$\varepsilon_{2n+1} < (1-h^2)^2 \varepsilon_{2n-1};$$

les erreurs décroissent plus vite que les termes d'une progression dont la raison serait $(1-h^2)^2$; la méthode des approximations sera donc applicable, sinon rapide, tant que $\frac{ac}{b^2}$ sera $\leq \frac{3}{4}$.