G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 257-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__257_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(fin, voir même tome, p. 220);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

APPENDICE.

EXERCICES DIVERS.

Trouver la courbe dont la tangente en un point quelconque M *a une inclinaison égale aux* $\frac{2}{3}$ *de celle du rayon vecteur* OM.

La condition du problème est immédiatement exprimée par la relation

$$d\mathrm{M} \triangleq (\mathrm{OM})^{\frac{2}{3}},$$

le signe $\triangleq$ indiquant seulement le parallélisme; et, pour en déduire une équipollence, il faut donner à l'un des membres un multiplicateur convenable.

En raison de la possibilité de changer la variable d'une manière quelconque, nous pouvons supposer

$$(\mathrm{OM})^{-\frac{2}{3}} d\mathrm{M} \triangleq 3\,dt,$$

et, intégrant cette équipollence de la même manière qu'une équation, nous aurons

$$\mathrm{OM} \triangleq (c + t)^3.$$

Si à la constante c nous donnons une valeur réelle, notre équipollence exprimera seulement une série infinie de points en ligne droite. Supposons, au contraire, $c \triangleq a + b\sqrt{\ }$. Faisant l'observation ordinaire sur le changement arbitraire de la variable, nous verrons que l'équipollence la plus générale est

$$\mathrm{OM} \triangleq b^3(t + \sqrt{\ })^3 \triangleq (t^3 - 3t)\,\mathrm{OA} + (3t^2 - 1)\,\mathrm{OB},$$

OA et OB étant respectivement équipollents à b^3 et $b^3\sqrt{\ }$.

Elle représente une courbe du troisième ordre, comprise dans la quatorzième espèce d'Euler.

Si, pour résoudre ce problème, on avait employé les formules connues relatives aux coordonnées parallèles, l'intégration n'eût pas été aussi facile ; et, par les coordonnées polaires, le passage aux coordonnées parallèles aurait été incommode. Du reste, notre équipollence

$$OM \triangleq (t + \surd)^3$$

nous donne, en posant $t = \cot u$,

$$OM \triangleq \frac{1}{\sin^3 u}\, \varepsilon^{3u},$$

ce qui nous montre qu'à l'azimut $3u$ correspond le rayon vecteur $\frac{1}{\sin^3 u}$.

Pareillement

$$dM \triangleq 3(t + \surd)^2 dt$$

nous donne

$$OM \triangleq -\, 3\int \frac{du}{\sin^4 u}\, \varepsilon^{2u},$$

et, par suite, changeant $2u$ en φ, le rayon de courbure sera proportionnel à $\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-4}$, φ étant l'inclinaison de la tangente.

(Saggio, *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, 1835, § 21.)

Trouver le centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique supposé homogène.

En raison de la relation intime qui existe entre la composition des droites et celle des forces, on reconnaît facilement qu'en appelant ds la différentielle de la masse correspondant au point M, le centre de gravité G d'une ligne est donné par

$$OG \triangleq \frac{1}{s}\int OM\, ds,$$

s étant la masse de la ligne entre les deux extrémités que comprend l'intégrale.

Soient AMB l'arc donné de spirale logarithmique et O le pôle. Posons

$$\mathrm{OA} \bumpeq 1, \quad \mathrm{OB} \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}, \quad \mathrm{OM}\, r^t \bumpeq \varepsilon^{\alpha t},$$

d'où

$$d\mathrm{M} \bumpeq r^t \varepsilon^{\alpha t} (\log r + \alpha \sqrt{\ }) \, dt;$$

la valeur absolue de cette différentielle est

$$ds = r^t \sqrt{\log^2 r + \alpha^2}\, dt,$$

et, les calculs effectués, on trouve

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{r\mathrm{OB} - \mathrm{OA}}{(r-1)\left(2 + \dfrac{\alpha}{\log r}\sqrt{\ }\right)}.$$

Pour construire cette équipollence, on prendra, sur une droite choisie arbitrairement, les deux longueurs

$$\mathrm{PQ} = 2, \quad \mathrm{PR} = \frac{1}{r-1};$$

par Q on élèvera sur PQ la perpendiculaire

$$\mathrm{QS} = \frac{\alpha}{\log r},$$

α étant l'angle AOB rapporté au rayon pris pour unité, et $\log r$ le logarithme hyperbolique du rapport OB : OA.

Dans la spirale donnée, on prolongera OB jusqu'en C, de manière que $\mathrm{OC} \bumpeq r\,\mathrm{OB}$; on formera le triangle ACD, directement semblable à PSR, et l'on aura

$$\mathrm{OG} \bumpeq \mathrm{AD}.$$

(*Ibid.*, § 23.)

Trouver les formules fondamentales du mouvement d'un point M *soumis à une force accélératrice f de direction* OM.

Posons

$$\mathrm{OM} \bumpeq z\varepsilon^{u},$$

relation où l'angle u et le rayon vecteur z sont fonctions du temps.

Les différentielles étant prises dans l'hypothèse $\mathcal{D}t = 1$, $\mathcal{D}$M représente la vitesse du mobile, et $\mathcal{D}^2$M la force accélératrice. Donc

$$\mathcal{D}^2 M \triangleq \varepsilon^u (\mathcal{D}^2 z - z\mathcal{D}u^2 + 2\surd\, \mathcal{D}u\,\mathcal{D}z + \surd z\mathcal{D}^2 u) \triangleq f\varepsilon^u.$$

Par suite,

$$\mathcal{D}^2 z - z\mathcal{D}u^2 = f,$$

et

$$2\mathcal{D}u\,\mathcal{D}z + z\mathcal{D}^2 u = 0.$$

(*Ibid.*, § 26).

Trouver les formules du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant.

$\mathcal{D}^2$M doit être la somme géométrique de la gravité g de direction constante et de la résistance r, dirigée suivant la tangente à la trajectoire. Prenant l'équipollence

$$OM \triangleq \int \varepsilon^\varphi\, ds,$$

où φ est l'inclinaison de la tangente, $\frac{ds}{dt}$ la vitesse et $\frac{ds}{d\varphi}$ le rayon de courbure, nous avons

$$\mathcal{D}^2 M \triangleq \varepsilon^\varphi \mathcal{D}^2 s + \surd\, \varepsilon^\varphi \mathcal{D}s\,\mathcal{D}\varphi \triangleq g - r\varepsilon^\varphi,$$

équipollence qui, divisée par ε^φ, se décompose dans les deux équations

$$\mathcal{D}^2 s = g\cos\varphi - r, \quad \mathcal{D}s\,\mathcal{D}\varphi = -g\sin\varphi.$$

(*Ibid.*, § 27.)

Trouver la chaînette homogène.

Prenons l'équipollence

$$OM \triangleq \int \varepsilon^\varphi\, ds,$$

et soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'horizon.

La tension tangentielle au point M peut se représenter par

$f\varepsilon^{\varphi}$, et la force sollicitant l'élément d'arc MM' par $g\,ds\sqrt{\ }$. La première devant être l'intégrale de la seconde, on aura

$$f\varepsilon^{\varphi} \bumpeq gs\sqrt{\ } + a,$$

a étant la tension horizontale.

Cette équipollence donne

$$0 = gs\cos\varphi - a\sin\varphi,$$

d'où

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{g\cos^2\varphi},$$

et la chaînette a pour équipollence

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{a}{g}\int \frac{\varepsilon^{\varphi}\,d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

On reconnaît que le rayon de courbure est proportionnel à $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$, et l'on déduirait aussi de là les autres propriétés de la courbe.

(*Ibid.*, § 28.)

Des points fictifs.

Nous avons déjà vu la manière de représenter les courbes au moyen d'une équipollence contenant une variable susceptible de recevoir toutes les valeurs réelles possibles, ou deux variables dont les valeurs doivent satisfaire à une relation donnée. Supposons maintenant que la variable reçoive une valeur imaginaire : les principes établis pour la représentation géométrique des quantités imaginaires, nous permettront aussi dans ce cas de construire le point exprimé par l'équipollence point qui aurait appartenu à la courbe, si la valeur de la variable avait été réelle au lieu d'être imaginaire; à un point construit de cette manière nous donnerons le nom de *point fictif* de la courbe.

On remarquera qu'en posant la variable $t \bumpeq u + v\sqrt{\ }$, et en attribuant aux deux variables u, v toutes les valeurs réelles possibles, on obtient, par cette double indétermination de t, une équipollence qui donne, non plus une seule série de points, mais une infinité de séries. Donc un point quelconque du plan peut, généralement parlant, être considéré comme un point *fictif* de la courbe. Mais, si à la variable t on attribue successivement les deux valeurs $u + v\surd$, $u - v\surd$, qui diffèrent seulement par le signe de la portion purement imaginaire $v\surd$, nous aurons deux points différents que nous appellerons *points fictifs conjugués;* et la connaissance simultanée de ceux-ci fera connaître les portions, l'une purement réelle, l'autre purement imaginaire, de la valeur de la variable, qu'on ne pourrait jamais obtenir avec un seul point fictif.

Je crois que de l'étude des points fictifs des courbes peuvent résulter quelques applications utiles, exactement comme, en Algèbre, l'emploi des quantités imaginaires offre beaucoup d'avantages; et, entre les deux cas, il y a cette différence, qu'en Algèbre on ne peut attribuer aucune idée précise aux quantités imaginaires, tandis que les points fictifs des courbes sont pleinement déterminés comme paires de points réels. Je me limiterai à quelques brèves remarques sur ce sujet, qui n'a encore été considéré par personne à ma connaissance, et auquel je n'ai pu moi-même m'appliquer que fort peu.

Lorsque deux courbes sont rapportées au même système de coordonnées parallèles (représentées par les lettres x, y), et que les deux courbes sont conséquemment exprimées par deux équations entre x, y, on sait que les intersections réelles des deux courbes donnent les valeurs réelles de x et de y qui satisfont en même temps à l'une et l'autre des deux équations. Pareillement, les intersections fictives conjuguées des courbes nous donneront les valeurs imaginaires de x et de y ou les racines imaginaires des deux précédentes équations. Les intersections fictives conjuguées sont deux points fictifs conjugués, aussi bien de l'une que de l'autre courbe. Soit

$$\mathrm{OM} \;\underline{\Omega}\; x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB}$$

l'équipollence qui représente les deux courbes lorsqu'on suppose les variables x, y soumises à l'une ou à l'autre des deux équations. Nous avons les points fictifs conjugués M′, M″ correspondant, le premier à

$$x = a + b\surd,\quad y = c + d\surd,$$

et le second à

$$x = a - b\surd,\quad y = c - d\surd.$$

Nous aurons, par suite,

$$\mathrm{OM}' \simeq (a + b\surd)\,\mathrm{OA} + (c + a\surd)\,\mathrm{OB},$$
$$\mathrm{OM}'' \simeq (a - b\surd)\,\mathrm{OA} + (c - d\surd)\,\mathrm{OB},$$

et si, L est le point milieu de la droite M′M″ (*), il en résulte

$$\mathrm{OL} \simeq \frac{\mathrm{OM}' + \mathrm{OM}''}{2} \simeq a\mathrm{OA} + c\mathrm{OB},$$

$$\frac{\mathrm{LM}'}{\surd} \simeq \frac{\mathrm{OM}' - \mathrm{OM}''}{2} \simeq b\mathrm{OA} + d\mathrm{OB}.$$

Donc, menant OI égale et perpendiculaire à LM′, il suffira de rapporter, comme d'usage, les points L, I aux axes coordonnés OA, OB, pour avoir, par les coordonnées a, c du premier, les parties réelles des valeurs cherchées de x et de y, et, par les coordonnées b, d du second, les parties imaginaires des mêmes valeurs.

Les points fictifs conjugués d'une droite quelconque DL sont en dehors de cette droite et à égale distance de part et d'autre, de telle sorte que la droite M′M″ qui les unit est coupée perpendiculairement en son milieu par la droite DL. En effet, un point quelconque de la droite DL est exprimé par DM $\simeq t.$DL, et si à la variable t on attribue les deux valeurs imaginaires $a + b\surd$, $a - b\surd$, on obtient les deux points fictifs conjugués M′, M″, et l'on a

$$\mathrm{M}''\mathrm{M}' \simeq 2b\surd\,\mathrm{DL},$$

c'est-à-dire que M″M′ est perpendiculaire à DL.

Une droite et une conique ont toujours, d'après ce qui pré-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

cède, deux points communs, soit réels, soit fictifs conjugués; dans ce dernier cas, on dit que la droite est une sécante idéale de la conique. Quand on connaît le diamètre conjugué à la direction de la sécante, il est toujours facile de déterminer l'ordonnée imaginaire qui appartient à cette sécante idéale; et cette ordonnée, prise perpendiculairement à la sécante, donne les deux intersections fictives de la conique et de la sécante idéale.

Dans un autre Mémoire, j'ai démontré qu'en prenant une de ces intersections fictives pour centre d'homologie et en établissant l'homologie de manière que la sécante idéale ait son homologique à distance infinie, on trouve que la courbe homologique de la conique est une circonférence.

Les points fictifs ont des propriétés communes avec les points réels; mais leur considération m'entraînerait trop en dehors de mon sujet.

(*Metodo delle equipollenze*, *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, 1837, art. 37).

Étant donnée la relation (1) F (MX, NX) = o, *entre les distances du point* X (*) *aux courbes* M, N, *lesquelles distances sont prises sur les normales* MX, NX *à ces courbes, on propose de déterminer la tangente en* X *à la courbe* X.

Pour réduire l'équation (1) à une équipollence, nous y substituerons $\sqrt{(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj.MX})}$, $\sqrt{(\mathrm{NX}\,\mathrm{cj.NX})}$ à la place de MX, NX. Puis, la différentiant, nous aurons une équipollence de la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi\,(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj.}\textcircled{d}\mathrm{MX} + \mathrm{cj.MX}\,\textcircled{d}\mathrm{MX}) \\ \quad + \Psi\,(\mathrm{NX}\,\mathrm{cj.}\textcircled{d}\mathrm{NX} + \mathrm{cj.NX}\,\textcircled{d}\mathrm{NX}) \bumpeq \mathrm{o}. \end{array}\right.$$

Or, MX étant perpendiculaire à la tangente à la courbe M, on a

$$\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq p\sqrt{}\;\mathrm{MX}$$

et

$$\mathrm{cj.MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq p\sqrt{}\;\mathrm{MX}\,\mathrm{cj.MX},$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$\mathrm{MX}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq -p\surd\,\mathrm{cj}.\mathrm{MX}.\mathrm{MX} \bumpeq -\,\mathrm{cj}.\mathrm{MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OM},$$

et, substituant dans le premier terme de (2), il se réduira à

$$\Phi\,(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{OX} + \mathrm{cj}.\mathrm{MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OX}).$$

On fait subir une semblable réduction au second terme de (2), et l'on obtient

$$\frac{\textcircled{d}\mathrm{OX}}{\mathrm{cj}.\,\textcircled{d}\mathrm{OX}} \bumpeq -\frac{\Phi\,\mathrm{MX} + \Psi\,\mathrm{NX}}{\Phi\,\mathrm{cj}.\mathrm{MX} + \Psi\,\mathrm{cj}.\mathrm{NX}},$$

équipollence qui, en observant que Φ, Ψ sont équipollentes à leurs conjuguées, nous montre que

(3) $$\textcircled{d}\mathrm{OX} \bumpeq r\surd\,(\Phi\,\mathrm{MX} + \Psi\,\mathrm{NX}).$$

Donc la direction de la tangente cherchée au point X dépend d'une manière donnée de MX, NX.

Si, par exemple, la relation (1) est

$$a\,\mathrm{MX} + b\,\mathrm{NX} = c,$$

nous trouverons

$$\Phi \bumpeq a\,(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj}.\mathrm{MX})^{-\frac{1}{2}},$$

et une valeur analogue pour Ψ; puis la relation (3) nous montre que la tangente en X à la courbe X est parallèle à la somme géométrique

$$a\,\mathrm{MX}\,(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj}.\mathrm{MX})^{-\frac{1}{2}} + b\,\mathrm{NX}\,(\mathrm{NX}\,\mathrm{cj}.\mathrm{NX})^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire à la somme de deux droites proportionnelles aux nombres a, b, et ayant les directions MX, NX.

Quand les points M, N sont fixes, le précédent théorème est celui déjà donné par Poinsot, en remplacement d'une règle inexacte de Roberval.

(*Ibid.*, art. 18, § 150.)