NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD COLLIGNON

Méthode pour construire avec autant d'approximation qu'on voudra un triangle équivalent à un secteur donné

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 389-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__389_1>

MÉTHODE

pour construire avec autant d'approximation qu'on voudra un triangle équivalent à un secteur donné;

PAR M. ÉDOUARD COLLIGNON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées (*).

Le centre de gravité G d'un arc de cercle homogène AB (*fig.* 1) est situé sur la bissectrice OI de cet arc, à une distance OG du centre égale à $\frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{AB}}{\text{arc AB}}$, ou bien, en appelant a le rayon OA, et θ le demi-angle au centre IOA, à la distance

$$\mathrm{OG}=r=\frac{a\sin\theta}{\theta}.$$

Si, par le point G, nous élevons sur OI une perpendiculaire indéfinie G_1G', les points G_1 et G', où cette droite rencontre les bissectrices OI, OI' des demi-angles AOI, IOB, seront, en vertu de la symétrie, les centres de gravité des deux arcs AI, BI.

Par la même raison, on obtiendra le centre de gravité G_2 de l'arc AI_1 en élevant en G_1 une perpendiculaire à OG_1, et en prenant le point où cette droite coupe la bissectrice OI_2 de l'angle I_1OA.

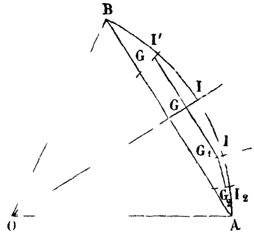
On peut continuer aussi loin qu'on voudra cette construction; elle consiste à déduire le point G_{n+1} du point G_n, en élevant G_nG_{n+1}, perpendiculaire sur OG_n, et en

(*) Cette méthode a été l'objet d'une Communication de l'Auteur au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon, en août 1873.

prenant l'intersection de cette droite avec la bissectrice de l'angle $G_n OA$. On aura, de cette manière, les centres de gravité d'arcs qui commencent tous au point A, et qui décroissent comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$. La position limite des points successifs G, G_1, $G_2, \ldots$, G_n, G_{n+1} est le point A lui-même, centre de gravité d'un arc infiniment petit commençant au point A.

On passera par conséquent du point G au point A par la construction des points G, G_1, $G_2, \ldots$; en pratique, dès qu'on aura atteint un angle $G_n OA$ assez petit, la solution pourra s'achever approximativement, soit en

Fig. 1.



traçant un arc de cercle du point O comme centre avec OG_n pour rayon, soit en prolongeant jusqu'à OA la perpendiculaire $G_n G_{n+1}$.

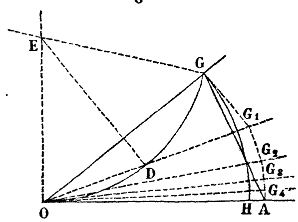
Cela posé, je dis que le triangle OGA (*fig.* 2) est équivalent au secteur OGH, décrit du point O comme centre avec OG pour rayon.

En effet, le secteur a pour mesure $\frac{1}{2} r^2 \theta$, et le triangle $\frac{1}{2} ra \sin\theta$; or ces deux mesures sont égales, en vertu de la relation

$$r = a \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Il est facile de reconnaître aussi que l'arc de cercle ODG, passant par les points O et G, et tangent en O à la droite OA, a une longueur égale à la quantité OA elle-même. Le point E, centre de cet arc ODG, sera situé sur

Fig. 2.



la perpendiculaire à OA, élevée au point O. L'angle OEG sera double de l'angle GOA, c'est-à-dire égal à 2θ; et, par suite,

$$\text{arc OG} = 2\,\text{EO} \times \theta.$$

Or

$$\text{EO} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{OG}}{\cos \text{EOG}} = \frac{\text{OG}}{2 \sin \theta}.$$

Donc

$$\text{arc OG} = \text{OG} \times \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{r\theta}{\sin \theta} = a = \text{OA}.$$

La construction indiquée plus haut conduit donc aussi à la rectification de l'arc de cercle ODG : il suffit d'opérer sur l'angle formé par la corde de l'arc et la tangente.

De ces considérations de Statique, on déduit très-simplement certaines formules de Trigonométrie, par exemple :

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \lim. \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \ldots \cos \frac{\theta}{2^n} \right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim. \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cdots},$$

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos (2n - 1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta},$$

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin (2n - 1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}.$$

Enfin on peut en déduire une méthode *graphique* très-simple pour diviser un arc de cercle en un nombre donné de parties égales.

Voir à ce sujet la *Statique* de l'auteur (Hachette, 1873, p. 277 et suiv.).