Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 238-256
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__238_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 37

(voir 1re série, t. I, p 395),

PAR M. H. BROCARD,

Capitaine du Genie à Biskra.

Démontrer que l'équation $\dfrac{9\sin x}{5+4\cos x} = x$ *n'a pas de racine réelle positive supérieure à* 3, *et n'a qu'une racine positive comprise entre* 2 *et* 3. (CAUCHY.)

On peut considérer l'équation proposée comme résultant de l'élimination de y entre les deux suivantes :

$$y = 5 + 4\cos x, \quad y = \frac{9\sin x}{x}.$$

La première représente une *sinusoïde* comprise entre les droites $y=1$, $y=9$, sur lesquelles se trouvent les sommets dont les abscisses ont pour valeurs $k\pi$.

La seconde représente une courbe qui coupe l'axe des x aux points $x=k\pi$, et dont l'ordonnée à partir de $x=3\pi$ est inférieure à 1.

Les deux courbes ont, au point $x=0$, $y=9$, un contact du second ordre, comme il est facile de s'en assurer.

Pour des valeurs croissantes de x à partir de zéro, $5+4\cos x$ est d'abord inférieur à $\dfrac{9\sin x}{x}$, et, pour $x=\pi$, on a

$$5+4\cos x=1 \quad \text{et} \quad \frac{9\sin x}{x}=0;$$

il existe donc certainement entre zéro et π une racine réelle positive de l'équation proposée. D'ailleurs la forme et la disposition des deux courbes ne permettent qu'un seul point d'intersection dans cet intervalle. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une seule racine positive entre zéro et π.

On peut resserrer ces limites ; car, pour $x=\dfrac{3\pi}{4}=2,35$, la fonction $u=9\sin x-(4\cos x+5)x$ est positive, et a pour valeur $u=+1,204\ldots$

Pour

$$x=2,70, \quad u=+0,148,\ldots$$

Pour

$$x=2,80, \quad u=-0,416,\ldots$$

Les substitutions $x=2,726$ et $x=2,72775$ donnent

$$u=+0,0201 \quad \text{et} \quad u=-0,0295.$$

On en déduit pour nouvelle approximation

$$x=2,7264,$$

correspondant à

$$x = 156^\circ 12' 40'', 4.$$

Examinons maintenant s'il existe une racine réelle positive supérieure à 3 (*). Il résulte de ce qui précède qu'il n'y a lieu à considérer que l'intervalle de $5\frac{\pi}{2}$ à 3π. La fonction $y = \frac{9\sin x}{x}$ est égale à $1,14,\ldots$ pour $x = \frac{5\pi}{2}$, et reste moindre que l'unité, à partir de $x = 8$; or, pour cette valeur, $5 + 4\cos x$ est égal à $4,45,\ldots$; donc la rencontre des deux courbes ne peut avoir lieu dans l'intervalle considéré; par conséquent, l'équation proposée n'admet qu'une seule racine réelle positive, comprise entre 2 et 3, et qui a pour valeur approchée $x = 2,7264$.

Question 855

(voir 2e série, t. VII, p. 189);

PAR M. LAUNOY,

Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Démontrer que la distance δ d'un point x, y, z à une droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est donnée dans un système de coordonnées obliques quelconque par la formule

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = {} & (bz - cy)^2\sin^2 yz + (cx - az)^2\sin^2 xz + (ay - bx)^2\sin^2 xy\\ & + 2(bz - cy)(cx - az)(\cos yz\cos zx - \cos xy)\\ & + 2(cx - az)(ay - bx)(\cos zx\cos xy - \cos yz)\\ & + 2(ay - bx)(bz - cy)(\cos xy\cos yz - \cos zx),\end{aligned}$$

(*) Le *maximum* de $\frac{9\sin x}{5 + 4\cos x}$ est 3; par conséquent l'équation proposée

$$\frac{9\sin x}{5 + 4\cos x} = x$$

n'a pas de racine réelle positive supérieure à 3.

(G.)

en posant

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos yz + 2ac\cos xz + 2ab\cos xy.$$

(Housel.)

L'énoncé de la question donnait à ρ^2 la valeur

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Cette valeur est inexacte; on doit poser

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos yz + 2ac\cos xz + 2ab\cos xy.$$

L'énoncé étant ainsi rectifié, voici la démonstration de cette formule.

L'équation d'un plan passant par le point x, y, z et perpendiculaire à la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(a + b\cos xy + c\cos xz)(X - x) \\ &\quad + (a\cos xy + b + c\cos yz)(Y - y) \\ &\quad + (a\cos xz + b\cos yz + c)(Z - z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations de la droite peuvent s'écrire

$$(2)\qquad a(Z - z) - c(X - x) = (cx - az),$$

$$(3)\qquad c(Y - y) - b(Z - z) = (bz - cy).$$

Si, entre ces deux équations, on élimine $(Z - z)$, il viendra

$$(4)\qquad b(X - x) - a(Y - y) = (ay - bx).$$

Je multiplie les équations (2), (3), (4) respectivement par

$$\sin xz,\quad \sin yz,\quad \sin xy,$$

et, après avoir élevé au carré les équations obtenues, je les ajoute à l'équation (1), il en résulte une nouvelle équation dans laquelle je considère d'abord le coefficient de $(X - x)^2$. Il peut s'écrire

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos xy + 2ac\cos xz + 2bc\cos yz$$
$$+ 2bc\cos xz\cos xy - 2bc\cos yz,$$

en remplaçant

$$\sin^2 xz \quad \text{et} \quad \sin^2 xy$$

respectivement par

$$1 - \cos^2 xz \quad \text{et} \quad 1 - \cos^2 xy,$$

et en ajoutant et retranchant la quantité

$$2bc\cos yz.$$

D'après cela, ce coefficient revient à

$$\rho^2 + 2bc(\cos xz\cos xy - \cos yz).$$

Opérant une transformation analogue sur les coefficients de $(Y - y)^2$ et $(Z - z)^2$, j'aurai, pour leurs valeurs réduites,

$$\rho^2 + 2ac(\cos xy\cos yz - \cos xz),$$
$$\rho^2 + 2ab(\cos xz\cos yz - \cos xy).$$

Le coefficient de $2(X - x)(Y - y)$ peut s'écrire

$$a^2\cos xy + b^2\cos xy + ac\cos yz + 2ab\cos^2 xy$$
$$+ 2bc\cos yz\cos xy - bc\cos yz\cos xy$$
$$+ 2ac\cos xz\cos xy - ac\cos xz\cos xy + bc\cos xz$$
$$+ c^2\cos xz\cos yz + c^2\cos xy - c^2\cos xy.$$

J'ai remplacé

$$ab - ab\sin^2 xy$$

par

$$ab\cos^2 xy,$$

et j'ai ajouté et retranché en même temps la même quantité

$$bc\cos yz\cos xy + ac\cos xz\cos xy + c^2\cos xy.$$

Le coefficient devient alors

$$\rho^2 \cos xy + c^2(\cos xz \cos yz - \cos xy) - ac(\cos xz \cos xy - \cos yz)$$
$$- bc(\cos yz \cos xy - \cos xz).$$

On aurait de même, pour les coefficients de

$$2(X-x)(Z-z) \quad \text{et} \quad 2(Y-y)(Z-z),$$

$$\rho^2 \cos yz + a^2(\cos xy \cos xz - \cos zy) - ab(\cos xy \cos yz - \cos xz)$$
$$- ac(\cos xz \cos yz - \cos xy),$$

$$\rho^2 \cos xz + b^2(\cos yz \cos xy - \cos xz) - bc(\cos zy \cos xz - \cos xy)$$
$$- ab(\cos xy \cos xz - \cos yz).$$

L'équation ainsi modifiée devient, en posant

$$\delta^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + 2(Y-y)(Z-z)\cos yz$$
$$+ 2(X-x)(Z-z)\cos xz + 2(X-x)(Y-y)\cos xy,$$

$$(A)\left\{\begin{aligned} \rho^2\delta^2 = {} & (bz-cy)^2 \sin^2 yz + (cx-az)^2 \sin^2(zx) + (ay-bx)\sin^2 xy \\ & +2(\cos yz \cos xz - \cos xy)[ac(Y-y)(Z-z) \\ & \quad - c^2(X-x)(Y-y) - ab(Z-z)^2 + bc(Z-z)(X-x)] \\ & +2(\cos zx \cos xy - \cos yz)[ab(X-x)(Z-z) \\ & \quad - a^2(Y-y)(Z-z) - bc(X-x)^2 + ac(X-x)(Y-y)] \\ & +2(\cos xy \cos yz - \cos zx)[bc(X-x)(Y-y) \\ & \quad - b(X-x)(Z-z) - ac(Y-y)^2 + ab(Y-y)(Z-z)]. \end{aligned}\right.$$

Si, maintenant, je multiplie deux à deux les équations (2), (3) et (4), j'aurai

$$ac(Y-y)(Z-z) - c^2(X-x)(Y-y) - ab(Z-z)^2 + bc(Z-z)(X-x)$$
$$= (bz-cy)(cx-az),$$

$$ab(X-x)(Z-z) - a^2(Y-y)(Z-z) - bc(X-x)^2 + ac(X-x)(Y-y)$$
$$= (cx-az)(ay-bx),$$

$$bc(X-x)(Y-y) - b^2(X-x)(Z-z) - ac(Y-y)^2 + ab(Y-y)(Z-z)$$
$$= (ay-bx)(bz-cy).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (A), il viendra

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = (bz - cy)^2\sin^2 yz + (cx - az)^2\sin^2 zx + (ay - bx)\sin^2 xy \\ + 2(\cos yz\cos xz - \cos xy)(bz - cy)(cx - az) \\ + 2(\cos zx\cos xy - \cos yz)(cx - az)(ay - bx) \\ + 2(\cos xy\cos yz - \cos zx)(ay - bx)(bz - cy),\end{aligned}$$

qui est la formule demandée.

Note. — Solution de la question 965 par le même auteur.

Question 1012

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu d'un point M *tel que le triangle formé par les tangentes issues de ce point à une conique et par la corde de contact ait une aire constante.*

Supposons d'abord que la conique donnée soit un cercle, et soient M le sommet d'un triangle AMB satisfaisant à la question; O le centre du cercle; r son rayon; C le point où OM coupe la base AB, et m^2 la surface donnée du triangle.

Appelons ω l'angle AOM; on a

$$\mathrm{AM} = r\,\mathrm{tang}\,\omega,\quad \mathrm{MC} = r\,\mathrm{tang}\,\omega\sin\omega,\quad \mathrm{AC} = r\sin\omega,$$

et par conséquent

$$\frac{r^2\sin^3\omega}{\cos\omega} = m^2,$$

d'où

$$r^4\sin^6\omega = m^4(1 - \sin^2\omega).$$

Posons

$$\sin^2\omega = z,$$

l'équation devient

$$r^4 z^3 + m^4 z^2 - m^4 = 0.$$

Cette équation n'aura qu'une seule racine réelle positive, qu'on obtiendra par la formule de *Cardan*.

On aura ensuite

$$\mathrm{OM} = \frac{r}{\cos\omega} = \frac{r}{\sqrt{1-z}}.$$

Le lieu cherché sera une circonférence décrite du centre O, avec un rayon égal à $\frac{r}{\sqrt{1-z}} = a'$.

Soit maintenant l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On peut la considérer comme la projection d'un cercle de rayon a, situé dans un plan faisant avec celui de l'ellipse un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$.

On déterminera, comme précédemment, le rayon a' du cercle, lieu des points tels, que les tangentes menées de chacun d'eux à ce cercle, de rayon a, forment avec la corde de contact un triangle dont l'aire soit égale à $\frac{a}{b}m^2$. Sa projection sur le plan de l'ellipse sera une ellipse concentrique et homothétique à la première, dont les demi-axes seront a' et $\frac{b}{a}a'$, et qui sera le lieu géométrique des points tels, que les tangentes menées de chacun d'eux à l'ellipse donnée forment avec la corde de contact un triangle d'aire m^2; son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a'^2b^2.$$

Si, au lieu de l'ellipse, on a l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

il suffira, dans l'équation du lieu, de changer b^2 en $-b^2$, ce qui donnera une autre hyperbole homothétique et concentrique

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a'^2b^2.$$

Si le grand axe de l'ellipse donnée s'allonge jusqu'à devenir infini, l'ellipse devient à la limite une parabole, et le lieu des points M, qui est toujours une ellipse homothétique et concentrique, devient à la limite une parabole de même axe.

Considérons d'abord le point M situé sur l'axe, et soit α sa distance au sommet de la parabole donnée. La surface du triangle correspondant sera

$$2\alpha\beta = m^2,$$

et l'on aura

$$\beta^2 = 2p\alpha, \quad \text{d'où} \quad \beta = (2p)^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$2\alpha\beta = (2\alpha)^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}} = m^2,$$

$$2\alpha = \sqrt[3]{\frac{m^4}{p}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^4}{p}}.$$

Soit un autre point M′ non situé sur l'axe. Menons de ce point les deux tangentes, et une parallèle à l'axe qui rencontre la parabole en A′. Soient α' et β' les coordonnées de l'un des points de contact rapportées à ce diamètre et à la tangente en A′. On aura, en appelant θ l'angle que la corde de contact fait avec l'axe et p' le nouveau paramètre,

$$2\alpha'\beta'\sin\theta = m^2 \quad \text{et} \quad \beta'^2 = 2p'\alpha';$$

d'où

$$p'^{\frac{1}{2}}(2\alpha')^{\frac{3}{2}}\sin\theta = m^2 = p^{\frac{1}{2}}(2\alpha)^{\frac{3}{2}};$$

mais on sait que $p'\sin^2\theta = p$, et par suite $p'^{\frac{1}{2}}\sin\theta = p^{\frac{1}{2}}$; donc

$$2\alpha' = 2\alpha \quad \text{et} \quad \alpha' = \alpha.$$

La parabole, lieu des points M, n'est donc que la parabole primitive que l'on ferait glisser parallèlement à l'axe, et en sens inverse de cet axe, d'une quantité $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^4}{p}}$, et son équation sera

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{1}{2}\sqrt[8]{\frac{m^4}{p}}\right).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Linger, élève de l'École Polytechnique de Bude, Lez et Brocard.

Question 1101

(voir 2ᵉ série, t. XI, p 527);

PAR M. POUJADE,

Professeur au lycée de Nice.

a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe ayant respectivement pour rayons $a + b$ et $a - b$. Si, d'un point quelconque de l'un d'eux, on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle.

(JOSEPH BRUNO.)

Deux tangentes à l'ellipse rapportée à ses axes ont pour équations

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{x\cos\varphi'}{a} + \frac{y\sin\varphi'}{b} - 1 = 0.$$

en désignant par φ et φ' les paramètres angulaires des points de contact. Elles se coupent en un point dont les coordonnées sont

$$x = a\,\frac{\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}}, \quad y = b\,\frac{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}},$$

et, pour que ce point soit sur le cercle qui a pour rayon $a+b$ par exemple, il faut que

$$(1)\qquad a^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}+b^2\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}=(a+b)^2\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}.$$

Les normales correspondantes sont représentées par

$$\frac{by}{\sin\varphi}-\frac{ax}{\cos\varphi}+c^2=0 \quad \text{et} \quad \frac{by}{\sin\varphi'}+\frac{ax}{\cos\varphi'}+c^2=0.$$

Leur point d'intersection a pour coordonnées

$$x'=\frac{c^2}{a}\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}},$$

$$y'=\frac{c^2}{b}\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}-\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}=z,\quad \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}=u,\quad \cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}=v.$$

Les relations

$$(1)\qquad a^2v^2+b^2u^2=(a+b)^2z^2 \quad \text{et} \quad u^2+v^2=1$$

donnent u^2 et v^2 en fonctions de z^2, et, par suite, les valeurs de x', y' deviennent

$$x'=\frac{[2z^2(a+b)-a]\sqrt{(a+b)^2z^2-b^2}}{cz},$$

$$y'=\frac{[b-2z^2(a+b)]\sqrt{a^2-(a+b)^2z^2}}{cz}.$$

Élevant au carré et ajoutant, z disparaît, ainsi qu'un facteur $(a+b)$, et l'on a

$$x'^2+y'^2=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}=(a-b)^2, \quad \text{C. Q. F. D. (*)}.$$

Solution de la même question;

Par M. Charles BRISSE.

On trouve dans Salmon, p. 244, pour les coordonnées de l'intersection des normales menées aux points (x', y'), (x'', y''),

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^4}\alpha x'x'', \quad y=\frac{b^2-a^2}{b^4}\beta y'y'',$$

α et β étant les coordonnées de l'intersection des tangentes aux points (x', y'), (x'', y'').

Des équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1,$$

on déduit

$$\frac{x'x''}{a^4}=\frac{b^2-\beta^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}, \quad \frac{y'y''}{b^4}=\frac{a^2-\alpha^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},$$

(*) La construction qui détermine les axes $2a$, $2b$ d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués conduit assez directement à la proposition énoncée. Supposez, en effet, que d'un point M situé à la distance $(a+b)$ du centre O de l'ellipse on mène à cette courbe deux tangentes, et aux points de contact des normales qui se coupent en un point N. Soient $OB=b'$ le rayon de l'ellipse dirigé suivant OM, et $OA=a'$ le rayon conjugué de OB; en menant du point B une perpendiculaire à OA, et prenant sur cette perpendiculaire de chaque côté du point B des distances BM', BN' égales à a', on déterminera un triangle OM'N' dans lequel $OM'=a+b$, $ON'=a-b$, $M'N'=2a'$. Or il n'est pas difficile de démontrer, sans calculs, que le triangle OM'N' est égal au triangle OMN, d'où $ON=ON'=a-b$.

Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé des deux tangentes et de la corde des contacts est égal à a', et la distance du centre de ce cercle au centre de l'ellipse est égale à b'. (G.)

et par suite, pour les coordonnées cherchées,

$$x=(a^2-b^2)\frac{b^2-\beta^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}\alpha,\quad y=(b^2-a^2)\frac{a^2-\alpha^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}\beta,$$

d'où, pour l'équation du lieu,

$$(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)^2(x^2+y^2)=(a^2-b^2)^2[\alpha^2(b^2-\beta^2)^2+\beta^2(a^2-\alpha^2)^2],$$

ou, en multipliant le second membre par $\alpha^2+\beta^2$, et le divisant par son égal a^2+b^2,

$$(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)^2(x^2+y^2)=(a-b)^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)^2.$$

Omettant le facteur $(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)^2$, on a donc

$$x^2+y^2=(a-b)^2.$$

Note. — La question 1101 a été résolue par MM. Androwski, étudiant à l'Université de Varsovie; Kruschwitz, à Berlin; Chervet, élève au lycée de Moulins; Ch. Combes, élève au lycée de Clermont-Ferrand; L. M. T., élève à Paris; Moret-Blanc, Bourguet, Gambey, Lez, Brocard, Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1117

(voir 2e série, t. XII, p. 335);

Par M. Frédéric DUBOST,

Élève du lycée de Moulins.

Supposons qu'un polygone régulier de n côtés soit circonscrit à un cercle et qu'on fasse tourner la moitié de ce polygone autour d'un axe passant par l'un des points de contact et par le centre, on trouvera sans grandes difficultés que la mesure V_n du volume engendré par le demi-polygone, en prenant pour unité le volume de la sphère inscrite, est donnée par la formule

$$(1)\qquad V_n=\frac{1}{4}\left(1+\text{séc}\frac{\pi}{n}\right)^2,\ \textit{lorsque } n \textit{ est impair,}$$

et par

$$(2)\qquad V_n=\frac{1}{2}\left(1+\text{séc}^2\frac{\pi}{n}\right),\ \textit{lorsque } n \textit{ est pair.}$$

D'ailleurs, en faisant tourner un demi-polygone d'un nombre pair n de côtés autour d'un diamètre du cercle circonscrit, la mesure V'_n du volume engendré, en prenant toujours pour unité le volume de la sphère inscrite, est donnée par la formule

$$V'_n = \text{séc}\,\frac{\pi}{n}. \tag{3}$$

Déduire des formules (1) *et* (2) *qu'on a les égalités*

$$V_3 - V_5 = \textit{le volume de la sphère},$$
$$V_3 + V_4 + V_5 = 5 \textit{ fois le volume de la sphère;}$$

et des formules (1), (2) *et* (3) *qu'on a la suite décroissante*

$$V_3,\ V_4,\ V'_4,\ V_5,\ V_6,\ V'_6, \ldots$$

(COMPAGNON, professeur au collége Stanislas.)

1. Soient r le rayon de la sphère et O son centre. Je suppose d'abord n impair.

Le demi-polygone régulier étant ABC...LM, l'axe de rotation passe par le sommet A et par le point de contact M (*). Le volume V_n est la somme des volumes engendrés par le secteur polygonal OABC...L et par le triangle rectangle OML, dans lequel l'angle $\text{MOL} = \frac{\pi}{n}$.

Le premier a pour mesure

$$\frac{2}{3}\pi r^2 \times \text{AM} = \frac{2}{3}\pi r^2 (r + \text{OL}) = \frac{2}{3}\pi r^3 \left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right).$$

La mesure du second est

$$\frac{1}{3} r \times \pi \text{ML}^2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \text{tang}^2 \frac{\pi}{n};$$

d'où

$$V_n = \frac{\pi r^3}{3}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et, en prenant pour unité le volume de la sphère, on a

(1) $$V_n = \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

2. Si n est pair, l'axe de rotation passe par deux points de contact M et A. Le volume décrit par le demi-polygone ABC...LM se compose des volumes engendrés par les deux triangles rectangles OML, OAB, et par le secteur polygonal OBC...L. Il en résulte

$$V_n = \frac{2}{3}\pi r^3 \,\text{tang}^2 \frac{\pi}{n} + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}\left(1 + \text{séc}^2 \frac{\pi}{n}\right),$$

et, en posant

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 1,$$

on a

(2) $$V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2 \frac{\pi}{n}\right).$$

3. Le rayon OL du cercle circonscrit au polygone considéré est égal à $r\,\text{séc}\,\frac{\pi}{n}$; par conséquent

$$V'_n = \frac{4}{3}\pi r^2 \times r\,\text{séc}\,\frac{\pi}{n} = \frac{4}{3}\pi r^3 \,\text{séc}\,\frac{\pi}{n},$$

et, en posant

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,$$

il vient

(3) $$V'_n = \text{séc}\,\frac{\pi}{n}.$$

4. La formule (1) donne

$$V_3 - V_5 = \frac{1}{4}\left[\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{5}\right)^2\right].$$

Or

$$\text{séc}\,\frac{\pi}{3} = 2, \quad \text{séc}\,\frac{\pi}{5} = \sqrt{5} - 1,$$

d'où

$$1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{3} = 3, \quad 1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{5} = \sqrt{5},$$

et par suite

$$V_3 - V_5 = 1.$$

Des formules (1) et (2), on déduit

$$V_3 + V_4 + V_5 = \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\,\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{5}\right)^2,$$

ou

$$V_3 + V_4 + V_5 = \frac{1}{4}\,9 + \frac{1}{2}\,3 + \frac{1}{4}\,5 = 5.$$

5. La suite V_3, V_4, V'_4, V_5, V'_6,... est décroissante, car

$$V_3 = \frac{9}{4},\ V_4 = \frac{3}{2},\ V'_4 = \sqrt{2},\ V_5 = \frac{5}{4},\ V'_6 = \frac{2}{3}\sqrt{3},\ldots.$$

On voit facilement que, dans le cas de n pair, on a

$$V_n > V'_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\,\frac{\pi}{n}\right) > \text{séc}\,\frac{\pi}{n};$$

en effet, cette dernière inégalité revient à la suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\text{séc}\,\frac{\pi}{n} - 1\right)^2 > 0,$$

qui est évidente.

Note du Rédacteur. — Il ne résulte pas, de ce que les cinq premiers termes de la suite indéfinie V_3, V_4, V'_4, V_5, V'_6,... ont des valeurs décroissantes, qu'il en soit de même de tous les termes suivants. Il faut démontrer que, si n représente un nombre impair égal à 3 ou plus grand que 3, on a

$$V_n > V_{n+1}, \quad V_{n+1} > V'_{n+1}, \quad V'_{n+1} > V_{n+2}.$$

Voici comment M. Compagnon établit ces trois inégalités.

1° Je dis que, n étant un nombre impair égal à 3 ou plus grand que 3, on a

$$\frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\,\frac{\pi}{n+1}\right),$$

ou

$$\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > 2+2\,\text{séc}^2\,\frac{\pi}{n+1}.$$

D'abord on peut remplacer cette inégalité par celle-ci :

$$(1)\qquad \text{tang}^2\frac{\pi}{n}+2\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}} > 2+2\,\text{tang}^2\frac{\pi}{n+1};$$

mais

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{2n} = \frac{-1+\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}},$$

donc

$$\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}} = 1+\text{tang}\,\frac{\pi}{n}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n},$$

et l'inégalité (1) devient

$$\text{tang}^2\frac{\pi}{n}+2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{n}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n} > 2\,\text{tang}^2\,\frac{\pi}{n+1},$$

ou

$$1+2\,\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}} > 2\left(\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\right)^2.$$

D'ailleurs

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{n} = \frac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{1-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n}};$$

d'où

$$\frac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}} = 1-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n},$$

donc l'inégalité précédente revient à

$$(2)\qquad 2-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n} > 2\left(\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\right)^2.$$

Maintenant on sait qu'on a

$$\frac{\text{tang}(a+b)}{\text{tang}\,a} > \frac{a+b}{a},$$

en supposant les arcs a et b positifs et $a+b<\frac{\pi}{2}$ (voir *Éléments de Trigonométrie* de MM. Delisle et Gérono, 6e édition, p. 170); donc

$$\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{4}} < \frac{n}{2};\quad \text{d'où}\quad \text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n} < \frac{4}{n^2},$$

et de même

$$\frac{\tang\frac{\pi}{n+1}}{\tang\frac{\pi}{n}} < \frac{n}{n+1};$$

par conséquent, si l'on démontre qu'on a

$$(3)\qquad 2-\frac{4}{n^2} > \frac{2n^2}{(n+1)^2} \quad \text{ou} \quad 1-\frac{2}{n^2} > \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

l'égalité (2) aura lieu *a fortiori*.

Or l'inégalité (3) se réduit à celle-ci :

$$n^2(n-1)+n(n^2-4)-2>0,$$

qui est évidemment satisfaite, d'après l'hypothèse faite sur n.

Remarque. — L'inégalité $\left(1+\text{séc}\frac{\pi}{n}\right)^2 > 2+2\,\text{séc}^2\frac{\pi}{n+1}$ est satisfaite pour $n=2$.

De plus, si l'on suppose qu'un arc $a=\pi$ ou qu'il soit plus petit que π, et si l'on a $n=2$ ou $n>2$ (n n'étant pas nécessairement un nombre entier), on démontrerait, comme ci-dessus, qu'on a encore

$$\left(1+\text{séc}\,\frac{a}{n}\right)^2 > 2+2\,\text{séc}^2\frac{a}{n+1}.$$

2° Il s'agit de démontrer que, n étant un nombre pair égal à 4 ou plus grand que 4, on a

$$\frac{1}{2}\left(1+\text{séc}^2\frac{\pi}{n}\right) > \text{séc}\,\frac{\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \left(1-\text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > 0,$$

ce qui a évidemment lieu.

Remarque. — Cette inégalité est toujours vraie, si l'on remplace $\frac{\pi}{n}$ par un arc quelconque a.

3° Il faut démontrer que, n étant égal à 4 ou un nombre pair plus grand que 4, on a

$$(1)\qquad \text{séc}\,\frac{\pi}{n} > \frac{1}{4}\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{n+1}\right)^2 \quad \text{ou} \quad 4\,\text{séc}\,\frac{\pi}{n} > \left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{n+1}\right)^2.$$

D'abord on peut remplacer cette inégalité par celle-ci :

$$4\sqrt{1+\tang^2\frac{\pi}{n}} > 2+\tang^2\frac{\pi}{n+1}+2\sqrt{1+\tang^2\frac{\pi}{n+1}},$$

ou

$$4\left(1+\tang\frac{\pi}{n}\tang\frac{\pi}{2n}\right) > 2+\tang^2\frac{\pi}{n+1}$$
$$+\,2\left(1+\tang\frac{\pi}{n+1}\tang\frac{\pi}{2(n+1)}\right),$$

ou

$$4\tang\frac{\pi}{n}\tang\frac{\pi}{2n} > \tang^2\frac{\pi}{n+1}+2\tang\frac{\pi}{n+1}\tang\frac{\pi}{2(n+1)},$$

ou

$$(2)\qquad 2\times\frac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}>\left(\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\right)^2+2\,\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\,\text{tang}\,\frac{\frac{\pi}{2(n+1)}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}};$$

mais on a vu plus haut que $\dfrac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}=1-\text{tang}^2\,\dfrac{\pi}{2n}$; d'ailleurs on a aussi les inégalités

$$\text{tang}^2\,\frac{\pi}{n}<\frac{4}{n^2},\quad \text{tang}\,\frac{\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}<\frac{n}{n+1},\quad \text{tang}\,\frac{\frac{\pi}{2(n+1)}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}<\frac{n}{2(n+1)};$$

donc on aura démontré l'inégalité (2) si l'on fait voir qu'on a

$$2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)>\frac{2n^2}{(n+1)^2}\quad\text{ou}\quad 1-\frac{4}{n^2}>\frac{n^2}{(n+1)^2},$$

ou enfin

$$(3)\qquad n^2(n-3)+n(n^2-8)-4>0.$$

Or cette inegalité est évidemment satisfaite, d'après l'hypothèse faite sur n.

Remarque. — Il est facile de vérifier que l'inégalité (1) est satisfaite pour $n=2$ et pour $n=3$.

D'ailleurs l'inégalité (3) l'est aussi pour tout nombre entier égal à 4 ou plus grand que 4.

Note du Rédacteur. — La question 1117 a été résolue par MM. P. Vannetelle, élève au Lycée de Reims; E. Kruschwitz, à Berlin; Moret-Blanc, Lez.