L. PAINVIN

Axes, plans cycliques, etc., dans les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 113-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__113_0>

AXES, PLANS CYCLIQUES, ETC., DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L. PAINVIN.

La détermination des axes d'une surface du second ordre, celle des plans cycliques, la recherche des conditions pour que la surface soit de révolution, sont des questions étroitement liées entre elles et qui dépendent toutes de la discussion d'une seule et même équation. Les propriétés sur lesquelles s'appuie cette discussion sont parfaitement connues; mais le rapprochement de ces questions, qui semblent différentes, n'est jamais fait d'une manière très-explicite dans les cours de Géométrie analytique, et nous pensons qu'il y a quelque intérêt à présenter cette théorie sous la forme que nous allons indiquer, et à bien mettre en vue le lien qui en rattache les diverses parties. On pourra ainsi se rendre compte de certaines difficultés qu'on rencontre et dont l'explication est nécessairement insuffisante lorsqu'on exclut les solutions imaginaires.

1. Précisons d'abord le sens des termes que nous emploierons.

I. Les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace peuvent être représentées par les rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et nous pourrons déterminer tous les points de l'espace en imposant aux quantités x, y, z, t la condition de n'être jamais infinies. Lorsque t est nul, le point est à l'infini; l'équation $t = 0$ définit donc le *lieu* de tous les points de l'espace qui se trouvent à l'infini; c'est le lieu de ces points qu'on désigne par le nom de *plan de l'infini*.

II. Dans les surfaces du second ordre, le lieu des milieux des droites réelles ou imaginaires, parallèles à une direction fixe, est un plan qu'on nomme *plan diamétral* conjugué de cette direction; le lieu des centres des sections parallèles à ce plan est une droite qui est nommée le *diamètre* conjugué de ce plan.

Lorsque des droites ou des plans sont imaginaires, ces droites ou ces plans sont dits *rectangulaires* lorsque les coefficients des équations qui les représentent satisfont aux relations établies pour le cas où les droites et les plans sont réels.

Lorsqu'un diamètre, réel ou imaginaire, sera perpendiculaire au plan diamétral conjugué, le diamètre sera dit *un axe* de la surface, et le plan diamétral correspondant sera nommé un *plan principal*.

III. Nous appellerons *cercle* toute section plane d'une sphère, que le plan soit réel ou imaginaire; et un *plan cyclique* d'une surface du second ordre sera un plan qui la coupe suivant un cercle.

D'après cette définition générale du cercle, il est facile de voir que son équation peut prendre la forme de celle de la parabole, mais les coefficients sont imaginaires.

Remarque. — Il faut bien comprendre que ces dénominations que nous adoptons ne désignent pas, dans le cas des imaginaires, des quantités géométriques dans le sens habituel du mot, mais seulement des formes analytiques. Ce langage, conventionnel et parfaitement légitime, qui est un auxiliaire puissant dans les raisonnements, ne fait donc que traduire les combinaisons des formes analytiques.

2. Soit l'équation d'une surface du second ordre

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ &\qquad + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0; \end{aligned}$$

considérons la conique (Γ), section de la surface par le plan de l'infini, c'est-à-dire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Gamma) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \\ &t = 0, \end{aligned} \right.$$

puis le cercle imaginaire de l'infini Ω, c'est-à-dire

$$(2) \qquad (\Omega) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0;$$

nous supposerons les axes de coordonnées rectangulaires.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux courbes (1) et (2) est

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\qquad - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ &t = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on exprime que cette conique se réduit à deux droites, on a l'équation de condition

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A - \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' - \lambda & B \\ B' & B & A'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi trois valeurs de λ; à chaque valeur de λ correspond un système de sécantes passant par les quatre points communs à la conique (Γ) et au cercle (Ω).

Nommons a, b, c, d les points d'intersection des coniques (1) et (2); les trois systèmes de sécantes seront

$$(ab, cd), \quad (ac, bd), \quad (ad, bc).$$

Désignons, en outre, par p, q, r les points de concours respectifs des deux sécantes de chaque système; les points p, q, r sont les points qui ont même polaire par rapport aux deux courbes Γ et Ω. Le triangle pqr est donc conjugué, à la fois, par rapport à la conique (Γ) et au cercle (Ω), c'est-à-dire que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé.

Or, si l'on considère un point O à distance finie, le centre de la surface, par exemple, s'il y a lieu, et qu'on mène un plan par ce point O et une des sécantes ab, le plan Oab coupera la surface du second ordre suivant un cercle; car cette section et la conique Γ, qui appartient aussi à la surface, doivent se rencontrer en deux points, lesquels seront nécessairement les points a et b; d'un autre côté, ces deux points sont, dans le plan sécant, les points circulaires à l'infini; la section est donc un cercle.

Si l'on joint le centre O à un des sommets du triangle pqr, au point p par exemple, la droite Op sera un axe de la surface; car la droite Op et le plan Oqr sont conjugués par rapport à la surface, puisque p est le pôle de qr par rapport à la conique Γ; mais p est également le pôle de la trace qr du plan par rapport au cercle Ω : la droite Op est donc perpendiculaire au plan Oqr.

Ainsi :

1° Les *plans cycliques* sont les plans passant par un point O, à distance finie, et les sécantes communes à la conique Γ et au cercle Ω.

2° Les *axes* sont les droites qui joignent le centre O aux sommets du triangle pqr conjugué à la fois par rapport à la conique Γ et au cercle Ω.

3° Les *plans principaux* sont les plans passant par le centre O et les côtés du triangle pqr.

Le plan principal correspondant à l'axe Op, par exemple, passe par le côté qr, opposé au sommet p.

Les droites Op, Oq, Or sont les intersections des deux plans cycliques de chaque système; on voit par là que ces plans sont respectivement perpendiculaires au plan principal correspondant.

Remarque. — Pour une valeur de λ vérifiant l'équation (4), le premier membre de l'équation (3) se réduit au produit de deux fonctions linéaires; par conséquent les plans cycliques pourront se déterminer en écrivant que la fonction

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduit, pour une valeur convenable de l'indéterminée λ, au produit de deux fonctions linéaires, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad = (mx + ny + pz)(m_1x + n_1y + p_1z); \end{aligned}\right.$$

les directions des plans cycliques s'obtiendront en égalant à zéro les fonctions linéaires $mx + ny + pz$ et $m_1x + n_1y + p_1z$.

De l'identité (I) il résulte immédiatement que deux sections circulaires d'un même système sont sur une même sphère.

3. Ces préliminaires étant posés, passons à la discussion de l'équation en λ.

Premier cas. *Les racines de l'équation en λ sont distinctes.* — L'équation en λ n'est autre que l'équation connue sous le nom d'*équation en s*; si l'équation de la surface donnée a ses coefficients réels, l'équation en λ (4) aura ses racines réelles, puisqu'elle détermine les systèmes de sécantes communes à deux coniques, dont une est toujours imaginaire.

Conservant les notations du n° 2, nous voyons que, *dans le cas actuel, la surface possède :*

Trois systèmes de plans cycliques.........	(Oab, Ocd),	(Oac, Obd),	(Oad, Obc);
Trois axes..........	Op,	Oq,	Or;
Trois plans principaux.	Oqr,	Opr,	Opq.

4. Deuxième cas. *L'équation en λ a une racine double.* — Dans ce cas, deux hypothèses peuvent se présenter :

1° Le système (3) des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes ;

2° Le système des sécantes communes se compose de deux droites coïncidentes.

1° *Le système* (3) *des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes.*

On a alors une *relation unique* entre les coefficients de l'équation de la surface donnée; mais cette relation ne peut être vérifiée que par des valeurs imaginaires de ces coefficients, car elle est décomposable en la somme de plusieurs carrés (Kummer, *Journal de Crelle*, t. XXVI; Hesse, *Geometrie des Raums;* Bauer, *Journal de Crelle*, t. LXXI).

La conique (Γ) touche le cercle imaginaire de l'infini en un point unique p, et le coupe en deux autres points a et b. Désignons par pq la tangente commune en p, q étant le point où cette tangente rencontre la corde ab.

Il n'y a plus que deux systèmes de sécantes communes : le système (ap, bp), qui correspond à la racine double de l'équation en λ ; puis le système (ab, pq), qui correspond à la racine simple.

Il n'y a plus que deux points qui ont même polaire par rapport à (Γ) et (Ω) : ce sont les points p et q ; p a pour polaire la tangente pq, et q a pour polaire une droite pi passant par le point p.

Dans ce cas, qui correspond à une surface du second ordre à coefficients imaginaires, on a les propriétés particulières suivantes :

La surface du second ordre n'a que deux systèmes de plans cycliques : le système $(\mathrm{O}ap, \mathrm{O}bp)$, *correspondant à la racine double, et le système* $(\mathrm{O}ab, \mathrm{O}pq)$, *correspondant à la racine simple ; le plan cyclique* $\mathrm{O}pq$ *est un plan asymptote* (ou parallèle à un plan asymptote).

La surface n'admet plus que deux axes et deux plans principaux : l'axe $\mathrm{O}p$, *situé dans le plan principal* $\mathrm{O}pq$, *auquel il correspond, et l'axe* $\mathrm{O}q$, *qui correspond au plan principal* $\mathrm{O}pi$, *pi étant la polaire du point* q.

Le plan $\mathrm{O}pq$ *est à la fois un plan cyclique, un plan principal et un plan asymptote.*

Exemple. — Nous citerons comme exemple la surface

$$x^2 - y^2 + \sqrt{-1}\,yz + xz + \sqrt{-1}\,xy = 1.$$

L'équation en λ est ici

$$4\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_0 = 1 & \text{racine simple,} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} & \text{racine double;} \end{cases}$$

les plans cycliques correspondant à la racine simple sont

$$(\mathrm{O}ab, \mathrm{O}pq) \quad (x + 2y\sqrt{-1} - z)(y\sqrt{-1} + z) = 0;$$

l'axe $\mathrm{O}q$, intersection de ces deux plans, a pour équations

$$(\mathrm{O}q) \qquad \frac{x}{3} = \frac{y}{\sqrt{-1}} = \frac{z}{1};$$

le plan principal correspondant est

$$(\mathrm{O}pi) \qquad 3x + y\sqrt{-1} + z = 0.$$

Les plans cycliques correspondant à la racine double sont

$$(\mathrm{O}ap,\ \mathrm{O}bp) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[z + y\sqrt{-1} + x\left(1 + \sqrt{-2}\right)\right] \\ &\times \left[z + y\sqrt{-1} + x\left(1 - \sqrt{-2}\right)\right] = 0; \end{aligned} \right.$$

l'axe $\mathrm{O}p$, intersection de ces deux plans, a pour équations

$$(\mathrm{O}p) \qquad x = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{-1}} = \frac{z}{1};$$

le plan principal correspondant est

$$(\mathrm{O}pq) \qquad y\sqrt{-1} + z = 0.$$

On peut facilement vérifier que le plan $\mathrm{O}pq$ est à la fois un plan cyclique, un plan asymptote et un plan principal.

2° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine double, se compose de deux droites coïncidentes.*

On a, dans ce cas, deux relations entre les coefficients de l'équation de la surface; on les obtient en écrivant les conditions imposées, ou, plus simplement, en écrivant que la fonction

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduit, pour une valeur convenable de l'indéterminée λ, à un carré parfait, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (mx + ny + pz)^2. \end{aligned} \right.$$

La conique (Γ), section de la surface du second ordre par le plan de l'infini, est alors doublement tangente au cercle imaginaire de l'infini. Soient a, b les deux points de contact, p le pôle de la droite ab. Les deux coniques n'ont plus que deux systèmes de sécantes communes; le système correspondant à la racine double se compose de deux droites confondues avec ab; le système correspondant à la racine simple se compose des deux tangentes communes ap, bp. Les points qui ont même polaire par rapport aux deux coniques (Γ) et (Ω) sont : le point p, qui a pour polaire ab; puis tous les points de ab dont les polaires respectives passent par le point p.

Nous aurons, d'après cela, la proposition suivante :

La surface du second ordre n'admet plus que deux systèmes de plans cycliques : un premier système, correspondant à la racine double, se compose de deux plans confondus avec Oab; *le second système se compose des deux plans distincts* Oap, Obp, *lesquels sont en même temps des plans asymptotes.*

La surface possède un premier axe Op *perpendiculaire au plan principal correspondant* Oab; *puis une infinité d'autres axes situés dans le plan* Oab, O *étant le centre; les plans principaux correspondants passent par l'axe* Op.

La surface du second ordre est alors une surface de révolution dont l'axe est Op.

5. Troisième cas. *L'équation en λ a une racine triple.* — Nous aurons à considérer, dans ce cas, les trois hypothèses suivantes :

1° Le système (3) des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites distinctes;

2° Le système des sécantes communes se compose de deux droites coïncidentes;

3° Le système des sécantes communes est indéterminé.

1° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites distinctes.*

On a alors *deux relations* entre les coefficients de l'équation de la surface donnée; mais ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires de ces coefficients; nous le démontrerons plus loin.

La conique (Γ) est osculatrice en p au cercle imaginaire de l'infini; le contact est du second ordre, et elle rencontre le cercle en un second point a. Désignons par pt la tangente commune. Le point p est le seul point qui ait même polaire par rapport aux deux coniques; pt est cette polaire.

De là résultent les propriétés suivantes :

La surface du second ordre n'admet plus qu'un seul système de plans cycliques ; ce système est composé des deux plans distincts Opt, Opa; *le plan* Opt *est en même temps un plan asymptote.*

La surface admet un seul axe Op, *et* Opt *est le plan principal correspondant; l'axe est ici situé dans le plan principal.*

Exemple. — Nous citerons comme exemple la surface

$$x^2 + 2y^2 + xz\sqrt{-2} + xy\sqrt{-2} = 1;$$

l'équation en λ est ici

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 1)^3 = 0;$$

le système unique de plans cycliques est

$$(\text{O}pt, \text{O}pa) \quad (y + z)(x\sqrt{-2} + y - z) = 0;$$

l'axe Op, intersection de ces deux plans, a pour équation

$$(Op) \qquad \frac{x}{\sqrt{-2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1},$$

et le plan principal correspondant est

$$(Opt) \qquad x\sqrt{-2} + y - z = 0;$$

c'est à la fois un plan cyclique, un plan principal et un plan asymptote.

2° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites coïncidentes.*

On a alors *trois relations* entre les coefficients de l'équation de la surface; mais ces relations ne peuvent être vérifiées, comme nous le verrons plus loin, que par des valeurs imaginaires de ces coefficients.

La conique (Γ) est osculatrice en p au cercle imaginaire de l'infini; le contact est du troisième ordre; désignons par pt la tangente commune. Tous les points de la droite pt ont même polaire par rapport aux deux coniques (Γ) et (Ω), et ces polaires passent par le point p; ce sont les seuls points qui ont même polaire.

De là résultent les propriétés suivantes :

La surface du second ordre n'admet plus qu'un seul système de plans cycliques, composé de deux plans coïncidant avec le plan Opt; *ce plan est en même temps un plan asymptote.*

La surface possède une infinité d'axes, lesquels passent par son centre et sont situés dans le plan Opt; *tous les plans principaux correspondants passent par la droite* Op, *qu'on peut regarder comme l'axe principal.*

Nous citerons comme exemple la surface

$$2x^2+y^2+3z^2+2\sqrt{-1}\,yz=1;$$

l'équation en λ est ici

$$\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0 \quad \text{ou} \quad (\lambda-2)^3=0;$$

le système unique de plans cycliques est

$$(Opt) \qquad (y-z\sqrt{-1})^2=0;$$

tous les axes sont dans ce plan, et l'axe principal Op a pour équations

$$(Op) \qquad x=0, \quad y-z\sqrt{-1}=0;$$

les plans principaux passent tous par cette droite.

3° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, est indéterminé.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$A=A'=A''=\lambda, \quad B=0, \quad B'=0, \quad B''=0;$$

la conique (Γ) se confond avec le cercle imaginaire de l'infini, et alors la *surface du second ordre est une sphère.*

6. La discussion complète de la question que nous avions en vue est terminée; il ne nous reste plus qu'à démontrer les deux assertions émises dans la première et dans la seconde hypothèse du troisième cas.

1° *Lorsqu'on exprime que l'équation en λ a une racine triple et que le système des sécantes communes se compose de deux droites distinctes, on obtient deux relations entre les coefficients de l'équation de la surface, et ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires de ces coefficients.*

L'équation en λ est

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & B'' & B' \\ B'' & A'-\lambda & B \\ B' & B & A''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda^3-(A+A'+A'')\lambda^2 \\ &\quad +(A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2)\lambda \\ &\quad +AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''=0, \end{aligned}\right.$$

et le système de sécantes correspondant à la valeur de λ est

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(A-\lambda)x^2+(A'-\lambda)y^2+(A''-\lambda)z^2 \\ &\qquad +2Byz+2B'xz+2B''xy=0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= A+A'+A'', \\ N &= A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2, \\ P &= AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2, \end{aligned}\right.$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (4 *bis*) ait ses trois racines égales sont

$$(6)\qquad \frac{M}{3}=\frac{N}{M}=\frac{3P}{N};$$

les égalités (6) équivalent évidemment à deux relations distinctes.

Si maintenant on pose encore

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= A'A''-B^2, & b &= AB\ -B'B'', \\ a' &= A''A-B'^2, & b' &= A'B'-B''B, \\ a'' &= AA'-B''^2, & b'' &= A''B''-BB', \end{aligned}\right.$$

on constate très-facilement les identités suivantes :

$$(8)\left\{\begin{array}{ll}(1^\circ)\left\{\begin{array}{l}2(M^2-3N)=(A'-A'')^2+(A''-A)^2+(A-A')^2\\ \qquad\qquad\qquad\qquad+6(B^2+B'^2+B''^2);\end{array}\right.\\ (2^\circ)\left\{\begin{array}{l}2(N^2-3MP)=(a'-a'')^2+(a''-a)^2+(a-a')^2\\ \qquad\qquad\qquad\qquad+6(b^2+b'^2+b''^2).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

La première des identités (8) est évidente; pour établir la seconde, on remarque que

$$-AP=b^2-a'a'',\quad -A'P=b'^2-a''a,\quad -A''P=b''^2-aa',$$

et la démonstration est alors immédiate.

On voit par là que les relations (6) ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires des coefficients A, A′, ..., si l'on ne veut pas établir plus de deux relations distinctes entre ces coefficients.

2° *Si l'on exprime que l'équation en* λ *a une racine triple et que le système des sécantes communes se réduit à deux droites coïncidentes, on obtient trois relations entre les coefficients de l'équation de la surface, et ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires des coefficients.*

Exprimons d'abord que le système des sécantes se réduit à deux droites confondues, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait; il vient

$$\frac{A-\lambda}{B''}=\frac{B''}{A'-\lambda}=\frac{B'}{B},$$

$$\frac{A-\lambda}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-\lambda},$$

$$\frac{B''}{B'}=\frac{A'-\lambda}{B}=\frac{B}{A''-\lambda}.$$

Toutes ces relations seront vérifiées si l'on a

$$(9) \qquad \lambda_0 = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

De là on tire

$$A = \lambda_0 + \frac{B'B''}{B}, \quad A' = \lambda_0 + \frac{B''B}{B'}, \quad A'' = \lambda_0 + \frac{BB'}{B''},$$

et l'équation en λ devient

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda + \frac{B'B''}{B} & B'' & B' \\ B'' & \lambda_0 - \lambda + \frac{B''B}{B'} & B \\ B' & B & \lambda_0 - \lambda + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(\lambda - \lambda_0)^2 \left[\lambda - \lambda_0 - \left(\frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right)\right] = 0.$$

Comme cette équation doit avoir une racine triple et que cette racine triple est λ_0, on doit avoir

$$(10) \qquad B'^2B''^2 + B''^2B^2 + B^2B'^2 = 0.$$

On a donc à vérifier les relations (9) et (10), et, si l'on ne veut pas établir plus de trois relations distinctes entre les coefficients, il faudra nécessairement admettre des valeurs imaginaires.

Le calcul que nous venons de faire suppose qu'aucun des coefficients B, B′, B″ n'est nul; dans le cas contraire, il faudrait reprendre la recherche des relations qui doivent remplacer les relations (9), et l'on serait encore conduit à la même conclusion; la vérification est des plus faciles.