NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 220-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__220_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 189);

Par M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. Laisant, capitaine du Génie.)

180. Une parabole, ayant au point M un contact du troisième ordre avec la courbe donnée, peut s'exprimer par

$$MN \bumpeq y\,MT + \frac{y^2}{2}\,MW,$$

N étant le point générateur de la parabole, MT sa tangente, MW la direction du diamètre (179), et y la variable de laquelle dépendent les différents points de la parabole. Pour qu'il y ait contact du troisième ordre entre la courbe donnée M et la parabole N, il faut (169) qu'on puisse prendre pour y une telle fonction de t, que $y = 0$ donne

$$\mathcal{D}M \bumpeq \mathcal{D}y\,MT + y\,\mathcal{D}y\,MW,$$
$$\mathcal{D}^2M \bumpeq \mathcal{D}^2y\,MT + (y\,\mathcal{D}^2y + \mathcal{D}y^2)\,MW,$$
$$\mathcal{D}^3M \bumpeq \mathcal{D}^3y\,MT + (y\,\mathcal{D}^3y + 3\,\mathcal{D}y\,\mathcal{D}^2y)\,MW,$$

les droites MT, MW étant considérées comme fixes dans les seconds membres.

Par suite, se rappelant que $MT \bumpeq \mathcal{D}M$, lorsque $y = 0$, on devra avoir

$$\mathcal{D}y = 1,$$

puis

$$\mathcal{D}^2M \bumpeq -q\,\mathcal{D}M + MW, \tag{15}$$

$-q$ étant la valeur que prend $\mathcal{D}y^2$ lorsque $y = 0$.

Finalement

$$\mathcal{D}^3 M \bumpeq \mathcal{D}^3 y\, \mathcal{D} M - 3q\, MW.$$

Substituant, dans cette relation, la valeur de MW donnée par (15), on aura

$$(16) \qquad \mathcal{D}^3 M + 3q\,\mathcal{D}^2 M \bumpeq (\mathcal{D}^3 y - 3q^2)\,\mathcal{D} M.$$

Cette équipollence servira à déterminer q, pour en substituer ensuite la valeur dans

$$MW \bumpeq q\,\mathcal{D} M + \mathcal{D}^2 M.$$

On voit donc que cette droite MW est la même que celle du numéro précédent.

181. Comme première application, cherchons la parabole qui a un contact du troisième ordre avec la développante de cercle exprimée (178) par

$$OM \bumpeq \int \varepsilon^{\varphi} \varphi\, d\varphi.$$

Posant, pour abréger, $\mathcal{D}\varphi = 1$, c'est-à-dire prenant les dérivées par rapport à φ, d'après la relation (14), nous devrons rendre réelle l'expression

$$3q(1 + \varphi\surd) + (2\surd - \varphi).$$

Par suite, nous aurons

$$q \bumpeq -\frac{2}{3\varphi},$$

et, substituant dans (15),

$$MW \bumpeq \left(\tfrac{1}{3} + \varphi\surd\right)\varepsilon^{\varphi}.$$

Donc (*fig.* 35), si l'on prolonge de $RW \bumpeq \frac{1}{3} OR$ le rayon de courbure $OR = 1$ de la développée AR, la droite MW divisera en deux parties égales la corde de la courbe AM parallèle à la tangente au point M et infiniment voisine.

Cette relation, entre le rayon de courbure MR, celui RO de sa développée et la direction de la droite MW, subsiste, quelle que soit la courbe M. Si celle-ci est une conique, MW en est un diamètre : on a ainsi un moyen facile de construire le rayon de courbure RO de la développée d'une conique.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 181.

Pour étendre la relation entre les droites MW, MR et RO à une courbe quelconque, supposons que l'équation en soit écrite sous la forme (7) du n° 168, et prenons l'arc s pour variable indépendante.

Nous aurons

$$\mathcal{D}M \triangleq \varepsilon^{\varphi}, \quad \mathcal{D}^2 M \triangleq \surd\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathcal{D}\varphi, \quad \mathcal{D}^3 M \triangleq \varepsilon^{\varphi}\left(\surd\,\mathcal{D}^2\varphi - \mathcal{D}\varphi\right).$$

D'après la relation (14), il faudra rendre réelle l'expression

$$3q\surd\,\mathcal{D}\varphi + \surd\,\mathcal{D}^2\varphi - \mathcal{D}\varphi,$$

ce qui nous donnera

$$q = -\frac{\mathcal{D}^2\varphi}{3\,\mathcal{D}\varphi}.$$

De là, substituant dans (15),

$$MW \triangleq \varepsilon^{\varphi}\,\mathcal{D}\varphi\left(\surd - \frac{\mathcal{D}^2\varphi}{3\,\mathcal{D}\varphi^2}\right).$$

Mais la relation (8) du même n° 168, appliquée successivement aux courbes M et R, donne

$$MR \triangleq \surd\,\frac{\varepsilon^{\varphi}}{\mathcal{D}\varphi},$$

$$RC \triangleq \surd\,\frac{\mathcal{D}\,\mathrm{gr.}\,MR}{\mathcal{D}\varphi}\,\varepsilon^{\varphi-\frac{\pi}{2}} \triangleq \frac{\mathcal{D}\left(\frac{1}{\mathcal{D}\varphi}\right)}{\mathcal{D}\varphi}\,\varepsilon^{\varphi} \triangleq \frac{\mathcal{D}^2\varphi}{\mathcal{D}\varphi^3}\,\varepsilon^{\varphi},$$

d'où

$$\frac{RC}{3} \triangleq \frac{\mathcal{D}^2\varphi}{3\,\mathcal{D}\varphi^3}\,\varepsilon^{\varphi},$$

et, par soustraction,

$$MR - \frac{RC}{3} \triangleq MR + \frac{CR}{3} \triangleq \frac{\varepsilon^{\varphi}}{\mathcal{D}\varphi}\left(\surd - \frac{\mathcal{D}^2\varphi}{3\,\mathcal{D}\varphi^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$MR + \frac{CR}{3} \triangleq \frac{MW}{\mathcal{D}\varphi^2},$$

ce qui montre bien que les deux droites $MR + \frac{CR}{3}$ et MW ont la même direction.

182. Une courbe rapportée à des coordonnées parallèles, soit orthogonales, soit obliques, est exprimée par l'équipollence

$$\mathrm{OM} \bumpeq x\mathrm{OA} + y\mathrm{OB}.$$

Prenant les dérivées par rapport à x, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathrm{M} &\bumpeq \mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\,\mathrm{OB}, \\ \mathfrak{D}^2\mathrm{M} &\bumpeq \mathfrak{D}^2 y\,\mathrm{OB}, \\ \mathfrak{D}^3\mathrm{M} &\bumpeq \mathfrak{D}^3 y\,\mathrm{OB}. \end{aligned}$$

D'après l'équipollence (14) du n° 179, nous devons réduire

$$(3q\,\mathfrak{D}^2 y + \mathfrak{D}^3 y)\,\mathrm{OB}$$

à être parallèle à $\mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\mathrm{OB}$, ce qui ne peut s'obtenir qu'en supposant

$$3q\mathfrak{D}^2 y + \mathfrak{D}^3 y = 0.$$

D'après cela, la relation (15) donnera

$$\mathrm{MW} \bumpeq -\frac{\mathfrak{D}^3 y}{3\mathfrak{D}^2 y}(\mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\,\mathrm{OB}) + \mathfrak{D}^2 y\,\mathrm{OB}.$$

183. Dans la spirale logarithmique

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t,$$

on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathrm{M} &\bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \sqrt{\ }), \\ \mathfrak{D}^2\mathrm{M} &\bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \sqrt{\ })^2, \ldots \end{aligned}$$

Donc, d'après la relation (14),

$$3q\,(a + \sqrt{\ })^2 + (a + \sqrt{\ })^3 \bumpeq r\,(a + \sqrt{\ }),$$

c'est-à-dire

$$3q + 2a = 0,$$

et l'on aura

$$\mathrm{MW} \bumpeq \left(\frac{a}{3} + \sqrt{\ }\right)(a + \sqrt{\ })\,e^{at}\,\varepsilon^t.$$

184. Problème. — *Trouver la section conique ayant un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée, en un de ses points* M. — Considérons l'ellipse qui, passant par le point M, a pour centre W, et dont le demi-diamètre, conjugué à WM, est équipollent à la droite MT, supposée tangente à la courbe donnée.

Cette ellipse aura pour équipollence (145)

$$\mathrm{WN} \bumpeq x\,\mathrm{WM} + y\,\mathrm{MT},$$

$x^2 + y^2$ étant égal à 1; de là

$$\mathrm{MN} \bumpeq \left(1 - \sqrt{1 - y^2}\right)\mathrm{MW} + y\,\mathrm{MT}.$$

L'hyperbole de centre C est

$$\mathrm{CN} \bumpeq \sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{CM} + y.\mathrm{MT},$$

et, posant $\mathrm{CM} \bumpeq \mathrm{MW}$, on aura

$$\mathrm{MN} \bumpeq \left(\sqrt{1 + y^2} - 1\right)\mathrm{MW} + y\,\mathrm{MT}.$$

Ainsi, en tenant compte des seuls termes du quatrième ordre, nous pourrons établir, pour la conique osculatrice, l'équipollence

$$\mathrm{MN} \bumpeq \left(\tfrac{1}{2}y^2 \pm \tfrac{1}{8}y^4\right)\mathrm{MW} + y\,\mathrm{MT}\ (*),$$

le signe supérieur répondant au cas de l'ellipse, et le signe inférieur au cas de l'hyperbole. La même équipollence exprime la parabole (180), lorsqu'on y supprime le terme affecté du double signe.

Les conditions du contact du quatrième ordre, entre la courbe M et la conique (par rapport à laquelle les points M, W, T doivent être considérés comme fixes), s'obtiennent par dérivation, puis en faisant $y = 0$; si

(*) On obtient cette forme en développant les radicaux par la formule du binôme. (*Note du Traducteur.*)

bien que, en supposant, pour abréger, lorsque $y=0$, qu'on ait

$$\mathcal{D}y=p,$$
$$\mathcal{D}^2y=-pq,$$
$$\frac{\mathcal{D}^3y}{p}-3q^2=r,$$

on a, pour la détermination des droites MT, MW, les équipollences

$$p\,\mathrm{MT}\mathrel{\underline{\frown}}\mathcal{D}\mathrm{M}, \tag{16}$$

$$p^2\,\mathrm{MW}\mathrel{\underline{\frown}}\mathcal{D}^2\mathrm{M}+q\,\mathcal{D}\mathrm{M}, \tag{17}$$

pourvu que les quantités réelles p, q, r satisfassent à la relation

$$\mathcal{D}^3\mathrm{M}\mathrel{\underline{\frown}}-3q\,\mathcal{D}^2\mathrm{M}+r\,\mathcal{D}\mathrm{M}, \tag{18}$$

et que la droite

$$\mathcal{D}^4\mathrm{M}-(4r+15q^2\pm3p^2)\,\mathcal{D}^2\mathrm{M}\ (*) \tag{19}$$

soit parallèle à $\mathcal{D}\mathrm{M}$.

La valeur de q, donnée par la relation (18), est la même que celle donnée par la relation (14) du n° 179; et, par suite, la droite MW de la relation (17) a la même direction que celle de la relation (15), (179).

185. Pour la développante de cercle (178, 181), nous avons déjà trouvé

$$q=-\frac{2}{3\varphi},$$

si bien que l'équipollence (18) donne

$$\varepsilon^\varphi(2\sqrt{\ }-\varphi)-\frac{2}{\varphi}\,\varepsilon^\varphi(1+\varphi\sqrt{\ })\mathrel{\underline{\frown}}\varphi.r\varepsilon^\varphi,$$

(*) Ces résultats et ceux qui suivent proviennent de calculs de dérivées, un peu longs peut-être, mais sans difficultés sérieuses.

(*Note du Traducteur.*)

d'où

$$r = 1 - \frac{2}{\varphi^2},$$

$$4r + 15q^2 = -4 - \frac{4}{3\varphi^2},$$

et, d'après l'expression (19), nous devrons rendre réelle la suivante :

$$-3 - \varphi\sqrt{} + \left(4 + \frac{4}{3\varphi^2} \mp 3p^2\right)(1 + \varphi\sqrt{}),$$

ce qui ne peut s'obtenir qu'avec le signe supérieur et en posant

$$p^2 = 1 + \frac{4}{9\varphi^2},$$

d'après quoi les relations (16), (17) détermineront deux diamètres conjugués de l'ellipse osculatrice. Nous pourrons dire que la développante de cercle a, en tous ses points, une *courbure elliptique,* puisqu'elle a un contact du quatrième ordre avec une ellipse.

186. Dans le cas général où

$$\mathrm{OM} \triangleq x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB},$$

y étant fonction de la variable indépendante x, nous avons déjà trouvé (182),

$$3q\,\mathcal{D}^2 y + \mathcal{D}^3 y = 0,$$

et la relation (18) donne $r = 0$; puis, d'après (19), on a

$$\pm p^2 = \frac{\mathcal{D}^4 y}{3\mathcal{D}^2 y} - \frac{5}{9}\left(\frac{\mathcal{D}^3 y}{\mathcal{D}^2 y}\right)^2.$$

Le signe de ce second membre montre si la courbure est *elliptique* ou *hyperbolique,* et, s'il s'annule, la courbure est *parabolique*.

187. Pour la spirale logarithmique (**183**)

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\, \varepsilon^{t},$$

on a

$$3q + 2a = 0,$$
$$r = 3qa + a^2 - 1 = -a^2 - 1,$$

et nous devrons rendre réelle l'expression

$$(a + \sqrt{\ })^3 - (\tfrac{8}{3}a^2 - 4 \pm 3p^2)(a + \sqrt{\ }),$$

ce qui donne

$$\pm p^2 = \tfrac{1}{9}a^2 + 1.$$

On doit prendre le signe supérieur; la courbure est elliptique, et l'ellipse osculatrice a son centre déterminé par

$$(\tfrac{1}{3}a - \sqrt{\ })\,\mathrm{MW} \bumpeq (a + \sqrt{\ })\,\mathrm{OM}.$$

Par des calculs semblables, on trouve aussi que la cycloïde a en tous ses points la courbure elliptique; que la logarithmique et la sinusoïde ont, au contraire, la courbure hyperbolique; que la parabole ou hyperbole

$$\mathrm{OM} \bumpeq x\mathrm{OA} + x^n\mathrm{OB}$$

a une courbure toujours elliptique si n tombe entre $\frac{1}{2}$ et 2, et toujours hyperbolique si n est moindre que $\frac{1}{2}$ ou plus grand que 2. La lemniscate, exprimée par

$$\mathrm{OM} \bumpeq \sqrt{1 + \varepsilon^{t}},$$

a une courbure elliptique auprès des sommets, hyperbolique dans les environs des points d'inflexion; elle a donc quatre points où la courbure est parabolique. Ces points correspondent à

$$\cos\frac{t}{2} = 1 : 4,$$

et sont faciles à construire.

188. Problème. — *Trouver l'enveloppe d'un système de courbes exprimé par* $\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t, \tau)$, *$\tau$ étaht un paramètre dont les valeurs réelles donnent toutes les courbes du système.* — Comme chaque point de la courbe cherchée doit se trouver sur l'une des courbes données, il en résulte que cette même équipollence nous représentera aussi la courbe cherchée, pourvu qu'on y suppose que τ est une certaine fonction de t. Or, au point M, la tangente à la courbe correspondant à une valeur déterminée du paramètre τ est donnée en direction (163) par la dérivée $\mathcal{D}_t\mathrm{M}$ prise par rapport à la seule variable t; au lieu que la tangente à la courbe exprimée par

$$\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t, \tau),$$

lorsqu'on y suppose que τ soit une fonction de t, est exprimée par la dérivée

$$\mathcal{D}\mathrm{M} \bumpeq \mathcal{D}_t\mathrm{M} + \mathcal{D}_\tau\mathrm{M}\,\mathcal{D}\tau,$$

$\mathcal{D}\tau$ étant la dérivée de τ par rapport à t.

Pour que la seconde courbe soit l'enveloppe des premières, il faut que ces deux tangentes aient une direction identique; par suite la droite $\mathcal{D}_t\mathrm{M}$ devra être parallèle à $\mathcal{D}_t\mathrm{M} + \mathcal{D}_\tau\mathrm{M}\,\mathcal{D}\tau$, et aussi conséquemment à $\mathcal{D}_\tau\mathrm{M}$. La relation entre t et τ s'obtiendra donc au moyen de l'équipollence

$$(20) \qquad \mathcal{D}_t\mathrm{M} \bumpeq p\,\mathcal{D}_\tau\mathrm{M},$$

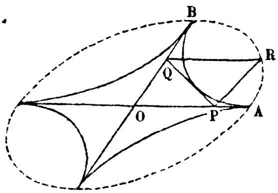
p étant un coefficient réel indéterminé.

189. Supposons que, dans l'équipollence $\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t, \tau)$, t soit le paramètre variable de courbe à courbe, et que τ soit la variable qui, sur chaque courbe, distingue un point de l'autre; de cette manière, l'équipollence représentera un second système de courbes tout à fait différent du pre-

mier. Si l'on cherche leur enveloppe, on retombera sur la même relation (20) ; par suite, *les deux systèmes de courbes représentés par* $OM \bumpeq \Phi\,(t, \tau)$ *ont la même enveloppe.*

190. Soient OA, OB (*fig.* 36) deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, de chaque point R de laquelle on

Fig. 36.



mène les parallèles RQ, RP à OA, OB; et supposons que l'on se propose de rechercher l'enveloppe de la droite PQ. Cette droite est spécifiée par un paramètre τ, qui satisfera (145) aux relations

$$OP \bumpeq \cos\tau \,.\, OA,$$
$$OQ \bumpeq \sin\tau \,.\, OB,$$

et un point quelconque M de cette droite est exprimé (44) par

$$OM \bumpeq t\,OP + (1 - t)\,OQ \bumpeq t\cos\tau\,OA + (1 - t)\sin\tau\,OB.$$

La même équipollence, en y regardant t comme un paramètre et τ comme la variable de point à point, exprime un système d'ellipses, ayant les deux demi-diamètres conjugués $t.OA$, $(1 - t)\,OB$.

Ces ellipses (189) auront la même enveloppe que les droites PQ. Dans le cas actuel, la condition (22) devient

$$\cos\tau OA - \sin\tau OB \bumpeq p\,[- t\sin\tau OA + (1 - t)\cos\tau OB],$$

ce qui donne $t = \cos^2\tau$. Donc l'enveloppe ci-dessus est la courbe exprimée par l'équipollence

$$OM \triangleq \cos^3\tau . OA + \sin^3\tau . OB \ (^*).$$

191. Selon mes principes pour la classification des courbes (*voir* le *Mémoire sur la classification des courbes du troisième ordre,* Société italienne, t. XXV), la dernière équipollence exprime une *espèce* de courbe *algébrique rationnelle* (en appelant ainsi celles que j'avais d'abord appelées *courbes algébriques d'ordre barycentrique*). Cette courbe est du sixième ordre et de la quatrième classe; elle peut être dite *tétracuspide,* présentant quatre points de rebroussement, situés aux extrémités de deux *diamètres de symétrie,* conjugués entre eux.

Dans le cas où OA, OB sont perpendiculaires, on a cette *variété* particulière, dans laquelle les diamètres de symétrie sont perpendiculaires entre eux; ces courbes sont des développées d'ellipses.

Si les droites OA, OB, outre qu'elles sont perpendiculaires, sont de plus égales, la courbe est de cette *forme* particulière qu'on peut appeler *tétracuspide régulière.* Dans ce cas, elle est en même temps l'enveloppe de la droite PQ de longueur constante qui se meut à l'intérieur de l'angle droit AOB, et celle des ellipses concentriques dont la somme des axes est constante. Son équipollence (en posant gr. OA + gr. OB = 1) est

$$\begin{aligned} OM &\triangleq \cos^3\tau + \sin^3\tau . \sqrt{} \\ &\triangleq \tfrac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau})^3 - \tfrac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} - \varepsilon^{-\tau})^3 \\ &\triangleq \tfrac{3}{4}\varepsilon^{\tau} + \tfrac{1}{4}\varepsilon^{-3\tau}. \end{aligned}$$

(*) Si l'on voulait résoudre le même problème pour l'hyperbole, on trouverait l'équipollence analogue

$$OM \triangleq \mathrm{ch}^3\tau . OA - \mathrm{sh}^3\tau . OB.$$

(*Note du Traducteur.*)

Elle peut être conséquemment engendrée par la composition de deux mouvements de rotation, de rayons $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, et avec une égale vitesse absolue : c'est donc une *hypocycloïde ordinaire*.

192. Problème. — *Déterminer les trajectoires obliques des ellipses concentriques et confocales.* — D'après une propriété connue de l'ellipse (148), ce problème se réduit à cet autre : Trouver la courbe M dont la tangente a une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des deux rayons vecteurs OM, FM, plus un angle constant. Ce problème a peut-être été résolu, pour la première fois, dans mon *Essai* (1835), en donnant un plus grand caractère de généralité à un problème réputé difficile par Euler (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1826, t. X).

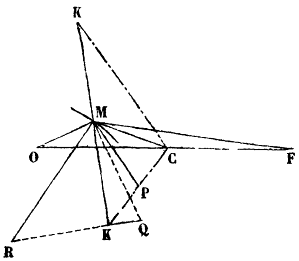
La condition du problème

$$\text{inc.}\,\mathfrak{O}M = \tfrac{1}{2}\,(\text{inc.}\,OM + \text{inc.}\,FM) + \alpha$$

est exprimée par

$$\mathfrak{O}M \bumpeq p\varepsilon^{\alpha}\sqrt{OM\,.\,FM}.$$

Fig. 37.



En raison de ce qu'il y a d'arbitraire dans la manière de faire entrer la variable t dans la fonction OM, nous

pourrons donner à p une valeur réelle qui simplifie les formules. Posons

$$p = \textcircled{\small D}t : \sin\alpha,$$
$$\mathrm{OF} \triangleq 4,$$
$$\mathrm{OC} \triangleq 2 \quad (\textit{fig. } 37).$$

L'équipollence

$$d\mathrm{M} \triangleq (\cot\alpha + \surd)\sqrt{(\mathrm{CM}+2)(\mathrm{CM}-2)}\,dt,$$

intégrée selon les procédés connus (18), en se rappelant (163) que

$$\textcircled{\small D}\mathrm{M} \triangleq \textcircled{\small D}\mathrm{CM},$$

donne

$$\mathrm{CM} \triangleq ce^{t(\cot\alpha+\surd)} + \frac{1}{c}e^{-t(\cot\alpha+\surd)}.$$

Posant

$$e^{\cot\alpha} = a,$$

l'équipollence de la courbe cherchée est

$$(1) \qquad \mathrm{CM} \triangleq ca^t\varepsilon^t + 1 : ca^t\varepsilon^t.$$

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 192.

I. *Trajectoires obliques d'un système de courbes planes.* — Soit $\mathrm{OM} \,\underline{\triangle}\, f(pt)$ l'équipollence d'un système de courbes, t étant la variable indépendante pour chacune d'elles, et p le paramètre variable de courbe à courbe. Nous nous proposons de déterminer une courbe qui rencontre les premières en chacun de ses points sous un angle α, soit constant, soit fonction du paramètre p.

On voit aisément que l'équipollence précédente représentera la trajectoire oblique cherchée, à la condition que p soit lié avec t par la relation suivante, où le signe $\underline{\triangle}$ indique simplement le parallélisme

$$\frac{dt}{dp} + \frac{f'_p(pt)}{f'_t(pt)} \,\underline{\triangle}\, \varepsilon^\alpha.$$

Comme exemple très-simple, proposons-nous de trouver la courbe qui coupe toutes les droites issues d'un même point sous un angle α fonction de l'inclinaison de chaque droite. L'équipollence du système des droites peut s'écrire

$$\mathrm{OM} \,\underline{\triangle}\, t\varepsilon^p.$$

Il vient alors

$$\frac{dt}{dp}+t\sqrt{} \triangleq \varepsilon^{\alpha},$$

$$\frac{t\,dp}{dt}=\operatorname{tang}\alpha=\varphi(p),$$

$$\frac{dt}{t}=\frac{dp}{\varphi(p)},$$

$$t=ce^{\int\frac{dp}{\varphi(p)}}.$$

II. *Développante d'une courbe plane.*— Soient M une courbe plane, N sa développante. L'équipollence de cette dernière sera ON $\triangleq$ OM $+\, q\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}$, pourvu que la quantité réelle q satisfasse à la relation

$$\frac{dq+dt}{q}+\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{M}} \triangleq \sqrt{}.$$

Par suite, si $\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mathrm{M}} \triangleq du+\sqrt{}\,dv$, on aura, par intégration,

$$q=e^{-u}\int e^{u}\,dt.$$

193. Cherchons directement les trajectoires obliques des ellipses confocales. Nous exprimerons ces ellipses au moyen de l'équipollence (152)

$$(2)\qquad \mathrm{CM} \triangleq e^{\tau}\varepsilon^{t}+e^{-\tau}\varepsilon^{-t},$$

e^{τ}, $e^{-\tau}$ étant deux quantités réelles constantes, dont on fait le produit égal à 1, parce que l'excentricité est CF $\triangleq$ 2.

τ est donc un paramètre qui varie d'une ellipse à l'autre. On peut noter incidemment que, si l'on supposait inversement τ variable de point à point, et t paramètre constant pour chaque courbe, la même équipollence (2) exprimerait la série des hyperboles ayant pour foyers F, O.

La tangente à l'ellipse est donnée par

$$(3)\qquad \mathfrak{D}_t\mathrm{M} \triangleq (e^{\tau}\varepsilon^{t}-e^{-\tau}\varepsilon^{-t})\sqrt{},$$

et l'équipollence (2) exprimera aussi (188) la trajectoire cherchée, si l'on suppose que τ, au lieu d'un paramètre constant, soit une fonction convenable de t. Dans cette hypothèse, la tangente à la trajectoire sera donnée par

$$(4)\quad \textcircled{d}_t \mathrm{M} + \textcircled{d}_\tau \mathrm{M}\,\textcircled{d}\tau \bumpeq (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau}\varepsilon^{-t})\sqrt{} + (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau}\varepsilon^{-t})\,\textcircled{d}\tau.$$

D'après la condition des trajectoires obliques, la différence des inclinaisons de (3), (4) devant être constante, nous aurons, en enlevant le facteur commun $e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau}\varepsilon^{-t}$,

$$\sqrt{} + \textcircled{d}\tau \bumpeq p\varepsilon^\alpha \bumpeq p\cos\alpha + p\sin\alpha\,.\sqrt{}.$$

Par suite

$$\textcircled{d}\tau \bumpeq \cot\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\tau = t\cot\alpha + \log c.$$

Ainsi la relation (2) devient celle (1) du n° 192.

194. Indiquons quelques propriétés de la courbe trouvée. L'équipollence (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{CP} \bumpeq c a^t \varepsilon^t, \\ \mathrm{PM} \bumpeq c^{-1} a^{-t}\varepsilon^{-t}, \end{cases}$$

lesquelles expriment que M décrit autour du point P une spirale logarithmique, en même temps que P en décrit une autre autour de C, les deux mouvements étant liés entre eux par l'équipollence

$$(6)\quad \mathrm{CP}.\mathrm{PM} \bumpeq 1.$$

Ainsi notre courbe est, par rapport à la spirale logarithmique, ce qu'est l'ellipse, considérée comme hypocycloïde (152) par rapport au cercle.

195. Si nous posons

$$\mathrm{CK} \bumpeq 2\mathrm{CP} \bumpeq 2ca^t\varepsilon^t \bumpeq 2e^\tau\varepsilon^t,$$
$$\mathrm{CK}_1 \bumpeq 2\,\mathrm{PM} \bumpeq 4 : \mathrm{CK},$$

le point M est au milieu de la droite $\mathrm{K}_1\mathrm{K}$. La tangente en M à notre courbe forme avec MK l'angle α. En effet, en prenant, pour abréger, les dérivées par rapport à la variable indépendante

$$x = t : \sin\alpha,$$

on a

$$(7)\qquad \begin{aligned} \mathcal{D}\mathrm{M} &\bumpeq (ca^t\varepsilon^t - c^{-1}a^{-t}\varepsilon^{-t})\,(\cot\alpha + \surd)\,\mathcal{D}t \\ &\bumpeq (ca^t\varepsilon^t - c^{-1}a^{-t}\varepsilon^{-t})\,\varepsilon^\alpha \\ &\bumpeq \varepsilon^\alpha \mathrm{MK}. \end{aligned}$$

En outre

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{D}^2\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{2\alpha}\,\mathrm{CM}, \\ &\mathcal{D}^3\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{3\alpha}\mathrm{MK}, \\ &\mathcal{D}^4\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{4\alpha}\,\mathrm{CM}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Donc, d'après l'équipollence (4) du n° 164, nous poserons

$$\varepsilon^\alpha\mathrm{CM} \bumpeq (l + \lambda\surd)\,\mathrm{MK},$$

et le rayon de courbure sera donné par

$$\mathrm{MR} \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\,\varepsilon^\alpha\mathrm{MK}.$$

Nous pourrons construire ces deux équipollences en menant la droite MQ ayant sur MC l'inclinaison $\alpha + \frac{\pi}{2}$, puis en élevant KQ perpendiculaire à MK; de sorte que, en comparant la relation

$$\mathrm{MK} + \mathrm{KQ} \bumpeq \mathrm{MQ}$$

avec la précédente

$$\mathrm{MK} + \frac{l}{\lambda\surd}\,\mathrm{MK} \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\,\varepsilon^\alpha\mathrm{MC},$$

nous verrons que

$$\mathrm{MR} \bumpeq \mathrm{MQ}.\mathrm{MK} : \mathrm{MC}.$$

Il en résulte que le triangle MQR sera directement semblable à MCK.

Le rayon vecteur issu du foyer O est

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{\tau}\varepsilon^{t} + 2 + e^{-\tau}\varepsilon^{-t};$$

sa racine

$$e^{\frac{\tau}{2}}\varepsilon^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{\tau}{2}}\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$$

est donc de la même forme que CM ; en outre (52) on a

$$\mathrm{gr.OM} = e^{\tau} + e^{-\tau} + \varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t}$$

et semblablement

$$\mathrm{gr.FM} = e^{\tau} + e^{-\tau} - \varepsilon^{t} - \varepsilon^{-t}.$$

Donc les deux variables τ et t, qui sont liées entre elles (193) par une équation du premier degré, dépendent, l'une de la somme, et l'autre de la différence des deux rayons vecteurs.