NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Réflexions sur l'événement scientifique d'une formule publiée par Wronski en 1812, et démontrée par M. Cayley en 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 161-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__161_0>

RÉFLEXIONS SUR L'ÉVÉNEMENT SCIENTIFIQUE D'UNE FORMULE PUBLIÉE PAR WRONSKI EN 1812, ET DÉMONTRÉE PAR M. CAYLEY EN 1873;

PAR M. ABEL TRANSON.

Problème. — Étant supposée l'équation

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \ldots,$$

dans laquelle $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ sont des fonctions quelconques de x, tandis que x_1, x_2, $x_3, \ldots$ sont des quantités fixes, ou si l'on veut des variables indépendantes, qui n'entrent pas dans la composition de ces fonctions, donner le développement de x ou même celui de la fonction quelconque $F(x)$ en fonction des puissances et des produits de x_1, x_2, $x_3, \ldots$.

Wronski a communiqué à l'Institut, en 1811, et il a publié, en 1812, la solution de ce grand problème que, plus tard, dans ses ouvrages scientifiques, il a appelé le *problème universel*, c'est-à-dire il a donné la formule du coefficient relatif au terme en $(x_1^p x_2^q x_3^r \ldots)$ dans le développement soit de x, soit de $F(x)$; et M. Cayley a donné une démonstration de cette formule dans le numéro du *Quarterly Journal*, pour avril 1873.

Voici le titre et le début du journal anglais :

ON WRONSKI'S THEOREM by professor *Cayley*.

The theorem considered by the author as an answer to the question : En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences, et de résoudre généralement ce problème universel? » Is given without demonstration in his *Réfutation de la théorie des fonc-*

tions analytiques de Lagrange (Paris, 1812, p. 30), and reproduced [with, I think, a demonstration (*)], in the *Philosophie de la Technie* (Paris, 1815); and it is also stated and demonstrated in the *Supplément à la réforme de la Philosophie* (Paris, 1847, p. 59 et seq.); the theorem, but without a demonstration, is given in *Montferrier's Encyclopédie mathématique* (Paris, no date, t. III, p. 398).

Le problème dont j'ai donné ci-dessus l'énoncé est manifestement beaucoup plus général que celui de Lagrange dans son célèbre Mémoire de 1770 (*Académie de Berlin*), lequel correspond à une équation telle que

$$0 = x - a - x_1 f_1(x),$$

problème relativement simple, et dont la solution est connue dans la science sous le nom de *Série de Lagrange*.

Je serai conduit dans la suite de ces réflexions à dire l'importance majeure que Wronski attribue à son problème universel. Déjà les paroles que M. Cayley lui emprunte dans le début de son article peuvent la faire pressentir; mais, dans le Mémoire de 1811, la solution de ce problème n'est qu'un accessoire : l'auteur ne la présente que comme un résultat propre à faire excuser la hardiesse de s'être attaqué à une œuvre de Lagrange, la hardiesse d'avoir produit une *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques!* En effet, sa réfutation achevée, il s'exprime ainsi : « Il nous reste, pour résister à l'autorité imposante de Lagrange, à montrer que la loi de laquelle nous avons dérivé la réfutation précédente (la *Réfutation des fonctions analytiques*) embrasse, comme un cas très-

(*) La démonstration du *problème universel* n'est pas dans la *Philosophie de la Technie;* mais, en revanche, on y trouve la démonstration de la *Loi absolue*, comme j'aurai occasion de le dire.

particulier, la découverte principale que cet illustre géomètre a faite dans cette partie de l'Algorithmie qui porte sur le développement des fonctions. (*Réfutation*, p. 28.) »

A la vérité, Wronski ne donnait pas la démonstration de cette loi (*loi des séries*) de laquelle il avait dérivé la réfutation, et il n'expliquait pas davantage comment de cette loi des séries il déduisait sa formule pour la solution du problème universel. Il se bornait à annoncer la subordination de la loi des séries à une autre loi beaucoup plus générale, qu'il appelait alors la *loi algorithmique absolue,* et qu'il a souvent reproduite dans ses ouvrages ultérieurs sous le nom de *loi suprême,* loi que l'année précédente, en 1810, il avait communiquée à l'Institut, également sans démonstration, et dont Lagrange et Lacroix, dans un Rapport publié au *Moniteur* du 15 novembre 1810, avaient dit : « Ce qui a frappé vos commissaires dans le Mémoire de M. Wronski, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions, et qu'elles n'en sont que des cas très-particuliers (*). »

Cette absence de démonstration fait dire, non sans quelque apparence de mauvaise humeur, au rapporteur de la Commission du Mémoire de 1811 : « On a peine à deviner les raisons qui peuvent déterminer M. Wronski à ne donner toujours ses formules que comme des espèces d'énigmes dont il invite les géomètres à chercher la solution. N'aurait-on pas le droit de penser qu'à force de généraliser les formules de développement l'auteur n'est plus en état de les démontrer?... » Et à la fin du Rapport : « En résumé, vos commissaires ne peuvent avoir aucune opinion sur les formules de développement que renferme

(*) Avec ce Rapport, il est indispensable de lire la lettre de Wronski insérée au *Moniteur* du 21 novembre 1810.

le Mémoire dont nous venons de rendre compte, parce que l'auteur ne les a pas démontrées, et que, de plus, il les a présentées en termes inintelligibles. Quant à la prétendue réfutation de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, nous en avons dit assez pour montrer qu'elle ne mérite aucune attention. »

Je réserve la question de savoir si, en effet, la réfutation de la *Théorie des fonctions analytiques* ne méritait aucune attention. Je me bornerai à présenter sur ce sujet deux observations : la première, c'est que Wronski, lorsqu'il a publié cette réfutation, en 1812, l'a fait suivre, sous le titre de *Troisième Mémoire*, d'un examen détaillé du Rapport de la Commission, et dans cet examen il prouve très-bien, au moins à mon sens, que le rapporteur s'est attaché à des détails secondaires et que, effectivement, il n'a fait « aucune attention » à ce qui constitue la réfutation elle-même. Ma seconde observation, c'est que l'œuvre de Lagrange à laquelle avait été décerné solennellement le premier des fameux prix décennaux, cette œuvre, ou plutôt cette tentative *philosophique* de produire *les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions,* cette tentative, dis-je, est aujourd'hui, et depuis longtemps déjà, universellement abandonnée par les géomètres.

Et maintenant, j'exposerai, d'après Wronski lui-même, les raisons qu'il a cru avoir de produire ses formules, celle même de la *loi suprême* soumise, en 1810, au jugement de Lagrange, sans les appuyer de leurs démonstrations; mais je veux d'abord exprimer mon opinion sur le reproche de les avoir présentées « en termes inintelligibles ». Je le ferai avec la circonspection qui convient à un simple disciple de la science, mais avec la liberté aussi d'un serviteur de la vérité.

Qu'est-ce qu'une formule inintelligible? C'est, à ce que je crois, une formule impliquant des symboles dont on n'a pas la signification. Or le Mémoire de 1811 ne contient que deux formules générales; il contient, d'une part, « afin de résister à l'autorité imposante de Lagrange » la formule du *problème universel* dont j'ai parlé au début de ces réflexions; et d'autre part, pour fonder la Réfutation, il contient la formule de la *loi des séries*. Eh bien! ces deux formules ne mettent en œuvre que des symboles connùs, très-simples et très-intelligibles. Pour en convaincre le lecteur, je vais succinctement exposer cette *loi des séries*.

Selon Wronski, l'idée, ou plus précisément la forme générale des séries, est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

où le premier membre représente une fonction déterminée, une fonction exprimée par des algorithmes connus; donnée, en un mot, par ce que l'auteur appelle sa *construction théorique*, et où le second membre offre le développement de cette fonction $F(x)$ à l'aide d'une autre fonction $\varphi(x)$ arbitrairement choisie. La fonction $\varphi(x)$ sert alors de *mesure algorithmique* pour l'évaluation de $F(x)$, pour son *développement technique*.

Le symbole $\varphi(x)^{\mu|\xi}$ représente le produit de μ facteurs dans lesquels la variable x reçoit, à partir de son premier état, $\mu - 1$ accroissements égaux à ξ; de sorte qu'on a

$$\varphi(x)^{\mu|\xi} = \varphi(x)\,\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(\mu-1)\xi].$$

Cet accroissement ξ est susceptible lui-même d'une valeur arbitraire. Quand cette valeur est différente de zéro, la fonction $F(x)$ est évaluée selon les *facultés progressives* de $\varphi(x)$; elle l'est, selon les *puissances* de $\varphi(x)$, si l'on suppose $\xi = 0$. De plus, si l'on a simplement

$\varphi(x) = x$, le développement est selon les *factorielles* de la variable, ou bien selon ses *puissances*, selon que ξ est différent de zéro ou égal à zéro.

Quant aux coefficients A_0, A_1, A_2, A_3,..., le premier est manifestement égal à ce que devient $F(x)$ pour la valeur qui annule $\varphi(x)$; ainsi, en supposant $\varphi(\alpha) = 0$, on a

$$A_0 = F(\alpha).$$

Les suivants A_1, A_2, A_3,... sont nécessairement indépendants de x. puisque, s'il en était autrement, $\varphi(x)$ ne constituerait pas à elle seule la mesure algorithmique de $F(x)$. D'ailleurs, ces mêmes coefficients dépendent non moins nécessairement de la fonction déterminée $F(x)$, de la fonction arbitraire $\varphi(x)$ et de la constante α. Or la *loi des séries* consiste précisément dans l'expression de cette dépendance, expression qui, elle-même, constitue la formule du coefficient général A_μ.

J'observerai, en passant, que cette idée des séries implique la conception de l'infini; car, si pour un cas particulier de $\varphi(x)$ le second membre n'est pas illimité, il est nécessairement identique au premier; et alors il offre positivement la construction théorique de $F(x)$ et non pas son développement technique.

Quoi qu'il en soit, c'est dans ce degré de généralité tout à fait éminent, c'est-à-dire en supposant la mesure algorithmique $\varphi(x)$ et l'accroissement ξ, l'un et l'autre arbitraires, que Wronski donnait, dans son Mémoire de 1811, la formule du coefficient de A_μ; et voici cette formule :

$$A_\mu = \frac{[\Delta^a\varphi(x)\,\Delta^b\varphi(x)^{2\,\xi}\Delta^c\varphi(x)^{3\,\xi}\ldots\Delta^l\varphi(x)^{\mu-1|\xi}\Delta^m F(x)]}{\Delta^a\varphi(x)\,\Delta^b\varphi x^{2\,\xi}\Delta^c\varphi(x)^{3\,\xi}\ldots\Delta^l\varphi(x)^{\mu-1\,\xi}\Delta^m\varphi(x)^{\mu\,\xi}}.$$

Le numérateur est une de ces sommes combinatoires qui, depuis moins d'un demi-siècle, sous les noms d'abord de *fonctions alternées,* puis de *déterminants,* ont acquis dans la science une importance de plus en plus grande, mais qui, jusque-là, avaient été fort peu employées, bien que connues depuis longtemps, et depuis longtemps aussi, comme Wronski le rappelait, « exprimées de différentes manières, entre autres, suivant les procédés indiqués par Laplace, dans son *Mémoire sur le Calcul intégral et sur le Système du monde,* inséré parmi ceux de l'Académie de Paris, de l'année 1772, deuxième Partie (*Réfutation,* p. 15). » Et il ne se contentait pas de cette indication, il donnait en exemple, et pour l'intelligence de sa formule, les développements de ces sommes combinatoires pour les cas simples où le terme général comporte seulement deux ou bien trois facteurs : précisément le détail que l'on trouve aujourd'hui au début de toutes les explications sur les déterminants.

Dans cette expression de A_μ, le dénominateur est un simple produit de μ facteurs : le numérateur offre, entre crochets, ce que nous appelons aujourd'hui le *terme principal du déterminant ;* il faut y faire égal à ξ l'accroissement dont dépendent les différences Δ ; donner aux indices a, b, c,... de ces différences les valeurs

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \ldots, \quad l = \mu - 1, \quad m = \mu,$$

et à la variable x une valeur telle que $\varphi(x) = 0$. Enfin, si l'on supposait $\xi = 0$, il faudrait remplacer les différences par des différentielles. Tel est le coefficient de $\varphi(x)^{\mu|\xi}$.

Quant au coefficient de $(x_1^p x_2^q x_3^r \ldots)$, dans la solution du problème universel, c'est une formule tout à fait analogue à la précédente. C'est encore au numérateur un déterminant, formé ici des différentielles des fonctions $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, F(x)$, et au dénominateur encore un simple produit.

D'après tout cela, n'avais-je pas raison de dire que les formules mises en œuvre dans le Mémoire de 1811 n'impliquaient que des symboles connus, et comment de telles formules ont-elles pu être signalées à l'Académie comme inintelligibles!... Osons le dire, si le rapporteur de la Commission ne les a pas comprises, il n'y a à cela qu'une seule, absolument une seule explication possible, notamment l'explication que suggère la dernière phrase de son Rapport, c'est qu'apparemment, ayant préjugé indigne de toute attention le Mémoire dont il avait à rendre compte, il ne l'a pas suffisamment étudié.

Arrivé à ce point de mes réflexions, je souhaite vivement n'avoir point lassé l'attention du lecteur; car, s'il a bien voulu me suivre jusqu'ici, je puis lui offrir le bénéfice de sa patience; je puis, à l'aide de ce qui précède, lui indiquer le point décisif sur lequel Wronski a entendu faire porter la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques*; c'est que Lagrange voulait placer les principes du Calcul différentiel dans les coefficients d'un développement particulier des fonctions, du développement qui procède selon les puissances de la variable, développement dont la possibilité, et surtout l'universalité, n'étaient pas même justifiables *a priori*, au lieu que, par la *loi des séries* (et plus complétement encore par la *loi suprême*), on voit que le Calcul différentiel établit non-seulement la possibilité, mais aussi l'existence et même la détermination précise des coefficients d'une infinité de développements, dont le développement selon les puissances de la variable n'est qu'un cas infiniment particulier. Donc c'est dans le Calcul différentiel qu'il faut voir les principes de tous ces coefficients, et nullement dans quelques-uns de ces coefficients qu'il faut voir les principes de ce calcul.

Mais, dit le rapporteur du Mémoire de 1811, « pour-quoi M. Wronski ne donne-t-il toujours ses formules que comme des espèces d'énigmes dont il invite les géomètres à chercher la solution » ?

Le procédé, en effet, est peu académique; aussi je veux sur ce point laisser Wronski s'expliquer lui-même. En 1810, il avait, comme je l'ai déjà dit, communiqué la loi suprême, sans en donner la démonstration; et à ce sujet, il s'exprimait comme il suit dans une Lettre à Delambre, secrétaire de l'Académie : « Pour ce qui concerne la démonstration de la loi absolue, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Institut de France, j'ai eu plusieurs raisons pour la supprimer provisoirement. La raison principale a été d'attacher davantage l'attention au fait même et à l'existence de cette loi absolue, et de ne pas la détourner par une démonstration longue et fatigante. La première et la seule chose dont il soit question actuellement est de savoir si cette loi existe : la démonstration viendra après. Elle est toute prête; au premier désir de l'Institut, je m'empresserai de la lui faire parvenir (*voir* le *manifeste historique* dans le supplément à la *Réforme de la Philosophie,* t. II du *Messianisme,* p. 29). » Et il semble que Lacroix et Lagrange soient entrés dans cette manière de voir, puisque, sans attendre la démonstration de la loi, ils ont reconnu sa valeur et son universalité (*). « Cette circonstance (son universalité), dit Wronski dans un des Mémoires publiés en 1812, à la suite de la Réfutation, ne laisse aucun doute, ni sur la vérité, ni sur l'importance de cette loi; elle équivaut en quelque sorte à une démonstration. En effet, il serait, d'une part, plus difficile d'imaginer une formule fausse, de laquelle on pourrait dériver toutes les formules connues, qu'il ne l'est de trouver la vraie loi qui les embrasse réellement; et, d'autre part,

(*) *Voir* ci-dessus leur déclaration

il nous paraît qu'une loi qui embrasse et contient, de la manière la plus précise et la plus déterminée, tout ce qui a été fait pour l'évaluation des quantités, depuis que les hommes s'occupent de Mathématiques, n'est point sans quelque importance (*Réfutation,* p. 80). »

Néanmoins, Wronski ne s'est pas cru autorisé par tous ces raisonnements à retenir indéfiniment sa démonstration. Il l'a donnée, en 1815, dans la *Philosophie de la Technie* (1^re section); elle n'y remplit pas moins de 90 pages in-4°, dont plusieurs sont couvertes de calculs, ce qui justifie suffisamment l'auteur de l'avoir supprimée « provisoirement », pour ne pas détourner l'attention de ses juges par une démonstration « longue et fatigante ».

Dans sa réponse au Rapport de 1811, il établit avec quelque hauteur la thèse, que « découvrir une loi est plus difficile et plus important que de la démontrer lorsque déjà elle se trouve découverte » ; mais enfin, pour prouver sans doute que ses formules, à supposer qu'elles soient « des énigmes », ne sont pas des énigmes sans solution, il donne en moins de deux pages une démonstration très-simple et très-rigoureuse de la *loi des séries*, et le lecteur qui en prendra connaissance accordera volontiers à Wronski que « MM. les commissaires auraient pu la trouver » ; car elle suppose seulement, avec la notion des différences et des différentielles, la résolution d'un système d'équations du premier degré par la formule des déterminants !...

Quant à la solution du problème universel, c'est-à-dire quant à ce développement dont la *célèbre série de Lagrange* n'est qu'un cas extrêmement particulier, il la réservait encore à cette époque de 1812. Il ne l'a produite qu'en 1847, dans le Supplément à la *Réforme de la Philosophie* (dans le t. II du *Messianisme*) ; et dès lors se trouvèrent établies deux des trois lois sur lesquelles il a la prétention de fonder la *Réforme des Mathématiques*, nommément les deux premières de ces lois (la *loi suprême* et le *problème universel*), au moyen desquelles, réservant à une troisième loi ce qui concerne la branche spéciale de la théorie des nombres, il prétend répondre à cette étrange question, rapportée par M. Cayley, au début de l'article du *Quarterly Journal* :

> « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel? »

Ici, il faut l'avouer, la démonstration du problème universel donnée en 1847 paraît être d'un accès aussi difficile, j'allais dire aussi formidable, que la démonstration de la loi suprême publiée en 1815. D'ailleurs, qu'importait le plus ou moins de difficultés de ces démonstrations? Qui donc s'intéressait en France aux travaux de Wronski? Encore à l'heure qu'il est, le Rapport de 1811 semble peser sur Wronski, semble avoir autorisé le monde savant à considérer indéfiniment ses œuvres ultérieures si nombreuses et si considérables comme ne méritant « aucune attention (*). »

Mais voici de quoi éveiller l'opinion publique; voici de quoi fixer l'attention. Pour la première fois après soixante ans passés, un des maîtres incontestés de la

---

(*) C'est avec une indifférence au moins égale qu'ont été accueillies ses œuvres philosophiques. Chose singulière! Dans le *Recueil des Rapports sur les progrès des Lettres et des Sciences en France*, publié à l'occasion de l'Exposition internationale de 1867, l'éminent auteur de *la Philosophie en France au* XIXe *siècle* paraît avoir ignoré jusqu'au nom de Wronski. Les moindres auteurs qui, du plus loin possible, se rattachent à la Philosophie, obtiennent dans son Rapport les honneurs d'une analyse consciencieuse pendant qu'on y cherche en vain quelque mention du *Prodrome du Messianisme*, des *Prolégomènes*, de la *Métapolitique*, de la *Réforme du savoir humain*,..., de la *Réforme de la Philosophie!*...

science vient d'apporter à l'un des principaux résultats de Wronski la garantie de son adhésion; mais, surtout, M. Cayley, par des transformations ingénieuses, vient de réduire la démonstration de ce résultat à des termes si simples, qu'il l'a rendue accessible aux moindres géomètres. C'est cela que j'ai cru pouvoir appeler un *événement scientifique*.

La moindre conséquence qu'on doive attendre de cet événement, c'est de voir bientôt des juges compétents examiner l'œuvre de Wronski avec une attention sérieuse et en donner au public une appréciation motivée. Or c'est le moment de dire que l'unique objet des réflexions que je présente ici est de provoquer cet examen et cette appréciation. Mon intention ne va point au delà; j'ai cru devoir à la justice et à la vérité d'interjeter appel du jugement prononcé sur Wronski en 1811. Cette tâche suffisait à ma mesure comme à mon dessein, et je laisse à de plus habiles que moi le soin d'en faire davantage.

Je pourrais donc m'arrèter ici; mais, sans doute, les paroles empruntées à Wronski par M. Cayley, et rapportées ci-dessus ont excité la curiosité du lecteur : je vais essayer de la satisfaire.

Voici un autre problème : étant donnée une fonction quelconque $F(x)$, la développer sous la forme suivante :

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 \ldots,$$

dans laquelle Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3,... sont des fonctions de x absolument arbitraires, et A_0, A_1, A_2, A_3,... une suite de quantités déterminées. Ces quantités sont des constantes dont la construction dépend manifestement de la fonction donnée $F(x)$ et des fonctions arbitraires Ω, étant entendu que le coefficient A_μ doit dépendre de la forme des Ω dont les indices sont depuis zéro jusqu'à μ, et non des Ω à la suite.

La question est de donner la construction de ces quantités constantes, et, si l'on suppose ce vaste problème résolu, il est clair qu'en attribuant aux fonctions Ω telles formes que de raison on obtiendra effectivement tous les développements connus, et l'on possédera virtuellement tous les développements possibles.

C'est cela que Wronski appelle la *loi suprême;* c'est cette loi dont Lagrange a rendu témoignage en 1810; et voici un de ses usages :

Supposons qu'on ait à résoudre une équation quelconque

$$0 = \Phi(x);$$

on transformera d'abord la fonction $\Phi(x)$ au moyen de la loi suprême, en se laissant guider par les circonstances spéciales de la question pour le choix et pour le nombre des fonctions arbitraires, de manière à obtenir le résultat final avec une approximation déterminée. Cette préparation étant réalisée, la forme obtenue sera manifestement comparable à l'équation

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + \ldots,$$

et alors l'application de la formule publiée par Wronski en 1812, et démontrée par M. Cayley en 1873, donnera la solution de l'équation proposée.

Rien, d'ailleurs, ne particularise la nature de cette équation : ce peut être une équation algébrique ou une équation transcendante; elle pourra être aux différences ou aux différentielles, totales ou partielles; en un mot, tout ce qu'on voudra.

C'est ainsi que l'auteur se flatte d'avoir « embrassé par un seul problème tous les problèmes des sciences mathématiques et de les pouvoir résoudre par ce problème universel ». Et pour fixer le caractère de ces solutions, j'ajoute que Wronski entend ne donner pour la LOI

SUPRÊME (*Phil. de la Technie,* t. I, p. 265), et dans les applications du PROBLÈME UNIVERSEL (*Réforme du savoir humain,* Complément, t. I, p. LXXXI et *passim*), que des séries convergentes exclusivement.