Nouvelles annales de mathématiques

Désiré André

Note sur les bissectrices des angles d'un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 10-12
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__10_1>

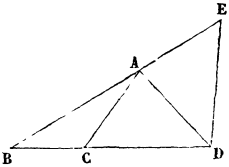
NOTE SUR LES BISSECTRICES DES ANGLES D'UN TRIANGLE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,
Agrégé de l'Université, professeur à Sainte-Barbe.

1. Les théorèmes sur la bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle et les théorèmes sur la bissectrice d'un angle extérieur se correspondent deux à deux. Nous allons donner un procédé général permettant, lorsqu'on connaît l'un quelconque de ces théorèmes, d'établir immédiatement le théorème corrélatif.

2. Supposons connu ce théorème :

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.



Pour en déduire le théorème corrélatif, considérons un triangle quelconque ABC, et la bissectrice AD de l'angle extérieur A. Prenons, sur BA prolongé, une longueur AE égale à AC, et joignons DE. Les deux triangles ACD, AED ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux. Par suite, DA est la bissectrice de l'angle intérieur D du triangle BDE, et le théorème que nous venons d'admettre nous donne la proportion

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DE}.$$

Remplaçons, dans cette égalité, AE et DE par les longueurs AC et CD, qui leur sont respectivement égales, nous trouvons

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CD},$$

ou bien

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{AC},$$

ce qui nous donne le théorème corrélatif que voici :

La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle détermine sur le côté opposé deux segments proportionnels aux côtés adjacents.

3. Supposons connu maintenant le théorème suivant :

Le carré de la bissectrice d'un angle intérieur est égal au rectangle des deux côtés de cet angle, moins le rectangle des deux segments du côté opposé.

Considérons la figure précédente, et appliquons ce théorème à la bissectrice DA de l'angle intérieur D du triangle BDE ; nous avons

$$\overline{DA}^2 = DB \times DE - AB \times AE.$$

Dans cette égalité, remplaçons encore DE par DC et AE par AC, il vient

$$\overline{DA}^2 = DB \times DC - AB \times AC;$$

et, si nous nous rappelons que DA est la bissectrice de l'angle extérieur A du triangle ABC, nous pouvons énoncer le théorème corrélatif suivant :

Le carré de la bissectrice d'un angle extérieur est égal au rectangle des deux segments déterminés sur le côté opposé, moins le rectangle des deux côtés de l'angle.

4. Au lieu de partir des théorèmes sur la bissectrice d'un angle intérieur, nous aurions évidemment pu, à l'aide du même procédé, suivre la marche inverse : le procédé est général.