NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES KOENIG

Nouvelle démonstration du théorème de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 270-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__270_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉOREME DE TAYLOR;

PAR M. LE D^r JULES KOENIG,
à l'Université de Pesth.

Dans les *Mathematische Annalen* de MM. Clebsch et Neumann, j'ai traité d'une manière générale les séries ordonnées suivant des fonctions quelconques d'une variable. La méthode employée là donne de même une démonstration nouvelle du théorème de Taylor pour des variables complexes, qui ne suppose connues que les notions les plus élémentaires de la théorie des séries. On sait bien que la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

a une valeur déterminée et finie pour toutes les valeurs finies de la variable. Employons encore le théorème connu, qu'une série convergente reste telle, si les termes de la série sont multipliés par une série de quantités, dont chacune conserve une valeur finie. Supposons telles les quantités

$$\varphi_0(h),\ \varphi_1(h),\ \varphi_2(h), \ldots.$$

La série

$$\varphi_0(h) + \varphi_1(h)\frac{z}{1!} + \varphi_2(h)\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

sera donc convergente aussi longtemps que les quantités h satisferont à la condition mentionnée. On a ainsi une série, qui sera, entre certaines limites, une fonction finie et continue des deux variables z et h. Quelles sont, à présent, les conditions nécessaires pour que cette fonction de deux variables en apparence ne dépende en réalité que d'une variable $z + h$? Cette question sera exprimée par l'équation suivante :

$$\Phi(z+p,\ h) = \Phi(z,\ h+p),$$

où p représente une quantité quelconque.

En conséquence de cette équation, on aura immédiatement, en posant

$$z = 0$$

et écrivant ensuite z pour p,

$$\Phi(z,\ h) = \Phi(0,\ z+h),$$

ce qui n'est autre chose que la proposition énoncée ci-dessus.

En écrivant à présent pour le symbole Φ la série qu'il représente, on aura

$$\varphi_0(h) + \varphi_1(h)(z+p) + \varphi_2(h)\frac{(z+p)^2}{2!} + \ldots$$

$$= \varphi_0(h+p) + \varphi_1(h+p)z + \varphi_2(h+p)\frac{z^2}{2!} + \ldots.$$

La valeur de la première de ces séries ne changera pas si l'on ordonne suivant les puissances de la variable z, et, une fonction ne pouvant être développée de deux manières différentes suivant les puissances de la variable, les coefficients des mêmes puissances de z doivent être égaux.

On aura ainsi la suite des équations

$$\varphi_0(h+p) = \varphi_0(h) + \varphi_1(h)\frac{p}{1} + \varphi_2(h)\frac{p^2}{2!} + \ldots,$$

$$\varphi_1(h+p) = \varphi_1(h) + \varphi_2(h)\frac{p}{1} + \varphi_3(h)\frac{p^2}{2!} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

auxquelles on joindra encore la suivante, obtenue en égalant z à zéro,

$$\varphi_0(h) = \Phi(0,\ h) = \Phi(h).$$

p étant une quantité quelconque, on pourra la prendre infiniment petite, et l'on aura

$$\varphi_1(h) = \frac{\Phi(h+p) - \Phi(h)}{p},$$

$$\varphi_2(h) = \frac{\varphi_1(h+p) - \varphi_1(h)}{p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne la définition des coefficients de la série de Taylor comme dérivées successives de la fonction.

Nous avons donc obtenu le développement suivant :

$$\Phi(z+h) = \Phi(h) + \Phi'(h)\frac{z}{1!} + \Phi''(h)\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

ou, en mettant $z - h$ pour z,

$$\Phi(z) = \Phi(h) + \Phi'(h)\frac{z-h}{1} + \Phi''(h)\frac{(z-h)^2}{2!} + \ldots,$$

formule de Taylor, que nous voulions démontrer.

On sait bien que chaque série ordonnée d'après les puissances de $z - h$ sera convergente dans un cercle décrit avec un certain rayon, autour du centre $z = h$. Pour déterminer ce rayon, nous remarquons que, au lieu de faire croître z, on pourra, après les développements précédents, faire varier h; mais alors on sait que la série reste convergente aussi longtemps que tous les φ, ou ce qui est la même chose, toutes les dérivées de Φ possèdent une valeur finie, c'est-à-dire si la fonction Φ est synectique.

On a donc ainsi ce théorème, que la série de Taylor n'est convergente que dans le cercle le plus grand qui puisse être décrit autour de $z = h$, dans l'intérieur duquel la fonction à développer reste synectique.

La méthode donnée dans cette Note est remarquable par sa simplicité, en n'ayant besoin ni d'un examen du reste de la série, ni des moyens du Calcul intégral ou de celui des résidus.