NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1874.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

BbP 20

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME TREIZIÈME.

BIBLIOTHÈQ GRENOBLE

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1874.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES EXPONENTIELLES;

Par M. H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Il y aurait de grands avantages, il me semble, à présenter la théorie des exponentielles en se plaçant à un point de vue différent de celui où l'on se place habituellement; et en effet la démonstration de la continuité de e^x présente de grandes difficultés : elle n'est pas naturelle et elle est peu élégante.

Le but que l'on se propose en étudiant la fonction exponentielle, c'est de généraliser la notion de l'exposant, et l'on rencontre fréquemment, en analyse, ce genre de généralisation. Une fonction étant simplement définie pour des valeurs entières de la variable, étendre cette définition à des valeurs quelconques est ce que l'on appelle *interpoler* la fonction ; on est ainsi parvenu à interpoler un grand nombre de fonctions parmi lesquelles on remarque surtout l'exponentielle et le produit $1.2.3...n$.

Pour qu'une fonction soit interpolée d'une façon utile (car cette interpolation peut évidemment se faire d'une infinité de manières), il convient que, après l'interpolation, la fonction ne perde pas les propriétés dont elle jouissait pour les valeurs entières de la variable. Ainsi la fonction a^x, lorsqu'elle sera interpolée, devra encore satisfaire à la formule fondamentale

$$a^x a^y = a^{x+y},$$

et l'on est conduit à adopter, pour la définition de $a^{\frac{p}{q}}$, la valeur $\sqrt[q]{a^p}$; mais, quoique cette définition soit très-naturelle, on éprouve, comme l'on sait, assez de difficultés à l'étendre aux valeurs incommensurables de x; enfin, quand il s'agit de démontrer la continuité de a^x, on éprouve des difficultés plus grandes encore.

Il me semble alors naturel de définir a^x une fonction jouissant de la propriété d'être continue et de satisfaire, quels que soient x et y, à l'équation

$$a^x a^y = a^{x+y};$$

c'est à ce point de vue que nous nous placerons.

Si l'on observe que la division algébrique permet de développer en série une fonction rationnelle quelconque, on sera tout naturellement porté à se demander si l'on ne pourrait point poser, quel que soit x,

$$(1) \qquad a^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Le second membre de cette formule supposé convergent est, comme l'on sait par un théorème dû à Abel, une fonction continue de x, si x est inférieur en valeur absolue à une valeur R qui, mise à la place de x, rend la série convergente. Ce théorème, dont on fait un usage continuel, n'est pas un hors-d'œuvre dans le Cours de Mathématiques spéciales, vu qu'on le suppose connu des élèves qui suivent les Cours de l'École Polytechnique ou des Facultés. Ceci posé, on a

$$(2) \qquad a^y = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots;$$

en multipliant les formules (1) et (2) membre à membre, on a, d'après un théorème connu,

$$a^x a^y = a_0^2 + a_0 a_1 (x+y) + \ldots$$
$$+ (a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_n a_0 y^n) + \ldots,$$

et il est clair que le second membre de cette formule serait égal à a^{x+y}, si l'on avait

$$a_n (x+y)^n = a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_n a_0 y^n.$$

Faisant alors $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, on a successivement

$$a_0 = a_0^2, \quad a_1 (x+y) = a_0 a_1 x + a_1 a_0 y,$$
$$a_2 (x+y)^2 = a_0 a_2 x^2 + a_1^2 xy + a_2 a_0 y^2,$$

et, en général,

$$(3) \qquad a_n (x+y)^n = a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots.$$

La première équation donne, en rejetant la solution $a_0 = 0$, inadmissible en général, $a_0 = 1$, puisque a^0 n'est pas nul et que $a_0 = a^0 = 1$; la seconde équation donne, par l'identification, $a_1 = a_1$; la suivante détermine $a_2 = \frac{a_1^2}{2}$; la suivante donnerait $a_3 = \frac{a_1^3}{2.3}$, et il est naturel d'admettre que l'on a $a_n = \frac{a_1^n}{1.2.3\ldots n}$. En effet, cette hypothèse portée dans l'équation (3) donne

$$\frac{a_1^n}{1.2.3\ldots n}(x+y)^n = 1 \frac{a_1^n}{1.2.3\ldots n} x^n + \frac{1}{1} \frac{a_1^n}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1} y$$
$$+ \frac{1}{1.2} \frac{a_1^n}{1.2\ldots(n-2)} x^{n-2} y^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \ldots.$$

ce qui est une identité. Ainsi, tous les coefficients de la série sont déterminés sauf a_1, ce qui devait être, car a^x dépend de a et de x; posons donc

$$(4)\qquad a^x = 1 + \frac{a_1 x}{1} + \frac{a_1^2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{a_1^n x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Le second membre de cette équation est toujours convergent quand x est fini; donc il définit une fonction continue de x. Il est inutile de vérifier que $a^x a^y$ est égal à a^{x+y} : ce serait refaire des calculs déjà effectués.

A chaque valeur de a correspondra une valeur de a_1, et *vice versâ*. Prenons par exemple $a_1 = 1$, nous aurons, en appelant e la valeur correspondante de a,

$$(5)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

et, par suite, en faisant $x = 1$,

$$(6)\qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots = 2,718281828459045\ldots$$

Si, dans la formule (4), on fait $x = 1$, on a

$$a = 1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_1^2}{1.2} + \ldots + \frac{a_1^n}{1.2\ldots n} + \ldots = e^{a_1};$$

donc a_1 est un nombre tel que, en élevant e à la puissance a_1, on retrouve a : c'est ce que l'on appelle le *logarithme népérien* de a ou le logarithme de a dans la base e. De la formule (4) on tire

$$\frac{a^x - 1}{x} = a_1 + \frac{a_1^2 x}{1.2} + \ldots,$$

et, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{a^x - 1}{x} = a_1 = \log \text{nép}\, a.$$

On a ainsi, pour $a = e$,

$$\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

donc, en appelant θ un nombre dont la limite est 1 pour $x = 0$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \theta, \quad \text{d'où} \quad e = (1 + \theta x)^{\frac{1}{x}},$$

et, par suite,

$$e^{\frac{1}{\theta}} = (1 + \theta x)^{\frac{1}{\theta x}}.$$

Si x tend, d'une manière continue, vers zéro, θ, qui est égal à $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots$, tend vers 1 d'une manière continue, et la formule précédente donne

$$e = \lim (1 + \theta x)^{\frac{1}{\theta x}};$$

mais, θx tendant vers zéro d'une manière continue, on peut remplacer θx par $\frac{1}{m}$, et l'on a

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \text{pour} \quad m = \infty.$$

En résumé, la méthode que je propose : 1° est plus courte que la méthode classique; 2° n'exige en réalité aucun principe nouveau, car le théorème d'Abel est implicitement dans le programme; 3° est rigoureuse; 4° a l'avantage immense de démontrer en un trait de plume la formule exponentielle et les deux formules importantes dont l'une est exigée :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \quad \lim \frac{a^x - 1}{x} = \log a;$$

5° permet de définir l'exponentielle imaginaire; 6° est aussi naturelle qu'on peut le désirer.

Remarque. — Il est bon de faire observer que, si l'on a $a^x a^y = a^{x+y}$, on a, par cela même,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \text{ etc.}$$

Cela viendra nécessairement dans l'étude des propriétés de la fonction exponentielle.

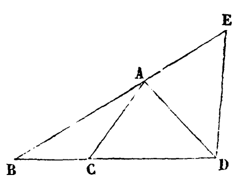
NOTE SUR LES BISSECTRICES DES ANGLES D'UN TRIANGLE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,
Agrégé de l'Université, professeur à Sainte-Barbe.

1. Les théorèmes sur la bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle et les théorèmes sur la bissectrice d'un angle extérieur se correspondent deux à deux. Nous allons donner un procédé général permettant, lorsqu'on connaît l'un quelconque de ces théorèmes, d'établir immédiatement le théorème corrélatif.

2. Supposons connu ce théorème :

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.



Pour en déduire le théorème corrélatif, considérons un triangle quelconque ABC, et la bissectrice AD de l'angle extérieur A. Prenons, sur BA prolongé, une longueur AE égale à AC, et joignons DE. Les deux triangles ACD, AED ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux. Par suite, DA est la bissectrice de l'angle intérieur D du triangle BDE, et le théorème que nous venons d'admettre nous donne la proportion

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DE}.$$

Remplaçons, dans cette égalité, AE et DE par les longueurs AC et CD, qui leur sont respectivement égales, nous trouvons

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CD},$$

ou bien

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{AC},$$

ce qui nous donne le théorème corrélatif que voici :

La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle détermine sur le côté opposé deux segments proportionnels aux côtés adjacents.

3. Supposons connu maintenant le théorème suivant :

Le carré de la bissectrice d'un angle intérieur est égal au rectangle des deux côtés de cet angle, moins le rectangle des deux segments du côté opposé.

Considérons la figure précédente, et appliquons ce théorème à la bissectrice DA de l'angle intérieur D du triangle BDE ; nous avons

$$\overline{DA}^2 = DB \times DE - AB \times AE.$$

Dans cette égalité, remplaçons encore DE par DC et AE par AC, il vient

$$\overline{DA}^2 = DB \times DC - AB \times AC;$$

et, si nous nous rappelons que DA est la bissectrice de l'angle extérieur A du triangle ABC, nous pouvons énoncer le théorème corrélatif suivant :

Le carré de la bissectrice d'un angle extérieur est égal au rectangle des deux segments déterminés sur le côté opposé, moins le rectangle des deux côtés de l'angle.

4. Au lieu de partir des théorèmes sur la bissectrice d'un angle intérieur, nous aurions évidemment pu, à l'aide du même procédé, suivre la marche inverse : le procédé est général.

SECTIONS CIRCULAIRES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. CROSNIER,

Agrégé de l'Université, professeur au lycée d'Auch.

Si une surface du second ordre peut être coupée suivant un cercle, on pourra faire passer par cette courbe une sphère qui coupera, comme on sait, la surface suivant un second cercle; et, par suite, par l'intersection des deux surfaces, on pourra faire passer un système de deux plans.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + \ldots = 0$$

l'équation de la surface donnée qui est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.

Soit

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0$$

l'équation d'une sphère quelconque.

L'équation des surfaces du second ordre, qui passent par l'intersection de la surface proposée et de la sphère, étant

$$(1) \qquad f - k\mathrm{S} = 0,$$

on peut déterminer k, α, β, γ, r de manière que cette équation représente un système de deux plans qui passent par un point donné arbitraire.

En effet, pour que l'équation (1) représente un système de deux plans, il faut que :

1° Le déterminant des équations du centre soit nul;

2° Les plans du centre passent par un même point;

3° La surface elle-même passe par ce point.

Les équations du centre sont

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C} - k(x-\alpha) = 0,\\
&\mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}' - k(y-\beta) = 0,\\
&\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'' - k(z-\gamma) = 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations annulé nous donne l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}-k & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}'-k & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}''-k \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite, k est l'une des racines de l'équation en S. Prenons l'une de ces valeurs.

Nous pouvons déterminer α, β, γ par la condition que les plans du centre passent par un même point x', y', z' quelconque, pourvu que la valeur de k, que nous avons choisie, ne soit pas nulle.

Enfin nous pouvons déterminer le rayon de la sphère, qui reste encore arbitraire, de manière que la surface (1) passe par le point x', y', z'.

Comme cela résulte évidemment de ce qui précède, à chaque valeur de k correspond un seul système de valeurs de α, β, γ, r^2; d'où il suit que par chaque point de l'espace passent trois systèmes de deux plans, qui coupent la surface proposée suivant des cercles; mais ces trois systèmes de plans ne sont pas tous réels.

Pour que l'équation (1), dans laquelle α, β, γ, r^2 et k ont les valeurs que je viens de déterminer, représente un système de plans réels, il faut et il suffit que sa trace sur l'un des plans coordonnés soit du genre hyperbole, ou que $(A'-k)(A''-k)-B^2<0$. Mais il résulte de la discussion de l'équation en S, par la méthode de Cauchy, que la racine moyenne satisfait seule à cette condition; donc il n'y a qu'un seul système de plans qui soient réels et qui coupent la surface suivant des cercles.

L'équation (1) du système des deux plans a ses termes du second degré indépendants de α, β, γ et r^2; par conséquent, les plans qu'elle représente ont une direction déterminée qui ne dépend que de la valeur de k.

Ces deux plans ne sont du reste pas parallèles; car l'ensemble des termes du second degré de l'équation (1) ne forme pas un carré parfait.

L'intersection de deux plans d'un système est donnée par l'intersection de deux plans du centre; or ces plans sont respectivement parallèles à ceux qui donnent la direction des cordes principales; donc les plans des sections circulaires sont respectivement parallèles aux axes de la surface. Les plans réels sont parallèles à l'axe moyen de la surface, car l'axe moyen correspond à la racine moyenne de l'équation en S.

L'application de ce qui précède aux surfaces dont on a l'équation réduite est trop facile pour qu'il soit nécessaire de la faire.

On pourrait supposer que les axes des coordonnées sont obliques, et la discussion ne serait pas plus difficile.

L'équation (1), pouvant s'écrire $S = \frac{f}{k}$, peut s'interpréter géométriquement sans aucune difficulté.

Enfin on peut facilement déduire de ce qui précède les conditions pour que la surface soit de révolution; il faut que l'équation (1) représente deux plans parallèles et, par suite, que les termes du second degré forment un carré parfait, ou que les plans du centre soient identiques dans la partie du premier degré, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{A-k}{B''} = \frac{B''}{A'-k} = \frac{B'}{B},$$
$$\frac{A-k}{B'} = \frac{B''}{B} = \frac{B'}{A''-k};$$

d'où

$$A - k = \frac{B'B''}{B},$$
$$A' - k = \frac{BB''}{B'},$$
$$A'' - k = \frac{BB'}{B''},$$

d'où résultent les conditions ordinaires.

SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. A. PICART,

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Si l'on considère $m+1$ valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m$ de la fonction $y = f(x)$, correspondant aux valeurs x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots, x_0 + mh$ de la variable, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} y_m = y_0 + C_1^m \Delta y_0 + C_2^m \Delta^2 y_0 + \ldots + C_n^m \Delta^n y_0 \\ + C_{n+1}^m \Delta^{n+1} y_0 + \ldots + C_{m-1}^m \Delta^{m-1} y_0 + \Delta^m y_0, \end{aligned} \right.$$

C_p^m représentant le nombre de combinaisons de m objets p à p.

Désignons par R_n l'ensemble des termes qui suivent le $n+1^{ième}$, c'est-à-dire posons

$$R_n = C^m_{n+1}\,\Delta^{n+1}y_0 + C^m_{n+2}\,\Delta^{n+2}y_0 + \ldots + C^m_{m-1}\,\Delta^{m-1}y_0 + \Delta^m y_0,$$

et exprimons cette quantité au moyen seulement des différences $n+1^{ièmes}$.

On a

$$\Delta^{n+1}y_0 = \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+2}y_0 = \Delta^{n+1}y_1 - \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+3}y_0 = \Delta^{n+1}y_2 - 2\Delta^{n+1}y_1 + \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+4}y_0 = \Delta^{n+1}y_3 - 3\Delta^{n+1}y_2 + 3\Delta^{n+1}y_1 - \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^{n+p+1}y_0 = \Delta^{n+1}y_p - C^p_1\,\Delta^{n+1}y_{p-1} + C^p_2\,\Delta^{n+1}y_{p-2} - C^p_3\,\Delta^{n+1}y_{p-3} + \ldots \pm \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^m y_0 = \Delta^{n+1}y_{m-n-1} - C^{m-n-1}_1\,\Delta^{n+1}y_{m-n-2} + C^{m-n-1}_2\,\Delta^{n+1}y_{m-n-3} - \ldots \pm \Delta^{n+1}y_0.$$

En multipliant respectivement ces égalités par C^m_{n+1}, C^m_{n+2}, $C^m_{n+3}, \ldots, C^m_m$ et ajoutant, on obtient

$$\begin{aligned}
R_n = {} & \Delta^{n+1}y_0\left(C^m_{n+1} - C^m_{n+2} + C^m_{n+3} - \ldots \pm C^m_m\right) \\
& + \Delta^{n+1}y_1\left(C^m_{n+2} - 2C^m_{n+3} + 3C^m_{n+4} - 4C^m_{n+5} + \ldots \pm \overline{m-n-1}\,C^m_m\right) \\
& + \Delta^{n+1}y_2\left(C^m_{n+3} - C^3_1 C^m_{n+4} + C^4_2 C^m_{n+5} - C^5_3 C^m_{n+6} + \ldots\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Delta^{n+1}y_p\left(C^m_{n+p+1} - C^{p+1}_1 C^m_{n+p+2} + C^{p+2}_2 C^m_{n+p+3} + \ldots\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Delta^{n+1}y_{m-n-1}\,C^m_m.
\end{aligned}$$

Mais on a, par la formule du binôme,

$$(1+x)^m = C_m^m + C_{m-1}^m x + C_{m-2}^m x^2 + \ldots + C_{m-n}^m x^n + \ldots,$$

$$(1+x)^{-(p+1)} = 1 - C_1^{p+1} x + C_2^{p+2} x^2 - C_3^{p+3} x^3 + \ldots$$

Si l'on multiplie ces deux séries, on aura, pour le coefficient de x^n,

$$C_{m-n}^m - C_1^{p+1} C_{m-n+1}^m + C_2^{p+2} C_{m-n+2}^m - C_3^{p+3} C_{m-n+3}^m + \ldots;$$

d'ailleurs, le produit étant $(1+x)^{m-p-1}$, le coefficient de x^n est $C_{m-n-p-1}^{m-p-1}$; donc on a la formule

$$C_{m-n-p-1}^{m-p-1} = C_{m-n}^m - C_1^{p+1} C_{m-n+1}^m + C_2^{p+2} C_{m-n+2}^m - \ldots$$

Si l'on y fait $m - n = n + p + 1$, elle devient

$$C_n^{m-p-1} = C_{n+p+1}^m - C_1^{p+1} C_{n+p+2}^m + C_2^{p+2} C_{n+p+3}^m - \ldots;$$

donc le reste R_n peut s'écrire

$$R_n = C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + C_n^{m-3} \Delta^{n+1} y_2 + \ldots$$
$$+ C_n^n \Delta^{n+1} y_{m-n-1},$$

ou

$$R_n = (C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots) \frac{C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + \ldots}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots},$$

ou, d'après une formule connue,

$$R_n = C_{n+1}^m \frac{C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + \ldots}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots}.$$

ou

$$R_n = C_{n+1}^m M,$$

M désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des différences $(n+1)^{\text{ièmes}}$: $\Delta^{n+1}y_0$, $\Delta^{n+1}y_1$, $\Delta^{n+1}y_2, \ldots$, $\Delta^{n+1}y_{m-n-1}$. Posons maintenant $m\Delta x = h$, et remplaçons, dans l'équation (1), m par $\frac{h}{\Delta x}$, cette équation devient

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots$$
$$+ \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-\overline{n-1}\,\Delta x)}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}$$
$$+ \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1)}\frac{\mathrm{M}}{\Delta x^{n+1}}.$$

Si nous faisons tendre Δx vers zéro, nous obtiendrons

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x_0) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\mathrm{M}_1,$$

M_1 étant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $f^{n+1}(x)$, lorsque x varie de x_0 à x_0+h. Si la fonction $f^{n+1}(x)$ est continue de x_0 à x_0+h, M_1 est la valeur que prend cette fonction pour une certaine valeur $x_0+\theta h$, comprise entre x_0 et x_0+h, et alors on a la série de Taylor avec la forme du reste donnée par Lagrange.

Je dois dire que la méthode que je propose ici n'est autre qu'une méthode déjà ancienne donnée par M. Caqué, mais présentée sous un autre point de vue qui la rend peut-être plus intuitive, plus directe et plus simple.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873.

Mathématiques spéciales.

Une surface du second ordre S *étant donnée, ainsi que deux points* A *et* B *sur cette surface, il existe une* *infinité de surfaces du second ordre* Σ, *qui sont tangentes en* A *et* B *à la surface* S. *On propose de trouver : 1° le lieu géométrique des centres des surfaces* Σ; *2° le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné; 3° le lieu géométrique des points de contact de ces mêmes surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.*

Prenons pour origine des coordonnées le point O, milieu de $AB = 2l$, pour plan des xy le plan diamétral conjugué de AB dans S, et la droite AB pour axe de z. L'équation de la surface S est

$$S = z^2 + Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y - l^2 = 0.$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction homogène du second degré en x et y, à trois coefficients arbitraires, l'équation générale des surfaces Σ est

$$\Sigma = S + \varphi = 0;$$

car $\varphi = 0$ représente deux plans menés par l'axe des z.

1° Les équations du centre sont les dérivées partielles de Σ par rapport à x, y, z, et le lieu des centres s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or, φ étant indépendant de z, le résultat de cette élimination est

$$\Sigma'_z = S'_z = z = 0;$$

le lieu des centres est le plan des xy.

2° Si l'on rend la fonction $S + \varphi$ homogène au moyen d'une variable t, φ est indépendant de t aussi bien que de z, et le théorème des fonctions homogènes donne

$$(1) \qquad x\Sigma'_x + y\Sigma'_y + zS'_z + tS'_t = 2(S + \varphi) = 0.$$

Étant donné un point de la surface dont les coordonnées satisfont à cette équation, le plan tangent en ce point

$$(2) \qquad X\Sigma'_x + Y\Sigma'_y + ZS'_z + tS'_t = 0$$

conservera une direction constante, si l'on a, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{\Sigma'_x}{a} = \frac{\Sigma'_y}{b} = \frac{S'_z}{c} = \frac{-S'_t}{ax + by + cz},$$

a, b, c étant des constantes. Le lieu des points de contact s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or, la dernière égalité étant indépendante de φ, le résultat de l'élimination est

$$(ax + by + cz)S'_z + cS'_t = 0;$$

c'est un paraboloïde hyperbolique, qui passe par A et par B, et dont les plans directeurs sont le plan donné et le plan des xy.

3° Soient

$$\frac{x-p}{\alpha} = \frac{y-q}{\beta} = \frac{z-r}{\gamma}$$

les équations de la droite donnée. Pour que le plan tangent passe par cette droite, il faut que l'on ait

$$\alpha\Sigma'_x + \beta\Sigma'_y + \gamma S'_z = 0,$$
$$p\Sigma'_x + q\Sigma'_y + rS'_z + tS'_t = 0.$$

D'ailleurs

$$x\Sigma'_x + y\Sigma'_y + zS'_z + tS'_t = 0.$$

Le lieu du point de contact s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or seuls Σ'_x et Σ'_y les renferment; le résultat de l'élimination est donc

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma S'_z \\ p & q & rS'_z + S'_t \\ x & y & zS'_z + S'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} S'_z + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ p & q & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} S'_t = 0;$$

c'est un hyperboloïde à une nappe, qui passe par A et par B, et dont la droite donnée est une génératrice.

Ch. B.

Note. — Solutions analogues par MM. V. H. et Moret-Blanc.

Solution géométrique;

Par M. Albert GENOUILLE,
Élève du lycée de Sens.

1. Au premier aspect, le lieu des centres n'est pas déterminé. En effet, les données reviennent à ceci : on connaît deux plans tangents avec leurs points de contact ; cela fait donc six conditions seulement, et il semble alors que les trois paramètres restants puissent être déterminés de telle sorte qu'un point quelconque de l'espace devienne le centre de la surface du second ordre satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Mais le théorème suivant montre que la question est déterminée, et permet de la résoudre.

Théorème I. — *Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à deux plans donnés en des points donnés est un plan.*

Soient a et b (*) les deux points, CDP et CDQ les deux

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

plans donnés. Considérons une des surfaces S répondant à la question, et soit O son centre. Le plan Oab coupe la surface S suivant une conique tangente en a et b aux droites da et db, intersections de ce plan avec les plans tangents P et Q. Le point d est alors le pôle de la corde ab et, par suite d'un théorème connu, le centre O ne peut être quelconque dans le plan dab, mais il doit forcément se trouver sur la droite dm, qui passe par le milieu m de la corde des contacts ab. Il est clair que le centre peut être un point quelconque de cette droite, et, par suite, si l'on fait tourner le plan dab autour de ab, cette droite dm engendrera le lieu des centres cherché. Or cette droite passe par un point fixe m et rencontre une droite fixe CD : elle engendre donc un plan.

Remarque. — Lorsqu'on prend pour centre d'une surface du second ordre tangente en a et b aux plans donnés un point O de ce plan mDC, il n'y a que huit conditions entre les paramètres. Donc :

Il est en général impossible de construire une surface du second ordre ayant pour centre un point donné, et tangente à deux plans donnés en des points donnés, mais, lorsque le problème est possible, il admet une infinité de solutions.

Les deux autres parties de la question n'ont pas d'abord l'air d'être mieux déterminées. En effet, si CQP est un troisième plan tangent, ou parallèle à un plan fixe, ou passant par une droite fixe, il semble que l'on pourra toujours déterminer les trois paramètres restants, de telle sorte qu'un point quelconque de ce plan soit le point de contact d'une surface répondant à la question ; mais le théorème connu suivant montre que le problème est déterminé.

Théorème II. — *Le lieu des points de contact d'un* *plan* CPQ *et des surfaces du second degré tangentes à deux plans donnés* DCP, DCQ *en des points donnés b et a est une droite qui passe par le point* C *commun aux trois plans.*

En voici une démonstration, qu'on donne d'ailleurs dans plusieurs classes de Mathématiques spéciales.

Soit CPQ un troisième plan donné. Considérons une quelconque des surfaces S tangentes à ces trois plans, et soit *r* son point de contact avec CPQ. Le plan *abr* coupe la surface suivant une conique tangente en *a*, *b*, *r* aux droites *dq*, *dp*, *pq*, intersections de ce plan et du trièdre formé par les trois plans tangents. Mais les points *a* et *b* étant donnés, il résulte du théorème de Brianchon que le point *r* ne peut être quelconque sur *pq*. Il doit être aussi sur la droite DS; il est donc déterminé. Si maintenant on fait tourner le plan *dab* autour de *ab*, comme les plans *a*CP, *b*CQ se coupent toujours suivant CS, il en résulte que le point *r* décrit la droite C*r*, intersection de CPQ et CDS.

Remarque I. — Lorsqu'on assujettit une surface du second ordre déjà tangente, en des points *a* et *b*, à des plans donnés CDQ, CDP, à être tangente à un troisième plan CPQ, en un point de la droite C*r*, il n'y a plus que huit conditions entre les paramètres. Donc:

Il est en général impossible de construire une surface du second degré tangente à trois plans donnés en des points donnés, mais, lorsque le problème est possible, il admet une infinité de solutions.

Remarque II. — La droite C*r* ne change pas lorsque les points *a* et *b* glissent sur les droites C*a* et C*b*.

2. Ceci posé, soient CPQ un plan quelconque parallèle au plan fixe, et C*r* la droite des points de contact de ce plan : cette droite, restant parallèle à un plan fixe et ren-

contrant une droite fixe CD, engendrera alors une surface réglée du genre conoïde. Nous allons montrer qu'elle est du second degré, et pour cela qu'elle admet une seconde directrice rectiligne.

Considérons la section menée par ab parallèlement à CP. Le point p s'éloignant à l'infini, les droites dp, ap, qp deviennent parallèles. Les droites pq et dp étant alors deux tangentes parallèles, le milieu I de br est un centre de la section, et se trouve, par suite, sur dm. La droite ar, qui lui est parallèle, a une direction fixe indépendante du plan CPQ. Cette droite ar est donc une seconde directrice rectiligne de la génératrice Cr, qui engendre alors un paraboloïde hyperbolique.

3. Soit PQ la droite par laquelle passent les troisièmes plans tangents : une génératrice quelconque de la surface cherchée admet déjà pour directrices les droites CD et PQ. Nous allons démontrer qu'elle en admet une troisième.

Soit CPQ un plan quelconque mené par PQ, et considérons la section par le plan abP. Il coupe le trièdre CDPQ suivant le triangle dPq, et le point de contact r est sur dS. Si l'on examine alors la figure, on voit que le triangle Srq est tel, que ses côtés passent respectivement par trois points fixes d, b, P, en ligne droite, et que deux de ses sommets décrivent des droites fixes aP, aQ, lorsque le plan CPQ tourne autour de la droite PQ. Donc, par suite d'un théorème connu, le troisième sommet r décrit aussi une droite qui passe en a. Cette droite ar est donc une troisième directrice rectiligne de la génératrice Cr, qui, par suite, engendre un hyperboloïde à une nappe.

Mathématiques élémentaires.

SOLUTION PAR M. BRILLOUIN,
Élève du lycée Condorcet (classe de M. Desboves) (*).

Par un point donné, dans l'intérieur d'un cercle donné, mener deux cordes qui se coupent sous un angle donné et dont le produit soit maximum ou minimum. On examinera en particulier le cas où le point est extérieur au cercle.

Occupons-nous d'abord du premier cas où l'on suppose le point intérieur au cercle.

Soit (**) a la distance OA du point donné A au centre O, r le rayon de la circonférence, BC, DE les deux cordes, et 2α l'angle aigu qu'elles comprennent. Soit AF la bissectrice de cet angle, et μ l'angle variable que fait cette bissectrice avec OA.

Je remarque d'abord qu'il suffit de faire varier μ de o à π; car, pour deux valeurs de μ égales et de signes contraires, l'ensemble des deux cordes prend deux positions symétriques par rapport au diamètre OA, et, par suite, le produit des cordes est le même.

Cela posé, H et K désignant les milieux des cordes BC et DE, les maxima ou minima de la quantité BC.DE ont lieu en même temps que ceux du quart de son carré, $\overline{BH}^2 . \overline{DK}^2$, et l'on a

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{BH}^2 . \overline{DK}^2 = \left(r^2 - \overline{OH}^2\right)\left(r^2 - \overline{OK}^2\right), \\ \overline{BH}^2 . \overline{DK}^2 = r^4 - \left(\overline{OH}^2 + \overline{OK}^2\right)r^2 + \overline{OK}^2 . \overline{OH}^2 . \end{array}\right.$$

Je dis maintenant que, quelle que soit la position des

(*) Premier prix du Concours général.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

cordes, on a toujours

$$\overline{\text{OH}}^2 = a^2 \sin^2 (\mu - \alpha)$$

et

$$\overline{\text{OK}}^2 = a^2 \sin^2 (\mu + \alpha).$$

C'est ce que donnent évidemment les deux triangles HOA, KOA, lorsque les deux sécantes sont du même côté de OA. Si elles sont de part et d'autre de OA, AF restant au-dessus, OK ne change pas; mais on a

$$\text{OH} = a \sin (\alpha - \mu) = - a \sin (\mu - \alpha),$$

ce qui donne bien encore

$$\overline{\text{OH}}^2 = a^2 \sin^2 (\mu - \alpha).$$

On tire de là

$$4\left(\overline{\text{OH}}^2 + \overline{\text{OK}}^2\right) = 2a^2 [2 \sin^2 (\mu + \alpha) + 2 \sin^2 (\mu - \alpha)],$$
$$4\left(\overline{\text{OH}}^2 + \overline{\text{OK}}^2\right) = 2a^2 \{2 - [\cos(2\mu + 2\alpha) + \cos(2\mu - 2\alpha)]\},$$
$$4\left(\overline{\text{OH}}^2 + \overline{\text{OK}}^2\right) = 4a^2 (1 - \cos 2\alpha \cos 2\mu).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} 4\,\overline{\text{OH}}^2 . \overline{\text{OK}}^2 &= a^4 [2 \sin (\mu + \alpha) \sin (\mu - \alpha)]^2 \\ &= a^4 (\cos 2\alpha - \cos 2\mu)^2. \end{aligned}$$

Substituant, dans l'expression (1), ces valeurs de $\overline{\text{OH}}^2 + \overline{\text{OK}}^2$, et de $\overline{\text{OH}}^2 . \overline{\text{OK}}^2$, on a, en ordonnant par rapport à $\cos 2\mu$,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 4\overline{\text{BH}}^2 . \overline{\text{DK}}^2 = {} & a^4 \cos^2 2\mu - 2a^2 \cos 2\alpha \cos 2\mu (a^2 - 2r^2) \\ & + 4r^4 - 4a^2 r^2 + a^4 \cos^2 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que si l'on fait varier 2μ depuis o jusqu'à $-\pi$, après l'avoir fait varier depuis π jusqu'à o, on retrouvera en ordre inverse les mêmes valeurs du trinôme, $\cos 2\mu$ reprenant lui-même les mêmes valeurs.

Discussion. — Si, au lieu de $\cos 2\mu$, on avait une variable x qui pût prendre toutes les valeurs possibles, le minimum du trinôme aurait lieu pour la valeur

$$(3) \qquad x = \frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha.$$

Mais cette valeur, devant représenter un cosinus, n'est admissible que si son carré est plus petit que l'unité :

$$\left(\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}\right)^2 \cos^2 2\alpha < 1,$$

ou

$$(4) \qquad \cos^2 2\alpha < \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}.$$

Le point étant intérieur au cercle, a est plus petit que r; et, par conséquent, $(2r^2 - a^2)^2$ est plus grand que a^4. La fraction étant plus petite que 1, l'inégalité (4) n'est pas nécessairement satisfaite.

Nous sommes conduits à diviser le cas où le point A est intérieur au cercle en deux autres, suivant que l'inégalité (4) est satisfaite ou non.

$$\textit{Premier cas :}\ \cos^2 2\alpha < \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}.$$

Cette condition étant remplie, si l'on fait croître 2μ entre 0 et π, $\cos 2\mu$ croîtra entre ses deux limites $+1$ et -1, et passera nécessairement par la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$, à laquelle correspondra le minimum du trinôme.

D'ailleurs la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$ est négative, car

$\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}$ est négatif, et l'angle 2α étant l'angle aigu des deux droites, $\cos 2\alpha$ est toujours positif. L'angle μ est donc compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, faisons croître $\cos 2\mu$ depuis -1 jusqu'à $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}\cos 2\alpha$. La fonction décroît en tendant vers un minimum. On a donc un premier maximum pour la valeur -1 de $\cos 2\mu$, qui donne

$$2\mu = \pi \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{\pi}{2},$$

et alors la bissectrice de l'angle aigu des deux cordes est perpendiculaire à OA.

Quand $\cos 2\mu$ prend la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}\cos 2\alpha$, la fonction passe par un minimum, qui correspond à une valeur de μ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Si $\cos 2\mu$ continue de croître jusqu'à $+1$, la fonction qui vient de passer par un minimum croît aussi. On a donc un deuxième maximum pour la valeur $+1$ de $\cos 2\mu$, c'est-à-dire quand l'angle μ est nul. Dans ce cas, la bissectrice de l'angle aigu des droites se confond avec OA.

Remarque. — Pour les deux maxima, les cordes sont symétriques par rapport à OA.

Second cas : $\cos^2 2\alpha \geqq \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}$.

Si l'égalité a lieu, la valeur du minimum algébrique correspond à $\cos 2\mu = -1$. Si l'inégalité est satisfaite, la valeur du minimum algébrique n'est plus admissible et, comme elle est négative, elle est alors plus petite que

-1. Donc, dans ces deux cas, lorsqu'on fait croître $\cos 2\mu$ de -1 à $+1$, le trinôme croît en même temps. Le minimum arrive donc pour la valeur -1 de $\cos 2\mu$; c'est-à-dire lorsque μ est droit, et le maximum pour la valeur $+1$ de $\cos 2\mu$, c'est-à-dire lorsque μ est nul.

Supposons maintenant que le point soit extérieur à la circonférence. On peut alors poser ainsi la question :

Un angle donné 2α, aigu ou obtus, tournant autour d'un point A extérieur au cercle, trouver les maxima et les minima du produit des deux cordes interceptées par le cercle sur les deux côtés de l'angle.

On voit facilement que les mêmes triangles KOA, HOA donnent toujours, quel que soit l'angle 2α,

$$\overline{OH}^2 = a^2 \sin^2(\mu - \alpha)$$

et

$$\overline{OK}^2 = a^2 \sin^2(\mu + \alpha).$$

On arrive donc à la même expression (2)

$$a^4 \cos^2 2\mu - 2a^2 \cos 2\alpha \cos 2\mu\,(a^2 - 2r^2) + 4r^4 - 4a^2 r^2 + a^4 \cos^2 2\alpha.$$

Si l'on appelle β l'angle de la tangente AG, menée du point A au cercle, avec le diamètre OA, le triangle rectangle GAO donne

$$a = \frac{r}{\sin\beta}.$$

La fonction (2) passe par un minimum pour

$$\cos 2\mu_1 = \frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha,$$

ou

$$(5) \qquad \cos 2\mu_1 = \cos 2\alpha \cos 2\beta.$$

Discussion. — Je dis d'abord que $\cos 2\mu$ ne peut pas prendre la valeur $\cos 2\alpha \cos 2\beta$, bien qu'elle soit plus petite que 1.

En effet, si l'on suppose l'angle 2β aigu, il faut évidemment, pour que le problème soit possible, que l'angle 2α et, par suite aussi, l'angle 2μ soient aigus. Mais comme on a

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta < \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

ou

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta < \cos 2(\beta - \alpha),$$

si l'on prenait $\cos 2\mu$ égal à $\cos 2\alpha \cos 2\beta$, on en conclurait

$$(6) \qquad 2\mu_1 > 2(\beta - \alpha).$$

Or il est évident que, tant que les côtés de l'angle 2α coupent la circonférence, cette inégalité ne peut être satisfaite.

Supposons maintenant l'angle 2β obtus : l'angle 2α pourra être obtus ou aigu.

Si l'angle 2α est obtus, l'égalité (5) montre que $\cos 2\mu_1$ est positif, et $2\mu_1$ aigu. Mais on a toujours

$$(7) \qquad \cos 2\mu_1 > \cos(2\beta - 2\alpha).$$

Il faut donc que l'angle $2(\beta - \alpha)$ soit aigu, et alors de l'inégalité (7) on déduit, comme précédemment, l'inégalité (6), qui est impossible.

Si l'angle 2α est aigu, l'égalité (5) montre que l'angle $2\mu_1$ doit être obtus. Si, en même temps, $2(\beta - \alpha)$ est obtus, l'inégalité (7) conduit encore à l'inégalité (6).

Si, avec 2β obtus et 2α aigu, on a $2(\beta - \alpha)$ aigu, l'inégalité (7) est satisfaite d'elle-même, puisque le premier membre est négatif et le second positif, et il en est de même de l'inégalité (6).

Donc, dans tous les cas, quand on fait croître $\cos 2\mu$ depuis -1 jusqu'à $+1$, ce cosinus passe par la valeur $\cos 2\mu_1$, avant que les deux côtés de l'angle ne coupent la circonférence. Donc, lorsque $\cos 2\mu$ croît depuis $\cos 2(\beta - \alpha)$ jusqu'à $+1$, la fonction croît. Or, pour $2\mu = 2(\beta - \alpha)$, l'un des côtés de l'angle est tangent à la circonférence en G; c'est alors que le produit est un minimum, puisque c'est la première position où les deux côtés de l'angle coupent la circonférence. Et, effectivement, le produit est alors nul. Il atteint son maximum lorsque μ est nul, et les cordes sont alors symétriques par rapport au diamètre OA.

Dans le cas où le point est sur la circonférence, la valeur de $\cos 2\mu$, correspondant au minimum, devient $-\cos 2\alpha$; et commé on a toujours

$$\cos^2 2\alpha < 1,$$

on rentre dans la première partie du premier cas.

En résumé, suivant les cas, le problème peut donner lieu à deux maxima et à un minimum, ou seulement à un minimum et à un maximum.

Philosophie.

Solution par M. Raphael HENRIQUE Y DIAZ,
Étudiant à l'Université de Liége.

On inscrit, dans un cercle donné, tous les triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles à deux droites fixes données; on demande le lieu des centres des cercles inscrits dans ces triangles.

Soient PQ et SV les directions données (*), et O le cercle donné.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si, par le centre, nous menons les diamètres HH′, II′ respectivement perpendiculaires à PQ, SV, nous obtiendrons, sur la circonférence, quatre points H, I, H′, I′ tels, que les parallèles correspondantes ne forment point de triangle inscrit; ou plutôt chacun des triangles inscrits est réduit à un point. Par suite, les cercles inscrits à ces triangles se sont également réduits à des points : donc les quatre points H, I, H′, I′ appartiennent au lieu.

Si, maintenant, nous considérons une position A du point mobile prise entre H et I, nous obtiendrons le triangle ABC, dans lequel les côtés AB, AC, étant les cordes parallèles aux directions données, sont respectivement perpendiculaires aux diamètres HH′, II′, qui, par conséquent, partagent en deux parties égales les arcs sous-tendus par ces cordes.

De là résulte que BI est la bissectrice de l'angle B, et CH celle de l'angle C du triangle ABC. Le point m de rencontre de ces deux droites appartient au lieu. Il est, de plus, visible que la bissectrice AF de l'angle BAC est perpendiculaire en P à la corde HI; car les angles FPI et IPA sont égaux comme ayant même mesure.

Cela posé, les triangles AHP, mHP, qui ont le côté HP de l'angle droit commun, et l'angle aigu HAP égal à l'angle aigu HmP, comme ayant même mesure, sont égaux : donc $AP = mP$; donc le point m du lieu est le symétrique du point A par rapport à HI; donc, quand le point mobile se trouve entre H et I, le lieu se compose d'un arc symétrique de HAI par rapport à la corde HI.

On verrait de même que les trois autres parties du lieu sont les symétriques des arcs IH′, H′I′, I′H par rapport aux cordes qui les sous-tendent.

Menons maintenant les droites IB et CH′. A cause des diamètres HH′, II′, ces droites seront perpendiculaires aux bissectrices BH′, CH. Donc ces droites sont les bissectrices des angles supplémentaires de B et C, et couperont AF en un point K. De plus, il est évident que AF est perpendiculaire en P' à I'H'. Les deux triangles rectangles AP'H' et KP'H' ont un côté commun et un angle aigu égal; ils sont donc égaux.

En effet, l'angle aigu $\widehat{I'H'A} = \widehat{I'IA}$, et $\widehat{I'H'C} = \widehat{I'IC}$. Or, par hypothèse, arc IC = arc IA; donc on a

$$\widehat{I'IA} = \widehat{I'IC}, \quad \text{et, par suite,} \quad \widehat{I'H'A} = \widehat{I'H'C}.$$

Donc le point K est symétrique du point A par rapport à la corde I'H'; donc le lieu du point K est l'arc symétrique de l'arc I'HIH' par rapport à la corde I'H'.

On ferait voir, de la même manière, que le lieu des centres des deux autres cercles exinscrits sont les arcs symétriques des arcs IHI'H' et HIH'I' par rapport aux cordes respectives IH' et I'H.

Il serait également facile de s'assurer que les centres des quatre circonférences du lieu sont situés aux quatre sommets d'un losange ayant pour côté le diamètre du cercle O, et dont les diagonales sont égales aux doubles des côtés du rectangle HI'H'I.

Troisième.

SOLUTION DE LA PREMIÈRE QUESTION PAR M. BEAUJEUX.

On donne deux circonférences se coupant en D *et* C; *par l'un des points communs, on mène une sécante qui coupe* O *en* B *et* O' *en* B'; *on trace* BO *et* B'O'. *Ces deux droites se coupent en* M; *lieu géométrique.*

Ce lieu est le segment capable de l'angle ODO' constant décrit sur OO' et qui passe par C.

En effet, on peut remarquer que les quatre angles du quadrilatère $ODO'M$ sont réunis au point D. Il y a déjà l'angle ODO'. L'angle DOM extérieur au triangle BOD égale $OBD + BDO = 2BDO$, puisque BOD est isoscèle. L'angle $DO'M$ extérieur au triangle $B'O'D$ égale $O'DB' + DB'O' = 2O'DB'$, puisque $O'DB'$ est isoscèle. Donc l'angle OMO' doit être égal à l'angle constant ODO'; donc, etc.

Solution de la seconde question.

Trouver le plus petit nombre possible qui, divisé par 2, *donne pour reste* 1; *divisé par* 3, *donne pour reste* 2; *divisé par* 4, *donne pour reste* 3, *etc.; et, enfin, divisé par* 10, *donne pour reste* 9.

La question peut être transformée de la manière suivante :

Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 2, donne pour reste -1; divisé par 3, donne pour reste -1; divisé par 4, donne pour reste -1, et ainsi de suite jusqu'à 10. Or il est clair que ce nombre est le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, 3, jusqu'à 10, diminué de 1, ou

$$5.7.8.9 - 1 = 2519.$$

Ch. B.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1873.

1re série d'épreuves. — Admissibilité.

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe, sur lequel on prend une génératrice déterminée G. En un point quelconque de cette génératrice, on mène la normale à la surface; on suppose que cette normale, considérée comme rayon incident, se réfléchit, suivant la loi connue, sur le plan de l'ellipse de gorge. On demande : 1° la surface engendrée par le rayon réfléchi, lorsque le point P se déplace sur la génératrice G; 2° l'enveloppe des sphères ayant pour centre le point d'incidence et pour rayon la distance du point d'incidence au point P.

Mathématiques élémentaires et Mécanique.

1° On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC, et l'on joint les points de contact de chacun de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle A' B' C'. On demande : 1° d'évaluer les angles du triangle A' B' C'; 2° de démontrer que les droites AA', BB', CC' sont les hauteurs du triangle ABC; 3° de déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle A' B' C'.

2° Un point matériel M, assujetti à demeurer sur une sphère donnée, est attiré, proportionnellement à la distance, par des centres fixes et donnés d'une manière quelconque dans l'espace. On demande : 1° la position d'équilibre du point M; 2° le lieu des positions de ce point pour lesquelles la composante normale de la résultante des attractions aurait une attraction constante et donnée (on négligera le poids du point M).

Question d'Histoire et de Méthode.

Des divers systèmes de coordonnées d'un point en Géométrie plane; leur origine et leur rôle.

2e SÉRIE D'ÉPREUVES. — LEÇONS TIRÉES AU SORT.

Mathématiques élémentaires.

1. Extraction de la racine carrée des nombres.
2. Première leçon de Trigonométrie.

3. Surface et volume de la sphère et des parties de la sphère.

4. Plus courte distance de deux droites (Descriptive).

5. Mesure du temps.

6. Calcul du nombre π.

7. Intersection et contact des cercles; questions qui s'y rattachent.

8. Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales; fractions périodiques.

9. Multiplication et division abrégées; applications.

10. Changement de plans de projection; rotations....; applications.

11. Première leçon sur la mesure des volumes.

12. Mouvement réel et apparent des planètes.

13. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

14. Éclipses; occultations; passages.

15. Pénétration de polyèdres (Descriptive).

16. Variations de l'expression $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

17. Division des nombres entiers.

18. Calcul des tables trigonométriques.

Mathématiques spéciales.

1. Des divers procédés employés pour la séparation des racines d'une équation.

2. Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.

3. Théorie des asymptotes.

4. Méthode d'approximation de Newton.

5. Des plans diamétraux.

6. De la convergence des séries.

7. Résolution de l'équation du troisième degré.

8. Règle des signes de Descartes.

9. Formule de Moivre; polygones réguliers.

10. Génération des surfaces : cylindres, cônes, etc.

11. Tangentes, points multiples, dans les courbes algébriques.

12. Foyers dans les coniques.

13. Plans tangents communs à deux cônes de révolution ayant même sommet.

14. Théorie des racines égales.

15. Déterminer l'espèce d'une surface du second ordre d'après la nature des racines de l'équation en s.

16. Plans polaires d'un point; application aux surfaces du second ordre.

17. Distance d'un point à une droite; distance de deux droites; volume d'un tétraèdre.

18. Sections circulaires dans les surfaces du second ordre; génération.

3e SÉRIE D'ÉPREUVES. — COMPOSITION ÉCRITE.

Sur les matières de la Licence ès Sciences mathématiques.

1° Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique quelconque. On examinera en particulier le cas où le paraboloïde est équilatère.

2° Une circonférence homogène de masse totale m peut tourner autour d'un diamètre horizontal AA′ comme charnière. Cette charnière fait corps en son milieu avec un axe vertical BB′, autour duquel le système tourne avec une vitesse constante et donnée. Par suite de cette rotation, l'anneau tend à se placer dans un plan horizontal; mais cette tendance est combattue par l'action de la pesanteur sur une masse additionnelle M fixée à l'extrémité C du diamètre perpendiculaire à la charnière. On propose : 1° de déterminer la position angulaire pour laquelle l'anneau resterait en repos relatif; 2° de trouver et de discuter pour une époque quelconque l'expression de la vitesse angulaire de l'anneau autour de la charnière.

Géométrie descriptive.

Un miroir, qui a la forme d'un cône de révolution, étant posé par sa base sur le plan horizontal, on demande quelles lignes il faut tracer sur ce plan pour que, en plaçant l'œil en un point déterminé sur l'axe du cône, on aperçoive dans le miroir une image donnée.

Le demi-angle au sommet du cône est de 45 degrés; sa base est un cercle de 3 centimètres de rayon, dont le centre est à 4 centimètres de la ligne de terre. L'image qu'on veut obtenir se compose :

1° D'une circonférence ayant pour diamètre le rayon de la base du cône perpendiculaire à la ligne de terre et aboutissant au point de la base le plus éloigné de cette ligne;

2° Des deux diamètres de cette circonférence qui font avec la ligne de terre des angles de 45 degrés.

On suppose l'œil placé dans l'axe du cône à 6 centimètres au-dessus du plan horizontal.

On joindra à l'épure une explication sommaire de la méthode employée.

Calcul.

Calculer toutes les racines, réelles et imaginaires, de l'équation

$$6x^6 - 19x^5 - 32x^4 + 170x^3 - 138x^2 - 96x + 120 = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

I. *Solution géométrique.* — Soit un point quelconque P de l'ellipse de gorge. Par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface G et G', symétriques par rapport au plan de cette ellipse. Les normales à la surface, menées par les points M et M', appartenant aux génératrices G et G', sont évidemment aussi symétriques par rapport au plan de l'ellipse de gorge, et, par suite, percent ce plan au même point R, et font des angles égaux avec ce plan. Donc le *rayon réfléchi* se confond avec la normale en M' à l'hyperboloïde. Le lieu cherché est donc identique à celui des normales à l'hyperboloïde, menées tout le long d'une même génératrice rectiligne. Or ce dernier est un paraboloïde hyperbolique; donc, etc.

La normale en P à l'hyperboloïde étant dans le plan de l'ellipse de gorge, le centre de la sphère, considérée dans l'énoncé, décrit cette normale; d'où il suit que l'enveloppe cherchée est une surface de révolution ayant pour axe la normale en P à la surface proposée. De plus, la génératrice G étant tangente à toutes les sphères, l'enveloppe contient cette génératrice. Dès lors, cette enveloppe est un hyperboloïde de révolution (*).

II. *Solution analytique.* — Soit l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

(*) Solution analogue par M. G. Launoy, professeur au lycée de Tournus.

et la génératrice rectiligne

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

équations que nous écrirons

$$\text{(G)}\qquad \begin{cases} 2bx-any-abm=0,\\ 2bz+cmy-bcn\ =0,\end{cases}$$

en posant

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=m,$$

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=n.$$

Posons, de plus,

$$a^2-b^2=l^2,$$
$$a^2+c^2=k^2,$$
$$b^2+c^2=h^2.$$

Les équations de la normale au point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de la génératrice G sont

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta}=-\frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma}.$$

Le point où cette normale perce le plan des xy a pour coordonnées

$$x_1=\frac{h^2\alpha}{a^2},\quad y_1=\frac{k^2\beta}{b^2},\quad z_1=0.$$

Pour avoir les équations du rayon réfléchi, écrivons l'équation du cône de révolution qui a pour sommet le point d'incidence et son axe perpendiculaire au plan des xy, nous obtiendrons

$$\left[\frac{(a^2x-h^2\alpha)^2}{a^4}+\frac{(b^2y-k^2\beta)^2}{b^4}\right]\frac{\gamma^2}{c^4}-\left(\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}\right)z^2=0.$$

Cette équation, jointe à celle du plan vertical contenant la normale, c'est-à-dire à

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta},$$

représente à la fois le *rayon incident* et le *rayon réfléchi*; mais, si l'on élimine y, par exemple, entre ces deux équations, on pourra obtenir les équations du rayon réfléchi seulement. On trouve, après quelques calculs et réductions, puis suppression du facteur $\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}$,

$$[(k^2\alpha-a^2x)\gamma+c^2\alpha z][(k^2\alpha-a^2x)\gamma-c^2\alpha z]=0,$$

qui se dédouble en

$$(k^2\alpha-a^2x)\gamma+c^2\alpha z=0,$$
$$(k^2\alpha-a^2x)\gamma-c^2\alpha z=0.$$

On peut écrire ces équations ainsi :

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=-\frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma},$$
$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{c^2(z+\gamma)}{\gamma};$$

elles ne diffèrent que par le signe de γ. Donc le rayon réfléchi a pour équations

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta}=\frac{c^2(z+\gamma)}{\gamma}.$$

Ce sont celles de la normale à l'hyperboloïde au point M′, symétrique de M par rapport au plan des xy.

Le lieu demandé est donc un paraboloïde hyperbolique.

La sphère considérée dans l'énoncé a pour équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2=(\alpha-x_1)^2+(\beta-y_1)^2+\gamma^2,$$

ou bien, en tenant compte des valeurs de x_1, y_1 en fonction de α, β, γ,

$$\frac{(a^2x - k^2\alpha)^2 - c^4\alpha^2}{a^4} + \frac{(b^2y - h^2\beta)^2 - c^4\beta^2}{b^4} + \frac{c^4(z^2 - \gamma^2)}{c^4} = 0,$$

les indéterminées α, β, γ étant liées par les relations

$$\begin{aligned} 2b\alpha - an\beta - abm &= 0, \\ 2b\gamma + cm\beta + bcn &= 0. \end{aligned}$$

On peut en tirer les valeurs de α et γ en fonction de β, et substituer dans l'équation de la sphère, ce qui donne, après quelques calculs,

$$\begin{aligned} &(4h^2 + n^2k^2)\,a\beta^2 + 2(abk^2mn - 2bk^2nx - 4ah^2y)\beta \\ &\quad + 4ab^2(x^2 + y^2 + z^2) + k^2ab^2m - 4ab^2c^2 - 4k^2b^2x = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme

$$M\beta^2 + 2N\beta + P = 0,$$

M, N et P étant des fonctions de x, y, z ne contenant pas β. L'enveloppe est donc

$$N^2 - MP = 0,$$

ou bien, plus explicitement,

$$\begin{aligned} &(abk^2mn - 2k^2bnx - 4h^2ay)^2 \\ &\quad = ab^2(4h^2 + n^2k^2)[4a(x^2 + y^2 + z^2) + ak^2m - 4ac^2 - 4k^2x], \end{aligned}$$

équation d'une surface du second ordre.

En comparant avec l'équation générale des surfaces du second ordre, et posant, pour abréger,

$$a^2b^2(a^2n^2 + c^2m^2 + 4b^2) = R^6,$$

on trouve

$$\begin{aligned} A &= 4(k^4b^2n^2 - R^6), \\ A' &= 4(4h^4a^2 - R^6), \\ A'' &= -4R^6, \end{aligned}$$

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 8h^2k^2abn;$$

par suite,

$$A - A'' = 4k^4 b^2 n^2,$$
$$A' - A'' = 16h^4 a^2,$$
$$(A - A'')(A' - A'') = 64 h^4 k^4 a^2 b^2 n^2 = B''^2.$$

Ainsi la surface est de révolution. On trouve, pour les équations de l'axe,

$$z = 0,$$
$$2ah^2 x - bk^2 ny - h^2 k^2 m = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que cette droite est le lieu des intersections, avec le plan des xy, des normales à l'hyperboloïde, le long de la génératrice G.

SOLUTION DES QUESTIONS ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Solution de la question de Géométrie.

Soit le triangle ABC. Appelons O_1, O_2, O_3 les centres des cercles exinscrits, O_1 étant dans l'angle A, etc.; puis, en allant de A vers B, notons les points de contact ainsi : M_1, N_1; M_2, N_2,; M_3, N_3. Conservons pour le reste les notations ordinaires.

I. Les deux triangles $A'B'C'$, $O_1O_2O_3$ ont leurs côtés respectivement parallèles. Ainsi $B'C'$ et O_2O_3 sont parallèles, parce qu'ils sont à la fois perpendiculaires sur O_1A. Or on voit facilement que l'angle O_1 est égal à $\frac{B+C}{2}$ ou $90^\circ - \frac{A}{2}$.

Donc les angles A′, B′, C′ ont les valeurs respectives

$$90^\circ - \frac{A}{2}, \quad 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

II. Les deux triangles AM_3A', AN_2A' donnent

$$\frac{AA'}{\sin AM_3A'} = \frac{AM_3}{\sin AA'M_3}, \quad \frac{AA'}{\sin AN_2A'} = \frac{AN_2}{\sin AA'N_2}.$$

Or

$$AM_3A' = 90^\circ + \frac{C}{2}, \quad AN_2A' = 90^\circ + \frac{B}{2},$$

$$AM_3 = p - b, \quad AN_2 = p - c,$$

et si l'on pose

$$AA'M_3 = \alpha,$$

on aura

$$AA' = \frac{(p-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\alpha} = \frac{(p-c)\cos\frac{B}{2}}{\cos\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)}.$$

Développant le cosinus de $\alpha + \frac{A}{2}$, et éliminant les lignes trigonométriques au moyen de leurs valeurs en fonction de a, b, c et du périmètre du triangle ABC, il vient

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \operatorname{tang}\frac{C}{2},$$

d'où

$$\alpha = \frac{C}{2}.$$

Par suite, l'angle $M_3AA' = 90^\circ - C$ et la droite AA′ est perpendiculaire sur BC.

On démontrerait de même que BB′, CC′ sont respectivement perpendiculaires sur AC et sur AB.

III. Soient R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC; R′ le rayon du cercle circonscrit au triangle A′B′C′.

Les triangles AM_3A', BN_3B' donnent facilement

$$A'M_3 = \frac{(p-b)\cos C}{\sin\frac{C}{2}},\quad B'N_3 = \frac{(p-a)\cos C}{\sin\frac{C}{2}}.$$

et l'on tire, du triangle isoscèle CM_3N_3.

$$M_3N_3 = 2p\sin\frac{C}{2}.$$

Donc

$$A'M_3 + M_3N_3 + B'N_3 = A'B' = \frac{c\cos C + 2p\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}};$$

mais, de la relation

$$A'B' = 2R'\sin C' = 2R'\cos\frac{C}{2},$$

on tire

$$R' = \frac{A'B'}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{c\cos C + 2p\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C},$$

ou bien

$$R' = \frac{c + 2(p-c)\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C}.$$

L'élimination des lignes trigonométriques conduit à

$$R' = 2R + r.$$

Si l'on tient compte de la relation

$$4R' = r_a + r_b + r_c - r,$$

où r_a, r_b, r_c sont les rayons des cercles exinscrits, on arrive aussi à

$$R' = \frac{r_a + r_b + r_c + r}{2}.$$

IV. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle A′ B′ C′. On trouve facilement que l'angle OA′B′ est le complément de l'angle C′; mais l'angle C′ vaut $90^\circ - \frac{C}{2}$, donc

$$OA'B' = \frac{C}{2}.$$

C'est justement l'angle que font les droites A′B′ et A′A. Il s'ensuit que AA′ passe par le point O; il en est donc de même de BB′ et de CC′.

Solution de la question de Mécanique.

Soient les centres d'attraction C, C′, C″,... en nombre n, dont les coordonnées sont a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'',...;

x, y, z les coordonnées du point M dans sa position d'équilibre;

α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'',... les angles que font respectivement les droites CM, C′M′, C″M″,... avec trois axes rectangulaires se coupant au centre de la sphère;

λ, μ, ν ceux du rayon passant en M avec les mêmes axes;

R une force égale à la résistance de la sphère et pouvant remplacer cette sphère, de sorte que le point M puisse être considéré comme entièrement libre.

Posons

$$CM = d, \quad CM' = d', \quad CM'' = d'', \ldots,$$

et prenons pour unité l'attraction de l'un quelconque des centres sur le point M à l'unité de distance. Les forces attractives seront alors mesurées par les distances d, d', d'',....

L'équation de la sphère sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2.$$

Cela posé, les conditions d'équilibre d'un point matériel entièrement libre donnent, dans l'hypothèse actuelle,

$$\begin{aligned}
d\cos\alpha + d'\cos\alpha' + \ldots + \mathrm{R}\cos\lambda &= \Sigma d\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\lambda = 0,\\
d\cos\beta + d'\cos\beta' + \ldots + \mathrm{R}\cos\mu &= \Sigma d\cos\beta + \mathrm{R}\cos\mu = 0,\\
d\cos\gamma + d'\cos\gamma' + \ldots + \mathrm{R}\cos\nu &= \Sigma d\cos\gamma + \mathrm{R}\cos\nu = 0;
\end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha = \frac{a-x}{d}, \quad \cos\beta = \frac{b-y}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{c-z}{d},\\
&\cos\alpha' = \frac{a'-x}{d'}, \quad \cos\beta' = \frac{b'-y}{d'}, \quad \cos\gamma' = \frac{c'-z}{d'},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\cos\lambda = \frac{x}{r}, \quad \cos\mu = \frac{y}{r}, \quad \cos\nu = \frac{z}{r}.
\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre deviennent ainsi

$$\Sigma(a-x) + \frac{\mathrm{R}x}{r} = 0,$$

$$\Sigma(b-y) + \frac{\mathrm{R}y}{r} = 0,$$

$$\Sigma(c-z) + \frac{\mathrm{R}z}{r} = 0.$$

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre des moyennes distances des n centres d'attraction, ces équations conduisent, par l'élimination de R, à

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z}.$$

La résultante des attractions passe donc par le centre des moyennes distances des centres donnés.

On trouve, sans difficulté, pour les valeurs de x, y, z :

$$x = \frac{rx_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$y = \frac{ry_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$z = \frac{rz_1}{\pm\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

ou, en appelant d_1 la distance du point (x_1, y_1, z_1) au centre de la sphère,

$$x = \frac{rx_1}{\pm d_1}, \quad y = \frac{ry_1}{\pm d_1}, \quad z = \frac{rz_1}{\pm d_1}.$$

On prendra devant d_1 le signe $+$, parce que x, y, z ont le même signe que x_1, y_1, z_1.

L'intensité de la résultante se calcule ensuite facilement. On trouve

$$-R = n(d_1 - r).$$

Si l'intensité R est donnée, les équations d'équilibre deviennent d'abord

$$n(x_1 - x) = -\frac{Rx}{r}.$$

$$n(y_1 - y) = -\frac{Ry}{r},$$

$$n(z_1 - z) = -\frac{Rz}{r}.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$n^2\left[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right] = R^2 = n^2(d_1 - r)^2,$$

ou bien

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (d_1 - r)^2,$$

équation d'une sphère. Les coordonnées du point M devant aussi vérifier les équations de la sphère donnée, le lieu de ce point est un cercle déterminé par les équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$xx_1+yy_1+zz_1=d_1r.$$

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES AYANT UN AXE RÉEL COMMUN.

Solution géométrique;

Par M. R. LEFÉBURE DE FOURCY.

Ce problème peut toujours se ramener à un autre plus simple : Construire les points de rencontre d'un cercle avec une ellipse, l'ellipse ayant son petit axe en prolongement d'un des diamètres du cercle.

Nous présenterons d'abord cette solution et nous généraliserons ensuite.

Pour obtenir les sécantes communes, je construis un cylindre ayant l'ellipse pour section droite, et un cône ayant le cercle pour directrice. Il suffit de placer le sommet de ce cône de telle sorte qu'il se coupe avec le cylindre suivant une courbe plane; l'autre courbe d'entrée sera forcément plane aussi et, en déterminant trois points de chacune d'elles, on aura des plans dont les traces sur le plan des courbes données seront les cordes communes cherchées.

On a tout intérêt à disposer la figure symétriquement. Nous placerons donc les courbes sur le plan horizontal. de telle sorte que l'axe commun soit parallèle à la ligne de terre.

Reste à trouver une courbe plane qu'on puisse placer sur le cône et sur le cylindre. On voit que la section circulaire du cylindre remplit ces conditions. Plaçons-la de telle sorte qu'elle soit sur une même sphère avec le cercle directeur, ce qui est facile, et on pourra faire passer un cône par les deux cercles; il ne reste plus qu'à en construire le sommet et la projection sur le plan vertical. Les plans des courbes d'intersection se projettent suivant des droites; il suffira d'en avoir deux points au lieu de trois : on les obtient par l'intersection des génératrices situées aux extrémités de l'axe commun.

Reste à vérifier que les autres cas, compris dans notre en-tête, peuvent se ramener à celui dont nous venons de donner la solution.

1° Les deux courbes sont deux ellipses.

En projetant orthogonalement ou obliquement, suivant les cas, nous pourrons toujours revenir à la figure précédente.

2° Nous avons une courbe fermée et une courbe à branches infinies.

Nous prenons au-dessus de l'axe commun un point sommet de deux cônes, dont les directrices sont les courbes données. En général, une section convenablement choisie nous donnera deux courbes fermées.

Cependant, si nous avons hyperbole et ellipse, dans le cas où les sommets de cette dernière sont de part et d'autre de ceux de l'hyperbole, il faudra mener dans les cônes une section déterminant deux hyperboles, ce qui nous ramènera au dernier cas que nous allons examiner.

3° Cas où les deux courbes sont à branches infinies.

Nous devrons encore nous servir de la projection conique pour fermer les courbes. En général, une seule opération suffira.

Lorsque les deux sommets de la première hyperbole sont intérieurs à l'une des branches de la seconde, une section dans les cônes ne pourra fermer qu'une courbe à la fois. Il faudra fermer l'hyperbole dont les sommets sont intérieurs à l'autre, et nous serons ramenés au cas ordinaire de la construction du n° 2.

Il va sans dire que les plans sécants, menés dans les cônes et dans les cylindres, doivent être perpendiculaires au plan vertical.

C'est à cette condition seulement que les courbes se transforment en conservant un axe commun.

SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS;

PAR M. J. MOUTIER.

Cet article a pour but d'indiquer quelques démonstrations nouvelles de théorèmes généraux relatifs à la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs.

THÉORÈME DE M. CHASLES (*). — 1° *Quand un corps est enveloppé de toutes parts par une surface fermée, la somme des répulsions du corps sur les éléments superficiels de cette surface, estimées suivant les normales à ces éléments, est égale à la masse du corps multipliée par* 4π;

2° *Quand un corps est extérieur à une surface fermée, la somme des répulsions du corps sur les éléments superficiels de cette surface, estimées suivant les normales à ces éléments, est égale à zéro.*

Considérons en premier lieu un point A situé à l'inté-

(*) *Additions à la Connaissance des Temps*, p. 24; 1845.

rieur d'une surface fermée S. Prenons au point B de la surface un élément ω et supposons cet élément repoussé par une force dirigée suivant AB, proportionnelle à la masse m du point A, à l'aire de l'élément ω, et inversement proportionnelle à la distance $AB = r$, de sorte que la force puisse se représenter par $m\frac{\omega}{r^2}$.

Menons au point B la portion de la normale à la surface BN située en dehors de la surface fermée; désignons par φ l'angle de BN avec le prolongement de AB; $m\frac{\omega}{r^2}\cos\varphi$ est la composante de la répulsion dirigée suivant la normale, ou *la répulsion estimée suivant la normale*.

Mais $\frac{\omega\cos\varphi}{r^2}$ est l'élément sphérique intercepté par le cône, dont le sommet est A et la base ω, sur la sphère décrite du point A comme centre avec un rayon égal à l'unité. Pour la surface S tout entière, $\sum\frac{\omega\cos\varphi}{r^2} = 4\pi$; par suite,

$$\sum \frac{\omega}{r^2}\cos\varphi = 4\pi m.$$

Supposons en second lieu le point A extérieur à la surface S. Le cône, qui a pour sommet A et pour base ω, coupe une seconde fois la surface S en un point B'; il intercepte sur la surface un second élément ω', à une distance r' du point A. Si l'on appelle, comme précédemment, φ' l'angle que fait, avec le prolongement de AB', la normale menée au point B' en dehors de la surface, on voit, d'après le raisonnement qui précède, que

$$\frac{\omega\cos\varphi}{r^2} = -\frac{\omega'\cos\varphi'}{r'^2},$$

de sorte que les répulsions estimées suivant la normale ont une somme algébrique nulle, et, par suite, pour la surface fermée tout entière,

$$\sum m \frac{\omega}{r^2} \cos\varphi = 0.$$

Cette propriété se généralise d'une façon évidente. Si l'on appelle en général M une masse agissante, et R la répulsion, estimée suivant la normale, qu'exerce un élément m de la masse M sur un élément superficiel de la surface fermée, la somme des forces ΣR, étendue à la masse M et à la surface fermée, est égale à $4\pi M$ ou à zéro, suivant que la masse M est intérieure ou extérieure à la surface fermée.

Les mêmes théorèmes s'appliquent aussi bien aux attractions qu'aux répulsions, à l'attraction universelle qu'à l'électricité distribuée sur les corps conducteurs; la loi de Coulomb, qui régit dans ce cas les forces électriques, a la même forme que la loi de la gravitation universelle.

L'électricité se porte à la surface des corps conducteurs. — Considérons un corps conducteur électrisé, et supposons qu'il existe de l'électricité à l'intérieur du corps. Imaginons une surface fermée S à l'intérieur du conducteur; désignons par M la masse électrique située à l'intérieur de la surface S, par M′ la masse électrique extérieure à cette surface.

En chaque point de la surface S s'exercent des forces répulsives provenant de M et de M′; ces forces se font équilibre; par suite, la somme de leurs projections estimées suivant la normale à la surface est nulle. Désignons par R la résultante des forces répulsives de M estimées suivant la normale; par R′ la résultante des forces répul sives de M′ estimées de la même manière, $R + R' = 0$; par suite, la somme des quantités analogues doit être nulle pour la surface entière,

$$\Sigma R + \Sigma R' = 0.$$

D'après le théorème précédent,

$$\Sigma R = 4\pi M, \quad \Sigma R' = 0;$$

on a donc

$$M = 0.$$

Ainsi il ne peut y avoir d'électricité à l'intérieur d'une surface fermée S tracée à l'intérieur du conducteur; toute l'électricité doit donc se trouver à la surface du conducteur.

Théorie de Poisson. — L'électricité forme donc une couche mince à la surface du conducteur; la condition d'équilibre de cette couche est déterminée de la manière suivante dans la théorie de Poisson.

Si l'on considère une molécule quelconque de fluide neutre à l'intérieur du conducteur, les deux électricités de cette molécule sont sollicitées par des forces égales et contraires provenant des différents points de la couche; par conséquent, il faut, pour l'équilibre, que *la résultante des actions exercées par la couche électrique sur un point quelconque pris à l'intérieur du conducteur soit nulle;* de cette façon, les électricités positive et négative, qui constituent chaque molécule de fluide neutre à l'intérieur du corps, seront en équilibre, et aucune décomposition électrique nouvelle ne pourra se produire à l'intérieur du conducteur.

Théorème de Laplace. — *L'action d'une couche électrique sur un point quelconque de la couche est normale à la surface du conducteur et proportionnelle à l'épaisseur de la couche électrique en ce point.*

On ne connaît pas la démonstration même de Laplace;

elle avait été communiquée par Laplace à Poisson, qui s'exprime ainsi à ce sujet : « On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique que M. Laplace a bien voulu me communiquer, et qui prouve que, à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est partout proportionnelle à son épaisseur (*). » Plus loin, Poisson rapporte la démonstration et termine ainsi : « Cette démonstration est celle que nous avons annoncée au commencement de ce Mémoire, et qui nous a été communiquée par M. Laplace. Nous l'avons rendue un peu plus générale, en considérant d'abord une couche fluide ou solide qui n'était pas assujettie à n'exercer aucune action sur les points de sa surface intérieure (**). » Une autre démonstration du théorème de Laplace a été donnée depuis par Plana (***). On peut démontrer ce théorème par des considérations simples.

Menons en un point M du conducteur une normale à la surface, qui coupe la couche électrique au point M′, à une distance $MM' = e$, infiniment petite d'ailleurs. Imaginons au point M′ un plan perpendiculaire à MM′; ce plan découpe sur la couche un petit segment ayant pour flèche MM′ : nous désignerons, pour abréger, ce segment par s, et le reste du volume de la couche par S.

Le segment s exerce aux points M et M′ des forces répulsives f et f', que nous allons d'abord évaluer.

Pour déterminer f, imaginons un cône infiniment délié ayant son sommet au point M; désignons par ω l'élément

(*) *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*, p. 5; année 1811.

(**) *Loc. cit.*, p. 34.

(***) *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices*, p. 23.

sphérique intercepté par ce cône sur la sphère décrite du point M comme centre avec l'unité pour rayon. Une génératrice du cône rencontre le plan perpendiculaire à MM' en un point A; désignons par α l'angle de cette génératrice avec MM'.

Si l'on décrit du point M comme centre deux sphères ayant pour rayons r et $r + dr$, l'élément intercepté entre ces deux sphères et la surface conique a pour volume $r^2 \omega dr$, et son action répulsive sur le point M est ωdr, de sorte que l'action du cône MA sur le point M est, en posant $\mathrm{AM} = \rho$,

$$\int_0^\rho \omega dr = \omega\rho.$$

Mais cette force se décompose en deux autres : l'une, $\omega\rho \sin\alpha$, tangentielle; l'autre, $\omega\rho\cos\alpha$, normale à la surface. Dans le triangle MAM', $\rho = \frac{e}{\cos\alpha}$; les composantes tangentielle et normale ont pour valeurs respectives $\omega e \tang\alpha$ et ωe. A chaque composante tangentielle correspond une autre force égale et directement opposée, de sorte que la force répulsive au point M est normale à la surface, et a pour valeur, en étendant la somme au segment s,

$$f = \Sigma\omega e = 2\pi e.$$

Pour évaluer f', imaginons de même un cône infiniment délié ayant son sommet au point M; désignons par ω l'ouverture sphérique du cône, par ρ la longueur d'une génératrice M'A' interceptée dans le segment s, par α l'angle de cette génératrice avec MM'.

L'action exercée par le cône sur le point M' est $\omega\rho$; les composantes tangentielle et normale ont pour valeurs $\omega\rho\sin\alpha$, $\omega\rho\cos\alpha$; le triangle MA'M', à la limite, est rectangle, $\rho = \frac{e}{\cos\alpha}$, et, par suite, d'après le raisonnement précédent, la force f' est dirigée suivant MM' et a pour valeur $2\pi e$. La force f' est donc égale et directement opposée à la force f.

Considérons maintenant un point intérieur à la couche électrique et situé sur le prolongement de MM' à une très-petite distance du point M'. La résultante des actions de la couche entière est nulle en ce point, de sorte que la portion S de la couche exerce en ce point une force f_1 égale et directement opposée à f'. L'action exercée par S au point M diffère infiniment peu de f_1 ou de f' en valeur absolue, ou, par conséquent, de f. D'ailleurs le segment s exerce au point M la répulsion f; par conséquent, la couche entière exerce au point M une répulsion normale à la surface et égale à $2f$ ou $4\pi e$.

Les théorèmes précédents s'appliquent à un système quelconque de conducteurs; il en est de même du théorème de Laplace. Dans ce cas, S désigne la somme des volumes des couches électriques à l'exclusion du petit segment s; la démonstration reste la même.

Ainsi, en chaque point d'un conducteur, s'exerce une force répulsive normale à la surface du conducteur et proportionnelle à l'épaisseur de la couche électrique en ce point. L'électricité exerce donc, en chaque point de la surface du conducteur, une pression normale à la surface du conducteur, proportionnelle, d'une part, à la répulsion précédente $4\pi e$, d'autre part, à l'épaisseur de la couche e; cette pression est donc égale à $4\pi e^2$; *elle est proportionnelle au carré de l'épaisseur électrique*. Cette pression est contre-balancée par la résistance qu'oppose le milieu environnant à l'écoulement de l'électricité.

(*A suivre.*)

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir 2^e série, t. XII, p. 529) ;

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

152. En se rappelant les formules du n° 92, chacun verra que l'équipollence de l'ellipse (145) peut s'écrire sous la forme

$$OM \triangleq \frac{OA - \sqrt{}\,OB}{2}\,\varepsilon^t + \frac{OA + \sqrt{}\,OB}{2}\,\varepsilon^{-t},$$

ou, par la construction du n° 149,

$$OM \triangleq \frac{1}{2\sqrt{}}\,OK\,\varepsilon^t + \frac{\sqrt{}}{2}\,OK_1\,\varepsilon^{-t}.$$

Les deux termes du second membre expriment deux mouvements circulaires de rayons $\frac{1}{2}OK$, $\frac{1}{2}OK_1$, exécutés avec des vitesses égales, mais de sens contraires, comme l'indique l'opposition de signe des exposants de ε^t, ε^{-t}; par suite, l'ellipse peut être décrite par la composition de deux mouvements circulaires. Il en résulte qu'elle est une hypocycloïde.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 152.

Étude de l'hyperbole.

En suivant pas à pas l'exposé précédent des propriétés de l'ellipse et en employant la notation si commode des fonctions hyperboliques, il est facile d'établir quelques-unes des principales propriétés de l'hyperbole : c'est ce que nous allons faire rapidement. Le lecteur saisira sans peine dans ce qui va suivre les analogies et les différences entre les deux courbes.

Équipollence de l'hyperbole. — L'hyperbole est exprimée par l'équipollence

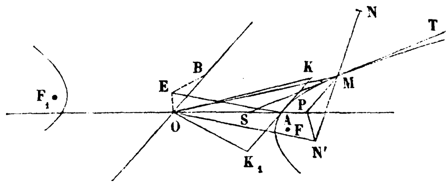
(1) $$OM \triangleq x\,OA + y\,OB \quad (\textit{fig. } 32 \textit{ bis}),$$

x et y, quantités réelles, étant liées par la relation

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{2}$$

ce que l'on peut faire en posant $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$. On voit sans peine que

Fig. 32 *bis*.



OA, OB sont deux demi-diamètres conjugués, et que OB est le demi-diamètre imaginaire.

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Catalan.

Parmi toutes les manières de démontrer la *formule du binôme*, a-t-on remarqué celle-ci?

Soit

$$y = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots, \tag{1}$$

x étant compris entre $+1$ et -1 (exclusivement), de manière que la série soit convergente.

Si l'on prend les dérivées des deux membres, on a

$$y' = m \left[1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^2 + \ldots \right];$$

puis, en multipliant par $1 + x$,

$$(1+x)y' = m \left[\begin{array}{c|c|c} 1 + \dfrac{m-1}{1} & x + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2} & \\ & & x^2 + \ldots \\ + \quad 1 & + \quad \dfrac{m-1}{1} & \end{array} \right];$$

c'est-à-dire, à cause de l'égalité (1),

$$(1+x)y' = my,$$

ou

(2) $$\frac{y'}{y} = m\frac{1}{1-x}.$$

On conclut, de cette équation *caractéristique*,

(3) $$y = (1+x)^m.$$

2. On sait, depuis Dirichlet (?), qu'*il n'est pas toujours permis de grouper, d'une manière arbitraire, les termes d'une série*. L'exemple suivant me parait très-propre à démontrer cette proposition.

Soit

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$
$$- \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$2l2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11}$$
$$- \frac{1}{6} + \frac{2}{13} - \frac{1}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

Si l'on réduit les termes semblables, *il semble* que l'on a

$$2l2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

ou, en *groupant différemment les termes*,

$$2l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

c'est-à-dire $2l2 = l2$!

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1098

(voir 2e série, t. XI, p. 480);

PAR M. C. MOREAU.

La différence entre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *et e est comprise entre* $\frac{e}{2m+1}$ *et* $\frac{e}{2m+2}$, *quel que soit m.*

Il faut démontrer les inégalités

$$(1) \qquad \frac{e}{2m+2} < e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{2m+1};$$

en isolant $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, elles reviennent aux suivantes :

$$(2) \qquad e\frac{2m}{2m+1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e\frac{2m+1}{2m+2}.$$

Supposons d'abord m négatif et plus grand que 1 en valeur absolue, en changeant m en $-m$, les inégalités (2) deviennent

$$e\frac{2m}{2m-1} < \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} < e\frac{2m-1}{2m-2}$$

ou

$$e\frac{1}{1-\frac{1}{2m}} < \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} < e\frac{1-\frac{1}{2m}}{1-\frac{1}{m}},$$

et, en prenant les logarithmes népériens,

$$1 - \log\left(1-\frac{1}{2m}\right) < -m\log\left(1-\frac{1}{m}\right)$$
$$< 1 + \log\left(1-\frac{1}{2m}\right) - \log\left(1-\frac{1}{m}\right).$$

Or, m étant plus grand que 1,

$$\log\left(1-\frac{1}{m}\right) \quad \text{et} \quad \log\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$

sont développables en séries convergentes, et, en réduisant les termes semblables, les inégalités deviennent

$$1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{8m^2}+\ldots+\frac{1}{p\,2^p m^p}+\ldots<1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m^2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{(p+1)m^p}+\ldots<1+\frac{1}{2m}+\frac{3}{8m^2}+\ldots+\frac{2^p-1}{p\,2^p m^p}+\ldots.$$

On voit alors que les deux premiers termes sont les mêmes dans les trois membres, et que les autres vont respectivement en augmentant du premier membre au troisième, si l'on a $p\,2^p > p+1 > \frac{p\,2^p}{2^p-1}$, ce qui, en somme, revient à $p+1 < 2^p$, inégalité toujours vérifiée à partir de $p=2$.

Il résulte donc de là que les inégalités (2) sont vraies pour toutes les valeurs de m comprises entre -1 et $-\infty$.

Faisons-y $m=-1-m'$, m' sera un nombre positif quelconque dans les inégalités suivantes :

$$e^{\frac{2m'+2}{2m'+1}} < \left(1-\frac{1}{m'+1}\right)^{-(m'+1)} < e^{\frac{2m'+1}{2m'}}.$$

Multiplions-les par $\frac{m'}{m'+1}$, il viendra

$$c^{\frac{2m'}{2m'+1}} < \left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'} < e^{\frac{2m'+1}{2m'+2}}.$$

On retrouve ainsi les inégalités (2), qui sont, par suite, démontrées pour toutes les valeurs positives de m.

Il est facile de voir que ces inégalités sont encore vraies pour les valeurs $m = 0$ et $m = -1$; il s'ensuit donc que la question proposée est démontrée pour toutes les valeurs positives, nulles ou négatives de m, excepté pour celles qui sont comprises entre 0 et -1. Cela tient à ce que, pour ces dernières valeurs, la fonction $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est discontinue, passant brusquement du positif au négatif et à l'imaginaire, et qu'on ne peut pas lui assigner des limites variant d'une manière continue.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1118

(voir 2e série, t. XII, p. 384);

PAR M. H. BROCARD.

Sur une droite AB *comme base, on décrit trois triangles isoscèles* ABC, ABC′, ABC″ *dont les hauteurs soient respectivement égales aux produits obtenus en multipliant la moitié de la base par les nombres un, deux, trois : démontrer que la somme des trois angles au sommet de ces triangles est égale à deux droits.*

(LIONNET.)

Désignons par α, β, γ les compléments des trois angles moitiés. On a $\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = 2$, $\tan\gamma = 3$. Le produit de ces trois nombres étant égal à leur somme, les trois angles α, β, γ ont pour total 180 degrés. Il en est donc de même de leurs compléments.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier; Gambey; Lez; Ch. C.; A. Morel; Vannetelle; Beaujeux; Viaud; à la Rochelle; Paul Demarteau, à Klagenfurt en Carinthie; Henrique y Diaz, élève ingénieur à l'Université de Liége; S. Levänen, à Helsingfors; G. D.; L. Cauret, professeur au lycée du Mans; E. Gatti, étudiant à l'Université de Turin;

A. Moreau, ingénieur des Arts et Manufactures; Jardin, professeur au lycée de Brest; L. Goulin, élève du lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; C. V. et E. W., élèves du lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS.

1125. Un tétraèdre, dont les six arêtes sont mesurées par des nombres entiers, ne peut pas avoir parmi ses angles solides un trièdre trirectangle; mais, sur les arêtes d'un tel trièdre, on peut, et d'une infinité de manières, prendre trois longueurs, OA, OB, OC, en nombres entiers, tels que l'aire du triangle ABC soit elle-même mesurée par un nombre entier ainsi que les trois autres faces du tétraèdre résultant OABC.

(Abel Transon.)

1126. Trouver l'enveloppe d'une sphère tangente à une surface du second degré donnée, et coupant orthogonalement une sphère également donnée.

(E. Pellet.)

1127. Lorsqu'un cercle passant par un point fixe F est vu sous un angle constant d'un autre point F′, ce cercle enveloppe un limaçon de Pascal qui a pour foyer double le point F et pour foyer simple le point F′.

(H. Faure.)

1128. Si un nombre premier, P, est égal à la somme de trois carrés, P^2 est généralement égal aussi à la somme de trois carrés; il ne pourrait y avoir exception que si P était décomposable en deux carrés (*). (Catalan.)

(*) Encore n'est-il pas sûr que ce cas d'exception puisse se présenter : le nombre premier $29 = 16 + 9 + 4 = 25 + 4$; néanmoins $29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2$.

SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS

(voir même tome, p. 51);

PAR M. J. MOUTIER.

Surfaces de niveau. — La résultante des forces répulsives exercées en chaque point d'un conducteur étant normale à la surface du conducteur, il en résulte que cette surface est une surface de niveau.

M. Chasles appelle *points, correspondants,* sur deux surfaces de niveau, deux points situés sur une ligne trajectoire orthogonale à toutes ces surfaces, et *éléments superficiels correspondants,* sur deux surfaces de niveau, les éléments compris dans un canal infiniment étroit, dont les arêtes sont toutes des lignes trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau. M. Chasles a établi que les attractions d'un corps sur deux éléments superficiels correspondants sont égales (*); il est aisé de retrouver cette propriété au moyen du théorème qui sert de point de départ à cette étude.

Considérons, en effet, une surface fermée limitée, d'une part, par deux éléments superficiels correspondants, d'autre part, par le canal infiniment étroit considéré tout à l'heure. Soient F et F' les attractions exercées sur les deux éléments correspondants; ces forces sont normales aux éléments. D'ailleurs, les attractions exercées sur les éléments superficiels du canal infiniment étroit sont dirigées suivant les éléments et ne fournissent aucune composante normale à ces éléments. Par conséquent,

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 25e cahier.

d'après le théorème cité,

$$F - F' = 0.$$

Action d'une sphère homogène sur un point extérieur. — On peut déduire des considérations précédentes la loi d'attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur.

Les surfaces de niveau sont alors des sphères concentriques; les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau sont les rayons de la sphère prolongés.

Considérons deux éléments correspondants ω, ω' à des distances du centre de la sphère r et r' :

$$\frac{\omega}{r^2} = \frac{\omega'}{r'^2}.$$

Appelons, comme précédemment, F et F' les attractions exercées sur ces deux éléments; soient, de plus, f et f' les attractions en un point de chacun de ces éléments ou les attractions de la sphère en deux points situés à des distances du centre r et r',

$$F = f\omega, \quad F' = f'\omega'.$$

Puisque $F = F'$,

$$\frac{f}{f'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

Si l'on suppose la distance r' assez grande pour que l'on puisse regarder la distance d'un point situé à la distance r' du centre de la sphère comme égale à la distance de ce point à un point quelconque de la sphère, en appelant M la masse de la sphère,

$$f' = \frac{M}{r'^2}.$$

D'après la relation précédente,

$$f=\frac{M}{r^2}.$$

THÉORÈME. — *Lorsque des conducteurs renferment respectivement des quantités égales des deux fluides, tous ces conducteurs sont à l'état neutre.*

Considérons un élément ω pris sur la surface de l'un des conducteurs, et un élément correspondant ω' situé à une distance suffisamment grande du système de conducteurs, pour que l'on puisse considérer un point de cet élément comme étant à la même distance de toutes les molécules électrisées. L'action exercée sur l'élément ω' est nulle; il en est de même de l'action exercée sur ω, d'après un théorème précédent; par conséquent, l'épaisseur électrique est nulle en chaque point de l'élément ω, et, par suite, dans toute l'étendue du conducteur.

Ce théorème a été établi d'abord par Gauss dans le cas d'un conducteur unique, puis par M. Liouville dans le cas d'un système quelconque de conducteurs, au moyen de considérations différentes (*).

THÉORÈME. — *La distribution électrique ne peut avoir lieu que d'une seule manière à la surface des conducteurs.*

Supposons, en effet, une quantité d'électricité en équilibre sur un conducteur; soit e l'épaisseur électrique en un point M du conducteur. Supposons que la même quantité d'électricité puisse être distribuée d'une autre manière sur le conducteur; soit e' la nouvelle épaisseur électrique au point M.

Considérons cette seconde distribution : l'équilibre

(*) *Additions à la Connaissance des temps*, p. 34; 1845.

subsistera si l'on change le signe de l'électricité en chaque point de chaque conducteur. Superposons ce dernier état d'équilibre au premier; nous aurons un nouvel état d'équilibre auquel correspond l'épaisseur électrique $e - e'$ au point M. Mais tous les conducteurs renferment alors des quantités égales des deux fluides; d'après le théorème précédent, les conducteurs sont à l'état naturel, et, en chaque point M,

$$e - e' = 0.$$

Théorème. — *La distribution électrique est indépendante de la quantité d'électricité.*

Supposons un système de conducteurs électrisés en équilibre; si l'on multiplie l'épaisseur électrique en chaque point par une quantité constante, on obtient une nouvelle couche qui n'exerce aucune action sur les points intérieurs de chaque conducteur; cette couche est donc une couche électrique en équilibre. Mais, d'après le théorème précédent, la distribution de la nouvelle quantité d'électricité ne peut avoir lieu que d'une seule manière; de sorte que, si les conducteurs électrisés renferment des quantités inégales d'électricité, il existe nécessairement un rapport constant entre les épaisseurs électriques en chaque point des conducteurs.

Théorème. — *La quantité d'électricité induite sur un conducteur qui enveloppe de toutes parts le corps inducteur est égale à la quantité d'électricité du corps inducteur.*

Considérons un corps inducteur A enveloppé de toutes parts par un corps conducteur soumis à l'induction de A; soient a la charge de l'inducteur, b la charge de nom contraire induite sur la surface intérieure B du conducteur, c la charge induite sur la surface extérieure C de ce conducteur.

Imaginons une surface fermée à l'intérieur du conducteur BC, qui enveloppe la surface intérieure B. Un point pris sur cette surface est soumis aux actions des électricités a, b et c; les trois forces correspondantes se font mutuellement équilibre; par suite, les composantes de ces forces, estimées suivant la normale à la surface, ont une somme algébrique nulle. Il en est de même pour tous les points de la surface fermée; par suite, la somme algébrique des actions de a, b et c, estimées suivant les normales, est nulle. La partie de cette somme relative à a est $4\pi a$, d'après le premier théorème; la portion de la somme relative à b est $-4\pi b$; la partie de la somme relative à c est nulle; d'après le même théorème, donc

$$a = b.$$

La quantité d'électricité induite b est donc égale à la quantité d'électricité a de l'inducteur, résultat conforme aux expériences de Faraday.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION
suivant les puissances ascendantes, entières et positives d'une autre fonction.
Série de Taylor. — Série de Lagrange.

PAR M. A. PICART.

On sait que, si $F(z)$ est une fonction synectique, c'est-à-dire continue et bien déterminée dans une certaine portion du plan, l'intégrale $\int F(z)dz$, prise tout le long d'un contour fermé C intérieur à cette région, est égale à zéro.

Cela posé, considérons l'expression $\dfrac{f(Z)-f(z)}{\varphi(Z)-\varphi(z)}$, où $f(Z)$ et $\varphi(Z)$ sont des fonctions synectiques de Z dans une certaine aire A, z désignant la valeur de Z qui correspond à un point O situé dans cette aire. Si $\varphi(Z)$ ne peut être égal à $\varphi(z)$ que pour $Z = z$, et si la dérivée $\varphi'(Z)$ ne s'annule pour aucun point de l'aire, il est évident que cette expression est une fonction synectique de Z, et l'on a

$$\int \frac{f(Z) - f(z)}{\varphi(Z) - \varphi(z)} dZ = 0,$$

cette intégrale étant prise tout le long d'un contour C intérieur à l'aire, ou

$$f(z) \int \frac{dZ}{\varphi(Z) - \varphi(z)} = \int \frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z) - \varphi(z)}.$$

Mais $\dfrac{1}{\varphi(Z) - \varphi(z)} = \dfrac{1}{\varphi'(z)} \dfrac{1}{Z - z} + \psi(Z)$ (*), $\psi(Z)$ désignant une fonction de Z synectique dans toute l'étendue de l'aire; donc

$$f(z) \int \frac{dZ}{\varphi(Z) - \varphi(z)} = \frac{f(z)}{\varphi'(z)} \int \frac{dZ}{Z - z}.$$

Or on sait que l'intégrale, prise tout le long d'un contour, ne change pas de valeur quand le contour se déforme sans franchir aucun point pour lequel la différentielle devienne infinie ou acquière des valeurs égales; donc l'intégrale $\displaystyle\int \frac{dZ}{Z - z}$ est égale à l'intégrale prise tout le long d'une circonférence de centre O, c'est-à-dire à

$$\int_0^{2\pi} \frac{r i e^{\theta i}\, d\theta}{r e^{\theta i}}, \quad \text{ou} \quad \int_0^{2\pi} i\, d\theta, \quad \text{ou} \quad 2\pi i;$$

donc

$$f(z) \int \frac{dZ}{\varphi(Z) - \varphi(z)} = \frac{f(z)}{\varphi'(z)} 2\pi i.$$

(*) Cette formule n'est démontrée que pour une fonction entière $\varphi(z)$; mais, comme la série de Taylor s'ensuit pour une fonction synectique, il est facile de l'étendre à une pareille fonction.

D'autre part, si l'on suppose que le long du contour C le module de $\varphi(Z)$ soit plus grand que celui de $\varphi(z)$, l'expression $\frac{1}{\varphi(Z)-\varphi(z)}$ pouvant se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{\varphi(z)}{\varphi(Z)}$, savoir :

$$\frac{1}{\varphi(Z)}+\frac{\varphi(z)}{\varphi^2(Z)}+\frac{\varphi^2(z)}{\varphi^3(Z)}+\ldots+\frac{\varphi^n(z)}{\varphi^{n+1}(Z)}+\ldots,$$

on a

$$\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)-\varphi(z)}=\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}+\varphi(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}+\varphi^2(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}+\ldots+\varphi^n(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^{n+1}(Z)}+\ldots;$$

donc, enfin,

$$f(z)=\frac{\varphi'(z)}{2\pi i}\left[\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}+\varphi(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}+\varphi^2(z)\int\frac{f(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}+\ldots\right].$$

Et, si l'on désigne par $F(z)$ la fonction (à une constante près) qui a pour dérivée $f(z)$, on a, en intégrant,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}F(z)=K+\frac{1}{2\pi i}\Bigg[\varphi(z)\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi(Z)}&+\frac{\varphi^2(z)}{2}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^2(Z)}\\&+\frac{\varphi^3(z)}{3}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^3(Z)}+\ldots\\&+\frac{\varphi^n(z)}{n}\int\frac{F'(Z)\,dZ}{\varphi^n(Z)}+\ldots\Bigg],\end{aligned}\right.$$

K étant une constante.

Ainsi, si, dans l'intérieur d'un contour C, le module de la fonction synectique $\varphi(z)$ est inférieur au plus petit module que prend cette fonction sur la ciconférence du contour; et si, de plus, $\varphi(z)$ ne peut pas prendre la même valeur pour deux points différents de l'intérieur du contour, et que la dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans cette portion de plan; la fonction $F(z)$, synectique dans cette étendue, peut se développer suivant les puissances ascendantes, entières et positives de $\varphi(z)$, pour toutes les valeurs de z intérieures au contour. Et, si l'on suppose que $\varphi(z)$ ne s'annule que pour une valeur a de z correspondant à un point O de l'intérieur du contour, on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(z) = F(a) + \frac{1}{2\pi i}\Big[& \varphi(z)\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi(z)} \\ & + \frac{\varphi^2(z)}{2}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^2(z)} \\ & + \frac{\varphi^3(z)}{3}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^3(z)} + \ldots \\ & + \frac{\varphi^n(z)}{n}\int\frac{F'(z)\,dz}{\varphi^n(z)} + \ldots\Big]. \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule générale qui donne le développement d'une fonction $F(z)$, suivant les puissances ascendantes d'une autre fonction $\varphi(z)$.

Supposons que $\varphi(z) = z - a$, alors la formule devient

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} F(z) = F(a) + \frac{1}{2\pi i}\Big[& (z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{z-a} \\ & + \frac{(z-a)^2}{2}\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots \\ & + \frac{(z-a)^n}{n}\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n} + \ldots\Big]. \end{aligned} \right.$$

Ici, comme le module de $z-a$, qui est constant sur une circonférence de centre O, va constamment croissant avec le rayon de ce cercle, on voit que le développement a lieu pour toutes les valeurs de z correspondant aux points de l'intérieur de la circonférence de centre O au delà de laquelle la fonction F (z) cesse d'être synectique.

On sait que, lorsqu'une série, qui procède suivant les puissances ascendantes entières d'une variable, est convergente, la série des dérivées de ses différents termes est aussi convergente et a pour somme la dérivée de la somme de la première série; donc on a

$$\begin{aligned}
F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[& \int \frac{F'(z)\,dz}{z-a} + (z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2} \\
& + (z-a)^2 \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} + \ldots \\
& + (z-a)^n \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F''(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[& \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2} + 2(z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} \\
& + 3(z-a)^2 \int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4} + \ldots \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'''(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[& 2\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3} \\
& + 2.3(z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4} + \ldots \Big],
\end{aligned}$$

. . . .,

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[& 2.3.4\ldots(n-1)\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n} \\
& + 2.3\ldots n(z-a)\int\frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots \Big];
\end{aligned}$$

d'où

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
F'(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(z)\,dz}{z-a},\\
F''(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^2},\\
F'''(a) &= \frac{2}{2\pi i}\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^3},\\
F^{\text{IV}}(a) &= \frac{2.3}{2\pi i}\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F^{(n)}(a) &= \frac{2.3\ldots(n-1)}{2\pi i}\int \frac{F'(z)\,dz}{(z-a)^n}.
\end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule, si l'on pose $F'(z) = f(z)$, peut s'écrire

$$f^n(a) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui enveloppe le point O, et dans l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ est synectique. Si ce contour est une circonférence de centre O et de rayon r, on peut la mettre sous la forme

$$f^n(a) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

M désignant la valeur maximum que prend le module de $f(z)$ sur la circonférence, le module de l'intégrale est moindre que $\int_0^{2\pi} M\,d\theta$, c'est-à-dire que $2\pi M$; et, par suite, le module de $f^n(a)$ est moindre que

$$1.2.3\ldots n\frac{M}{r^n}.$$

Cette remarque nous sera utile plus loin.

Remplaçant dans la formule (3) toutes les intégrales définies par leurs valeurs (4), on obtient la série de Taylor

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) &= F(a) + (z-a)F'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2}F''(a) \\ &+ \frac{(z-a)^3}{1.2.3}F'''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(a) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Supposons, en second lieu, que la fonction $\varphi(z)$ soit égale à $\frac{z-a}{\psi(z)}$, et désignons cette quantité par x. La formule générale (2) devient dans ce cas

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) = F(a) + \frac{1}{2\pi i}\Bigg[& x\int\frac{F'(z)\psi(z)\,dz}{z-a} \\ & + \frac{x^2}{2}\int\frac{F'(z)\psi^2(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots \\ & + \frac{x^n}{n}\int\frac{F'(z)\psi^n(z)\,dz}{(z-a)^n} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Mais nous venons de voir que généralement

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\chi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{\chi^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n},$$

$\chi(z)$ désignant une fonction synectique de z dans l'intérieur du contour C; donc le développement précédent peut s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) &= F(a) + xF'(a)\psi(a) + \frac{x^2}{1.2}D_a[F'(a)\psi^2(a)] \\ &+ \frac{x^3}{1.2.3}D_{a^2}^2[F'(a)\psi^3(a)] + \ldots \\ &+ \frac{x^n}{1.2\ldots n}D_{a^{n-1}}^{n-1}[F'(a)\psi^n(a)] + \ldots. \end{aligned}\right.$$

C'est la formule de Lagrange qui exprime une fonction $F(z)$ de l'une des racines de l'équation $\frac{z-a}{\psi(z)} = x$, ou $z = a + x\psi(z)$, en série procédant suivant les puissances ascendantes de x.

Mais reportons-nous aux conditions générales qui doivent être remplies pour qu'une fonction $F(z)$ soit développable suivant les puissances d'une autre fonction $\varphi(z)$, pour toutes les valeurs de z qui correspondent à l'intérieur d'un certain contour C. Il faut que, dans toute l'étendue de l'aire embrassée par ce contour, le module de $\varphi(z)$ soit moindre que sur le périmètre de ce contour; de plus, que $\varphi(z)$ ne puisse prendre la même valeur pour deux points différents de cette aire, et que $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans l'intérieur du contour. Or, ici, la fonction $\varphi(z)$ est $\frac{z-a}{\psi(z)}$; pour $z = a$, elle s'annule [on suppose $\psi(a)$ différent de zéro]. Si l'on pose $z = a + re^{\theta i}$, le module de $\frac{z-a}{\psi(z)}$ ou de $\frac{re^{\theta i}}{\psi(a + re^{\theta i})}$ sera une fonction de r et de θ de la forme $\frac{r}{\varpi(r, \theta)}$ [$\varpi(r, \theta)$ ne s'annulant ni ne devenant infini pour $r = 0$]. En l'égalant à une constante positive m, on aura le lieu des points pour lesquels la fonction $\varphi(z)$ prend le même module m. Pour des valeurs suffisamment petites de m, on voit aisément que l'une des branches de cette courbe devra se réduire à un contour fermé s, dans l'intérieur duquel se trouve le point O. La fonction $\varphi(z)$ étant supposée uniforme (c'est-à-dire susceptible d'une seule valeur), si m croît à partir de zéro, le contour fermé s, qui, pour $m = 0$, se réduit au point O, va toujours en s'élargissant par degrés insensibles jusqu'à ce que m ait atteint une certaine valeur μ pour laquelle ce contour isolé se réunit à une autre branche de la courbe pour s'ouvrir ensuite. Le contour correspondant à cette valeur μ est alors la limite C de l'aire dans l'intérieur de laquelle le module de $\varphi(z)$ est moindre que sur le périmètre. Mais quelle est cette valeur μ de m? Imaginons en chaque point du plan, qui a pour coordonnées r et θ, une perpendiculaire dont la longueur représente la valeur du module correspondant de $\varphi(z)$. Le lieu des extrémités de ces perpendiculaires est une certaine surface qui représente la variation du module. Les courbes de module constant dont il vient d'être question sont les projections des courbes de niveau de cette surface. La courbe limite C qui s'accole à une autre branche, c'est-à-dire qui acquiert un point multiple, est donc la projection d'une courbe de niveau située dans un plan tangent; et l'ordonnée du point de contact, ou la valeur correspondante du module, jouit de la propriété du maximum, savoir, que les dérivées partielles relatives à r et θ sont toutes deux nulles. Seulement ce n'est pas un maximum proprement dit, c'est ce qu'on peut appeler un maximum minimorum.

Le maximum minimorum d'une fonction de deux variables est la plus grande des valeurs minima que prend la fonction lorsque, l'une des variables restant fixe, l'autre varie. Or le module de $\varphi(z)$ est une fonction de r et de θ, savoir $\chi(r, \theta)$; la valeur maximum minimorum de ce module s'obtiendra donc en cherchant le minimum de $\chi(r, \theta)$ quand θ varie seul : c'est une certaine fonction $\lambda(r)$; puis en cherchant le maximum de cette fonction $\lambda(r)$.

Il faut bien distinguer le maximum d'une fonction du maximum minimorum. Ce qui caractérise le maximum ou le minimum proprement dit, c'est, si l'on représente la fonction de deux variables par une surface, que le plan tangent au point dont l'ordonnée est maximum ou minimum laisse autour de ce point la surface d'un même côté, tandis que, pour le maximum minimorum, le plan tangent coupe la surface en ce point.

Mais on sait que, toutes les fois que le module d'une fonction $\varphi(z)$ passe par un maximum ou un minimum, la dérivée $\varphi'(z)$ s'annule; donc μ est le plus petit des modules de $\varphi(z)$ qui correspondent aux diverses racines de $\varphi'(z) = 0$. Le contour C, dans l'intérieur duquel le module de $\varphi(z)$ est moindre qu'à la périphérie, est donc défini par l'équation

$$\text{mod.} \frac{z-a}{\psi(z)} = \mu.$$

Dans toute l'étendue de l'aire limitée par cette courbe, $\varphi'(z)$ est, d'après ce qui vient d'être dit, différent de zéro. De plus, la fonction $\varphi(z)$ ne peut prendre dans cette étendue la même valeur pour deux valeurs différentes de z; car, s'il en était ainsi, il faudrait que l'on eût

$$\frac{z-a}{\psi(z)} = \frac{z_1 - a}{\psi(z_1)} = x,$$

le module de x étant inférieur à μ, c'est-à-dire que l'équation $z = a + x\psi(z)$ devrait avoir deux racines z et z_1 dans l'intérieur du contour C.

Or, si l'on désigne généralement par $a, b, c, \ldots, l$ les racines d'une équation $F(x) = 0$ comprises dans un contour C, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ leur ordre respectif de multiplicité, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{F'(x)\,dx}{F(x)} \quad \text{ou} \quad \int \frac{d \log F(x)}{dx}\,dx,$$

prise tout le long du contour C, est égale à

$$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda)\, 2\pi i,$$

comme on le démontre aisément en mettant la fraction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \ldots + \frac{\lambda}{x-l} + \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}$$

et prenant les intégrales des différents termes. On obtient ainsi, en effet,

$$2\pi i(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda),$$

car, la fonction $\frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}$ étant synectique dans l'intérieur du contour, on a $\int \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)} dx = 0$. Pour connaître le nombre des racines de l'équation $z = a + x\psi(z)$ comprises dans le contour C, il faut donc trouver la valeur de l'intégrale $\int \frac{d \log[z - a - x\psi(z)]}{dz} dz$. Mais

$$\log[z - a - x\psi(z)] = \log(z-a) + \log\left(1 - \frac{x\psi(z)}{z-a}\right);$$

d'ailleurs, sur le contour C, le module de $\frac{\psi(z)}{z-a}$ est $\frac{1}{\mu}$, et, comme le module de x est plus petit que μ, le module de $\frac{x\psi(z)}{z-a}$ est plus petit que l'unité; on peut donc écrire

$$\log[z - a - x\psi(z)]$$
$$= \log(z-a) - \frac{x\psi(z)}{z-a} - \frac{1}{2}\frac{x^2\psi^2(z)}{(z-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3\psi^3(z)}{(z-a)^3} - \ldots.$$

Mais $\psi(z)$ étant supposé synectique dans l'intérieur et sur le périmètre du contour C, $\psi(z)$ peut se développer en série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de $z-a$; donc $\log[z - a - x\psi(z)]$ est égal à $\log(z-a)$, plus une série convergente procédant suivant les puissances entières, positives et négatives, de $z-a$. Si nous prenons la dérivée de cette fonction, nous aurons $\frac{1}{z-a}$, plus une série de termes qui ne renferment pas la première puissance de $\frac{1}{z-a}$; donc

$$\int \frac{d \log[z - a - x\psi(z)]}{dz} dz = \int \frac{dz}{z-a} + \sum \int \frac{A_p\, dz}{(z-a)^p}.$$

Or

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \quad \int \frac{A_p\, dz}{(z-a)^p} = \frac{i A_p}{r^{p-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(p-1)\theta i}\, d\theta = 0,$$

puisque p est différent de l'unité; donc, enfin,

$$2\pi i(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda) = 2\pi i,$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = 1,$$

c'est-à-dire que l'équation $z - a - x\psi(z) = 0$, quand le module de x est inférieur à μ, n'a qu'une racine comprise dans l'intérieur de la courbe C.

De cette discussion, nous pouvons conclure que la série de Lagrange (8) a lieu pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur au plus petit μ des modules de $\frac{z-a}{\psi(z)}$ qui correspondent aux racines de l'équation

$$(z-a)\psi'(z) - \psi(z) = 0,$$

ou au plus petit μ des modules de α qui satisfont aux équations simultanées

$$(z-a)\psi'(z) - \psi(z) = 0,$$
$$1 - \alpha\psi'(z) = 0,$$

et qu'elle fournit le développement relatif à la racine z de l'équation $z = a + x\psi(z)$ qui est comprise, à l'exclusion des autres, dans l'intérieur du contour fermé C défini par l'équation

$$\text{mod.}\, \frac{z-a}{\psi(z)} = \mu.$$

On peut donc dire que c'est la racine de plus petit module.

Du reste, on peut reconnaître que la série (8) est convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur au maximum des modules minima qu'acquiert la fonction $\frac{z-a}{\psi(z)}$ sur chacune des circonférences concentriques qui ont leur centre en O; car le module du terme général $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} D_{a^{n-1}}^{n-1} [F'(a)\psi^n(a)]$ est, d'après une formule démontrée ci-dessus, moindre que

$$\frac{\rho^n}{1.2\ldots n} 1.2.3\ldots(n-1)\frac{\mu m^n}{r^{n-1}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\mu r}{n}\left(\frac{\rho m}{r}\right)^n,$$

ρ désignant le module de x, μ et m les modules maxima de $F'(z)$ et de $\psi(z)$ sur la circonférence de rayon r décrite du point O comme centre; et, par suite, la série est convergente si $\frac{\rho m}{r} < 1$, ou $\rho < \frac{r}{m}$. La plus grande valeur de $\frac{r}{m}$ donnera donc la limite supérieure que ne devra pas dépasser ρ, c'est-à-dire le module de x, pour qu'on soit assuré de la convergence de la série (8).

Telles sont les conditions auxquelles a lieu la série de Lagrange. Il me semble que jusqu'ici ces conditions n'avaient pas encore été établies avec le même degré de précision. En appliquant la série de Maclaurin au développement de la fonction $F(z)$ suivant les puissances ascendantes, entières et positives de x, et invoquant le théorème célèbre de Cauchy relatif à ce développement, on limitait le cercle de convergence de la série à la valeur de x de plus petit module pour laquelle l'équation a une racine double. Mais pourquoi la valeur de plus petit module? car généralement la convergence de la série de Maclaurin est limitée à la valeur de la variable pour laquelle la valeur de la fonction à détermination multiple, que l'on développe, devient infinie ou égale à une autre valeur de cette fonction, et cette valeur de la variable n'est pas nécessairement, comme vient de le démontrer

M. Maximilien Marie, celle qui a le plus petit module parmi les valeurs qui rendent la fonction ou sa dérivée infinie.

Par une méthode empruntée comme la nôtre à Cauchy, mais qui substitue aux intégrales définies prises le long d'un contour la considération équivalente des résidus, c'est-à-dire du coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement convergent suivant les puissances de $z-a$ d'une fonction qui devient infinie pour $z=a$, M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII) a montré que le développement s'applique à la racine de plus petit module de l'équation, et qu'il a lieu pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à l'inverse du module minimum de $\frac{\psi(z)}{z-a}$; c'est bien là la limite que nous avons trouvée. Il fait remarquer ensuite que ce module minimum correspond à l'une des valeurs de z fournies par l'équation

$$z=a+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)};$$

mais il ne s'attache pas à démontrer que cette valeur de z est, parmi toutes les racines de cette équation, celle qui fait prendre à la quantité x, dans l'équation $1-x\psi'(z)=0$, le plus petit module : il se borne à l'énoncer. Malgré cette petite lacune, le travail de M. Rouché a été considéré jusqu'alors comme le dernier mot sur la question; et, en effet, la considération du module minimum maximorum de $\frac{\psi(z)}{z-a}$, dont l'inverse lui donne la valeur limite de x, est préférable à la recherche directe du plus petit module de α satisfaisant aux équations

$$z=a+\frac{\psi(z)}{\psi'(z)},\quad 1-\alpha\psi'(z)=0.$$

Cependant, en examinant de près la méthode qu'il a suivie, on voit qu'elle suppose déjà connu le théorème de Cauchy relatif au développement d'une fonction suivant les puissances entières, positives ou négatives de la variable, tandis que celle que nous proposons ici se suffit à elle-même, et donne en même temps, par la même analyse, le théorème de Cauchy et celui de Lagrange.

SUR L'INTÉGRALE $\int \cos^{2m+1} x\,dx$;

PAR M. S. REALIS.

---

1. Dans les Traités de Calcul intégral se trouve rapportée, d'après Euler, la formule

$$\begin{aligned}
&\int \cos^{2m+1} x\,dx \\
&= \frac{\sin x}{2m+1}\left[\cos^{2m} x \frac{2m}{2m-1}\cos^{2m-2} x\right. \\
&\qquad + \frac{2m(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)}\cos^{2m-4} x + \ldots \\
&\qquad \left. + \frac{2m(2m-2)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 5.3.1}\right] + \text{const.},
\end{aligned}$$

et la formule analogue relative à $\int \sin^{2m+1} x\,dx$, pour m entier et positif.

Mais ce que les auteurs négligent de signaler, du moins d'une manière explicite, c'est la forme simple et mnémonique que prend le second membre de la formule ci-dessus lorsqu'on en fait disparaître les cosinus, en y changeant $\cos^2 x$ en $1 - \sin^2 x$. On trouve en effet, abstraction faite

6.

de la constante introduite par l'intégration,

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin^3 x}{3},$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5},$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 3\frac{\sin^3 x}{3} + 3\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7},$$

$$\int \cos^9 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 4\frac{\sin^3 x}{3} + 6\frac{\sin^5 x}{5} - 4\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on voit apparaître les coefficients binômiaux, et d'où l'on peut conclure, par une induction sûre,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \cos^{2m+1} x\,dx = {} & \frac{\sin x}{1} - m\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{\sin^5 x}{5} \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\frac{\sin^7 x}{7} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et aussi, par conséquent,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^{2m+1} x\,dx = {} & -\frac{\cos x}{1} + m\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{m(m-1)}{2}\frac{\cos^5 x}{5} \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,3}\frac{\cos^7 x}{7} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Mais une remarque qu'il importe d'ajouter, c'est que les formules (1) et (2), construites ici dans l'hypothèse de m entier et positif, ont lieu, en réalité, pour toute valeur positive ou négative de m.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à développer en série l'intégrale $\int \cos^{2m+1} x\,dx$, après l'avoir mise sous la forme $\int (1 - \sin^2 x)^m d\sin x$. On obtient en effet, après la réduction de $(1 - \sin^2 x)^m$ en série et l'intégration,

$$\int (1 - \sin^2 x)^m \, d\sin x$$
$$= \frac{\sin x}{1} - m\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{\sin^5 x}{5} - \ldots,$$

quel que soit l'exposant réel m, et en admettant que la fonction $\sin x$ reste comprise entre les limites -1 et $+1$.

Le second membre de cette équation, auquel on peut ajouter une constante arbitraire, tant que l'intégrale reste indéfinie, est une expression finie dans le cas de m entier et positif, et présente, dans les autres cas, une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $\sin x$.

Pour $\sin x = \pm 1$, la série qu'on vient d'écrire continue d'être convergente si $m > -1$, et, en ce cas, elle convient encore à l'intégrale considérée. Si l'on a $m \leqq -1$, la série n'a pas de limite finie pour $\sin x = \pm 1$; cependant, comme alors l'intégrale devient infinie en même temps que la série, l'équation peut encore être regardée comme donnant un résultat exact.

D'après cela, la formule (1) subsiste, quel que soit le nombre m, et pour toutes les valeurs de $\sin x$ qui ne dépassent pas les limites -1 et $+1$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de l'arc x.

Cette conclusion se rapporte au cas de l'intégrale indéfinie. A l'égard des intégrales définies, il sera facile de voir que l'intégration doit être effectuée dans une étendue où la fonction $\cos x$ ne change pas de signe. Sans cette condition, l'application immédiate de la formule (1) par la substitution des limites de x n'aurait lieu, d'une manière générale, que pour les valeurs positives de $2m + 1$.

Quant à la formule (2), elle n'est qu'une transformée de (1), ces deux formules se déduisant l'une de l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$.

2. Soit fait, comme application de ce qui précède, $m = -\frac{1}{2}$, ou $2m + 1 = 0$, et ajoutons la condition que l'intégrale (1) s'annule pour $x = 0$. La constante de l'intégration sera nulle, la valeur de l'intégrale ne sera autre chose que x, et l'on aura, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 x}{7} + \ldots,$$

formule bien connue.

Soit encore $m = -\frac{3}{2}$, ou $2m + 1 = -2$, et supposons de même que l'intégrale et la variable s'annulent ensemble. Le premier membre de la formule (1) sera

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x,$$

et l'on aura ainsi

$$\operatorname{tang} x = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^7 x + \ldots,$$

pour tous les arcs x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et même pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui est exact.

Prenons, pour dernier exemple, $m = -1$, c'est-à-dire $2m + 1 = -1$, et appliquons la formule (2). Nous obtiendrons, en intégrant entre les limites x et $\frac{\pi}{2}$, et faisant attention que

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \log\cot\frac{2}{x},$$

l'égalité

$$\log \cot \frac{x}{2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + \ldots,$$

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$. Ce résultat nous représente, sous une forme spéciale, une série logarithmique d'Euler.

3. Le second membre de la formule (1), en y mettant en évidence le facteur commun $\sin x$, puis remplaçant dans le développement chaque terme $\sin^{2k} x$ par $(1 - \cos^2 x)^k$, peut être mis sous la forme

$$\sin x \,(A_1 + A_2 \cos^2 x + A_3 \cos^4 x + A_4 \cos^6 x + \ldots).$$

Dans le cas de m entier et positif, et en supprimant la constante introduite par l'intégration, il devra y avoir identité entre cette expression et le second membre de la formule d'Euler, rappelée au commencement de cet article. Après avoir divisé ces deux expressions par le facteur commun $\sin x$, on pourra donc égaler entre eux les coefficients des mêmes puissances de $\cos x$, et l'on amènera par là des relations d'identité qu'il peut être utile de connaître.

Il vient, par exemple, en égalant de part et d'autre les termes indépendants de $\cos x$,

$$1 - \frac{1}{3} m + \frac{1}{5} \frac{m(m-1)}{2} - \frac{1}{7} \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots \pm \frac{1}{2m+1}$$
$$= \frac{1}{2m+1} \frac{2m(2m-2)(2m-4)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3.1},$$

à partir de $m = 1$; ce résultat s'obtient aussi en comparant les expressions de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\, dx$ fournies par les deux formules que nous considérons.

La comparaison des coefficients de $\cos^2 x$ donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3} - \frac{1}{5}(m-1) + \frac{1}{7}\frac{(m-1)(m-2)}{2} \\
&\quad - \frac{1}{9}\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3} + \ldots \mp \frac{1}{2m+1} \\
&= \frac{1}{2m+1}\frac{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 7.5.3},
\end{aligned}
$$

à partir de $m = 2$.

On trouve de même, d'après les coefficients de $\cos^4 x$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{5} - \frac{1}{7}(m-2) + \frac{1}{9}\frac{(m-2)(m-3)}{2} \\
&\quad - \frac{1}{11}\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3} + \ldots \pm \frac{1}{2m+1} \\
&= \frac{1}{2m+1}\frac{(2m-4)(2m-6)(2m-8)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 9.7.5},
\end{aligned}
$$

à partir de $m = 3$.

Et ainsi de suite. Ces relations ont de l'analogie avec celles qui font l'objet des questions 1079 et 1080, proposées par M. Haton de la Goupillière, et résolues par M. Moret-Blanc et par d'autres (*voir* 2e série, t. XI, p. 192, 519 et 520).

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1873.

Étant donnés une ellipse A *et un point* P *dans son plan, de ce point* P *on mène des normales à l'ellipse* A *et l'on considère la conique* B *qui passe par le point* P *et les pieds des quatre normales :*

1° *Trouver les coordonnées des centres de cette conique* B *et celles de ses foyers ;*

2° *Trouver le lieu* C *du centre et le lieu* D *des foyers de la conique* B, *lorsque l'ellipse* A *varie de manière que ses foyers restent fixes ;*

3° *Trouver le lieu des points d'intersection du lieu* D *et de la droite* OP, *lorsque le point* P *décrit un cercle de rayon donné* R^2, *et ayant pour centre le centre* O *de l'ellipse* A.

1° Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse A et

$$x=\alpha,\quad y=\beta$$

celles du point P. On sait que la conique B a pour équation

$$c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0,$$

et que, l'équation générale d'une conique étant

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

les coordonnées du centre satisfont aux équations

$$(1)\qquad \tfrac{1}{2}f'_x=0,\quad \tfrac{1}{2}f'_y=0,$$

et celles des foyers aux suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}f'_x)^2-(\tfrac{1}{2}f'_y)^2&=(A-C)f,\\ (\tfrac{1}{2}f'_x)(\tfrac{1}{2}f'_y)&=Bf.\end{aligned}\right.$$

En appliquant les formules (1), on trouve, pour déterminer le centre,

$$c^2y+b^2\beta=0,\quad c^2x-a^2\alpha=0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \quad y = \frac{b^2\beta}{c^2}.$$

En appliquant les formules (2), on trouve, pour déterminer les foyers,

$$(c^2y + b^2\beta)^2 - (c^2x - a^2\alpha)^2 = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) = 2c^2(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y),$$

ou

$$(c^2y + b^2\beta)^2 - (c^2x - a^2\alpha)^2 = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0.$$

Ces équations se décomposent en les deux systèmes suivants :

$$(c^2y + b^2\beta) + (c^2x - a^2\alpha) = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0,$$

et

$$(c^2y + b^2\beta) - (c^2x - a^2\alpha) = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0.$$

On tire du premier

$$x_1 = \frac{a^2\alpha + ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_1 = \frac{-b^2\beta - ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2},$$

$$x_2 = \frac{a^2\alpha - ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_2 = \frac{-b^2\beta + ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2},$$

et du second

$$x_3 = \frac{a^2\alpha + ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_3 = \frac{-b^2\beta + ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2},$$

$$x_4 = \frac{a^2\alpha - ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_4 = \frac{-b^2\beta - ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}.$$

2° Pour avoir le lieu C du centre, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$c^2y + b^2\beta = 0, \quad c^2x - a^2\alpha = 0, \quad a^2 = b^2 + c^2;$$

il vient

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1,$$

équation d'une droite facile à construire.

Pour avoir le lieu D des foyers, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$(c^2y+b^2\beta)+(c^2x-a^2\alpha)=0,$$

$$(c^2y+b^2\beta)(c^2x-a^2\alpha)+2a^2b^2\alpha\beta=0, \quad a^2=b^2+c^2;$$

il vient

$$2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\beta}-1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2.$$

En éliminant de même a^2 et b^2 entre les équations

$$(c^2y+b^2\beta)-(c^2x-a^2\alpha)=0,$$

$$(c^2y+b^2\beta)(c^2x-a^2\alpha)+2a^2b^2\alpha\beta=0, \quad a^2=b^2+c^2,$$

il viendrait

$$-2\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}-\frac{y}{\beta}+1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2,$$

équations de coniques faciles à construire.

3° Pour obtenir le dernier lieu, il faut éliminer α et β entre les équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}, \quad \alpha^2+\beta^2=R^2,$$

$$2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\beta}-1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2.$$

On tire des deux premières

$$\alpha=\frac{Rx}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \beta=\frac{Ry}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

et, en portant dans la dernière, il vient

$$2(x^2+y^2)^2\mp 2R(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+R^2xy=0.$$

Passons aux coordonnées polaires, on a

$$4\rho^2 \mp 4R\rho + R^2 \sin 2\omega = 0,$$

ou

$$(2\rho \mp R)^2 = R^2 (\sin\omega - \cos\omega)^2,$$

ce qui donne les courbes

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho = \pm R(1 + \sin\omega - \cos\omega), \\ 2\rho = \pm R(1 - \sin\omega + \cos\omega). \end{array} \right.$$

En éliminant α et β entre les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2,$$

$$-2\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\beta} - \frac{y}{\beta} + 1\right) = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2,$$

on trouverait, d'une manière analogue,

$$2(x^2 + y^2)^2 \mp 2R(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} - R^2 xy = 0,$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho = \pm R(1 + \sin\omega + \cos\omega), \\ 2\rho = \pm R(1 - \sin\omega - \cos\omega). \end{array} \right.$$

Prenons pour axes les bissectrices des angles des axes actuels, ce qui revient à changer ω en $\frac{\pi}{4} + \omega$, les équations (3) et (4) deviennent

$$2\rho = \pm R(1 \pm \sqrt{2}\sin\omega), \quad 2\rho = \pm R(1 \pm \sqrt{2}\cos\omega),$$

et il est aisé d'y reconnaître quatre limaçons de Pascal.

Ch. B.

Note. — Solution analogue par M. Moret-Blanc.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1873;

PAR M. EUGÈNE HEURTAULT,
Élève du collége Stanislas.

On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A, et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

1° Soit r le rayon du cercle; l'équation générale des coniques doublement tangentes est

$$x^2+y^2-r^2-\lambda(x\cos\omega+y\sin\omega-p)^2.$$

La double condition de représenter des hyperboles équilatères et de passer par le point A, que je suppose situé sur l'axe des x, me donne, en désignant par k^2 la puissance de A,

$$p=a\cos\omega-\frac{k}{\sqrt{2}}.$$

p est la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la droite des contacts : cette perpendiculaire est un axe de symétrie pour l'hyperbole équilatère tangente en C et D. Les deux droites OC et OD étant des normales, il en résulte, d'après une propriété connue, que $OO'=2p$, O' étant le centre de l'hyperbole. Donc l'équation lieu du point O′ est

$$\rho = 2a\cos\omega - k\sqrt{2}.$$

Ce lieu représente une conchoïde du cercle décrit du point A comme centre, avec la longueur AO pour rayon. Il suffit donc de diminuer les rayons vecteurs relatifs à ce cercle de la constante $k\sqrt{2}$.

Le point A ne peut occuper que trois positions : il peut être extérieur ou intérieur au cercle et, comme position intermédiaire, sur le cercle.

S'il est extérieur, on obtient la courbe précédente; s'il est sur le cercle, $k = 0$, et le lieu devient le cercle $\rho = 2a\cos\omega = 2r\cos\omega$; enfin, s'il est intérieur, le lieu devient imaginaire, puisque la constante est $k\sqrt{2}\sqrt{-1}$.

Pour établir que les points de contact des tangentes menées de A au lieu sont sur un cercle, je transforme en coordonnées cartésiennes et j'obtiens

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 2k^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Je transporte l'origine en A, et j'écris que la première polaire de l'origine est $f'_z = 0$, ce qui donne

$$2a^2(x^2 + y^2) + 2k^2[(x + a)^2 + y^2] - a^4 = 0,$$

ce qui est un cercle. En revenant à l'origine primitive, ce cercle devient

$$2a^2[(x - a)^2 + y^2] + 2k^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0$$

ou

$$2(a^2 + k^2)(x^2 + y^2) - 4a^3x + a^4 = 0.$$

2° Étudions maintenant le lieu des foyers (*). J'observe qu'il y a deux sortes d'hyperboles à considérer : celles

(*) Cette partie est en dehors de la question.

pour lesquelles les points de contact sont sur une même branche, et celles pour lesquelles les points de contact sont sur deux branches différentes. Donc il y a deux lieux de foyers : je ne parle que des foyers réels.

Dans le premier cas, les foyers F et F′ et le centre C sont sur le même rayon vecteur.

On a, en désignant OF par ρ et par P le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur OC,

$$(\rho - OC)^2 = 2\left(\overline{CP}^2 - \overline{AP}^2\right).$$

Mais

$$CP = OP - OC = -a\cos\omega + k\sqrt{2},$$

car

$$OC = 2a\cos\omega - k\sqrt{2}.$$

L'équation polaire du lieu du point F est donc

$$\left[\rho - \left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)\right]^2 = 2\left[\left(a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)^2 - a^2\sin^2\omega\right],$$

ou, toutes réductions faites,

$$\rho^2 - 2\left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right) + 2r^2 = 0.$$

La construction de cette courbe est très-simple. En effet,

$$\rho = 2a\cos\omega - k\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)^2 - 2r^2},$$

$$\rho = OC \pm \sqrt{OC^2 - 2r^2};$$

on décrira à chaque instant un cercle sur OC comme diamètre, dont on prendra l'intersection avec le cercle décrit du point O avec $r\sqrt{2}$ pour rayon. En désignant par I l'un des points de rencontre, on aura

$$\rho = OC \pm CI.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que $OC^2 - 2r^2 > 0$, ce qui exige que le point C soit extérieur au cercle de rayon $r\sqrt{2}$, qui est, comme on le sait, le lieu des sommets des angles droits circonscrits au cercle de rayon r. Ce cercle rencontre le limaçon en quatre points qui limitent les régions, pour lesquelles les foyers sont distribués comme dans notre hypothèse.

Dans le second cas, les foyers F, F′ sont sur une perpendiculaire à OC.

On a

$$2\left(\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2\right) = CF^2.$$

En désignant par ω l'angle AOP,

$$AP = a \sin\omega, \quad CP = OC + OP;$$

mais

$$OC = -\left(2a\cos\omega + k\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad OP = a\cos\omega;$$

en substituant, on obtient

$$\overline{CF}^2 = 2\left[a^2\sin^2\omega - \left(a\cos\omega + k\sqrt{2}\right)^2\right].$$

J'écris au-dessous le carré de OC

$$\overline{OC}^2 = \left(2a\cos\omega + k\sqrt{2}\right)^2;$$

j'additionne, et je trouve que la somme des seconds membres est constante et égale à $2a^2 - 2k^2$; donc

$$\overline{OC}^2 + \overline{OF}^2 = 2a^2 - 2k^2 = 2r^2 = \overline{OF}^2.$$

Le lieu des points F, F′ est donc le cercle décrit de O comme centre, avec $r\sqrt{2}$. Ce cercle passe par les quatre points limites dont nous avons parlé plus haut : il en résulte que tous les points du limaçon intérieurs au cercle de rayon $r\sqrt{2}$ correspondent à des hyperboles pour lesquelles les points de contact sont sur deux branches différentes.

On aurait pu traiter le lieu des sommets d'une manière analogue.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; A. Pellissier; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

NOTE SUR L'ATTRACTION PROPORTIONNELLE A LA DISTANCE;

PAR M. CHEVILLIET.

L'attraction proportionnelle à la distance est la seule pour laquelle la durée des oscillations rectilignes soit indépendante de l'amplitude.

Soit $f(x)$ l'attraction, on a

$$dv^2 = -2f(x)dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2\int_0^x f(x)dx + c$$

et, en posant $\int_0^x f(x)dx = y$,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2y + c.$$

Soit h la valeur de y pour l'abscisse a répondant à l'écart maximum; la vitesse étant nulle alors, on a

$$0 = -2h + c,$$

d'où

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2(h - y),$$

$$dt\sqrt{2} = \frac{-dx}{\sqrt{h-y}}$$

et, pour la durée de la demi-oscillation,

$$t\sqrt{2} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{h-y}},$$

ou, si l'on pose $x = \varphi(y)$,

$$t\sqrt{2} = \int_0^h \frac{\varphi'(y)dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Ainsi le problème est identique avec celui de la tautochrone; on trouvera donc de la même manière

$$x = 2c\sqrt{y},$$

d'où

$$y = \frac{x^2}{4c^2},$$

et la force

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2c^2},$$

C. Q. F. D.

Plus généralement : *L'attraction proportionnelle à la distance est la seule qui puisse faire décrire au mobile une courbe toujours fermée, dans un temps toujours le même, quelles que soient les conditions initiales.*

La démonstration se déduit facilement de ce qui précède, si l'on suppose la courbe symétrique par rapport à deux axes rectangulaires passant par le centre d'attraction; car alors la projection du mobile sur l'un des axes exécute, autour du centre, des oscillations dont la durée est indépendante de l'amplitude : par conséquent la force qui produit son mouvement est proportionnelle à la distance au centre; mais la force qui agit sur le mobile lui-même et le rayon vecteur mené du centre à ce point sont dans le même rapport que leurs projections, ce qui établit la proposition énoncée.

La restriction que nous avons dû faire ici n'est pas nécessaire ; mais pour le prouver nous avons dû recourir à d'autres considérations, comme on le verra dans une autre Note.

Remarque. — Dans le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance :

1° *La somme des carrés des axes de la trajectoire est indépendante de la direction de la vitesse initiale*

$$a^2 + b^2 = \frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2;$$

2° *Leur produit ne dépend pas de la composante suivant le rayon vecteur de cette vitesse*

$$ab = \frac{r_0 v_0 \sin a}{\sqrt{\mu}}.$$

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872;

PAR M. A. TOURRETTES.

Déterminer une courbe plane, telle que l'ordonnée y du centre de gravité d'un arc quelconque s, à partir d'une origine fixe, soit une fonction donnée de la longueur de l'arc, la densité ρ en chaque point étant elle-même une fonction donnée de l'arc.

Effectuer les calculs et discuter la courbe, en supposant $\rho = \frac{1}{4}s^3$, $y = s^2$. On pourra examiner, en posant $\rho = ks^m$, $y = hs^\mu$, à quelle condition doivent satisfaire les nombres m et μ, pour que l'intégration puisse être effectuée.

Soit y_1 l'ordonnée du centre de gravité d'un arc de courbe $s = OM$, compté à partir de l'origine des coordonnées, que je suppose sur la courbe.

J'aurai

$$y_1 = \frac{\int \rho y \, ds}{\int \rho \, ds};$$

posons

$$y_1 = F(s), \quad \rho = f(s),$$

et il viendra

$$F(s) \int f(s) ds = \int y f(s) ds.$$

Différentiant les deux membres de l'équation, il vient

$$F'(s) ds \int f(s) ds + F(s) f(s) ds = y f(s) ds,$$

d'où

$$(1) \qquad y = \frac{F'(s) \int f(s) ds}{f(s)} + F(s).$$

Telle est l'équation générale des courbes demandées, en fonction de y et de la longueur de l'arc.

Pour avoir cette équation entre x et y, je pose

$$y = \varphi(s), \quad \text{d'où} \quad dy = \varphi'(s) ds,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad x + c = \int ds \sqrt{1 - [\varphi'(s)]^2};$$

en éliminant s entre l'équation (1) et (2), on aura l'équation en x et y.

Passons au cas particulier où

$$F(s) = s^2, \quad f(s) = \tfrac{1}{4} s^3.$$

L'équation (1) donne

$$y = \frac{2s \int \frac{1}{4} s^3 ds}{\frac{1}{4} s^3} + s^2,$$

et

$$y = \frac{2}{3} s^2, \quad \text{ou bien} \quad dx = \sqrt{\frac{1 - 6y}{6y}} \, dy;$$

c'est l'équation d'une cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est $\frac{1}{6}$ et dont l'axe est l'axe des y.

Prenons maintenant le cas où $F(s) = hs^{\mu}$, $f(s) = ks^{m}$. Substituant dans l'équation (1), il vient

$$y = \frac{\mu h s^{\mu-1} \int ks^m ds}{ks^m} + hs^{\mu},$$

ou

$$y = \left(\frac{\mu}{m+1} + 1\right) hs^{\mu}.$$

Telle est l'équation entre l'ordonnée et la longueur de l'arc.

Cherchons l'équation différentielle en x et y. On tire de l'équation précédente

$$y^{\frac{1}{\mu}} = h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} s,$$

et, en différentiant les deux membres,

$$\frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1} dy = h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} ds.$$

Posons

$$h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \lambda,$$

et remplaçons ds par sa valeur $dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$, il vient, après avoir supprimé dy, qui donne une parallèle à l'axe des x, laquelle ne répond pas, évidemment, à la question,

$$\frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1} = \lambda\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}},$$

d'où

$$(3) \qquad dx = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\mu^2} y^{2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)} - \lambda^2\right]^{\frac{1}{2}} dy:$$

c'est l'équation différentielle cherchée.

Le second membre est une différentielle binôme; appliquons les caractères d'intégrabilité. Le premier caractère donne

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)}=\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu},$$

qui doit être entier; le deuxième caractère donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\mu},$$

qui doit aussi être un nombre entier. On voit que m n'y entre pas. Posons, n étant un entier,

$$\frac{1}{2}\frac{\mu}{1-\mu}=n,$$

d'où

$$(4)\qquad \mu=\frac{n}{\frac{1}{2}+n}.$$

Donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives, on aura pour μ des valeurs qui répondent à des cas d'intégrabilité.

La deuxième formule donnerait

$$(5)\qquad \mu=1-\frac{1}{2n}.$$

Si nous faisons, dans l'équation (4), $n=-1$, on a $\mu=2$, c'est le cas considéré en premier lieu. Pour $n=1$, $\mu=\frac{2}{3}$, et alors l'équation (3) devient

$$dx=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{9}{4}y-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}dy,$$

$$x=\frac{8}{27\lambda}\left(\frac{9}{4}y-\lambda^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

la constante étant déterminée par la condition que, pour $y = \frac{4}{9}\lambda^2$, $x = 0$.

La formule (5), pour $n = 1$, donne

$$\mu = \tfrac{1}{2};$$

par suite

$$dx = \frac{1}{\lambda}(4y^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}dy,$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{1}{2}\left[y\sqrt{4y^2 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2}{2}\,\mathrm{L}\left(2y + \sqrt{4y^2 - \lambda^2}\right)\right] + \text{const}.$$

On détermine la constante par la condition que, pour $x = 0$, $y = \frac{\lambda}{2}$; on trouve

$$\text{const.} = \frac{\lambda^2}{4}\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda}{2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Sur la Thermodynamique des systèmes matériels.

M. Émile Sarrau, sous ce titre, vient de publier, dans le *Journal de Physique*, de M. d'Almeida, t. II, 1873, un petit Mémoire dont la lecture est accessible à toutes les personnes possédant les premiers éléments du Calcul infinitésimal; ce Mémoire, dont nous recommandons la lecture à toutes les personnes qui aiment la rigueur, peut être considéré comme un des travaux les plus remarquables qui aient été publiés sur la Physique mathématique.

En s'appuyant sur les seuls principes de la Mécanique rationnelle, sur cette hypothèse, que la température d'un corps peut être mesurée par la force vive du mouvement vibratoire des molécules, enfin sur la notion de l'équivalent mécanique de la chaleur, M. Sarrau retrouve toutes les lois expérimentales de la Thermodynamique, et, en particulier, le fameux théorème de Carnot, jusqu'ici plutôt deviné que démontré.

M. Sarrau montre que la chaleur spécifique des corps à volume constant est indépendante de la température; cette conclusion n'est qu'*en apparence* en désaccord avec les faits observés, et tient à la manière même dont M. Sarrau mesure la température. Dans la théorie de M. Sarrau, l'expression du théorème de Carnot prend la forme

$$\mathrm{E}\frac{dq}{\mathrm{T}} = \frac{s}{\varpi}\left(\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} + \frac{2}{3}\frac{dv}{v}\right),$$

où dq désigne la quantité de chaleur gagnée par le corps, E l'équivalent mécanique de la chaleur, T la température absolue, s un coefficient constant, ϖ le poids atomique du corps, v le volume spécifique. H. LAURENT.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Moret-Blanc. — Dans le numéro de novembre, M. de Saint-Germain reproche à la solution que j'ai donnée de la question 1031 (*Trouver la condition pour que les plus courtes distances des côtés opposés d'un quadrilatère gauche se rencontrent*) de ne pas être assez spéciale. Je ne crois pas qu'une solution vaille moins parce qu'elle convient en même temps à une question plus générale que la question proposée; ce serait plutôt à mes yeux un avantage. Dans tous les cas, si c'est un défaut, la condition donnée par M. de Saint-Germain n'y échappe point. En effet, si deux droites EF, GH se rencontrent en s'appuyant sur les côtés opposés d'un quadrilatère gauche, les six droites sont des génératrices d'un même hyperboloïde; les parallèles à ces droites, menées par le centre, sont six génératrices du cône asymptote. Si les droites sont trois à trois parallèles à un même plan, cas auquel elles sont des génératrices d'un paraboloïde hyperbolique, des parallèles à ces droites menées par un même point sont comprises dans le système de deux plans qui se coupent, ce qui est une variété du cône du second degré. La condition donnée par M. de Saint-Germain a donc exactement le même degré de généralité que la mienne.

Il ne pouvait manquer d'en être ainsi, puisque cette dernière a été démontrée nécessaire et suffisante; toute autre condition présentant les mêmes caractères doit pouvoir s'y réduire et avoir la même étendue. On n'en diminuerait la généralité qu'en y introduisant des restrictions inutiles.

Note additionnelle à l'article de la page 49, par M. R. Lefébure de Fourcy. — Nous terminerons en remarquant que notre construction, dans le cas où les quatre points se réduisent à deux, donne la sécante idéale; et enfin, quand les courbes sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre, on obtient les deux sécantes idéales.

En effet, soit AB le diamètre du cercle, et A′B′ l'axe correspondant de l'ellipse; soit P le point de rencontre d'une des lignes projection verticale des sections planes du cylindre, on doit avoir

$$PA.PB = p.PA'.PB',$$

p étant une constante afférente au petit axe de notre ellipse. Or cette condition est remplie quand le point ainsi déterminé est intérieur aux courbes, et elle subsiste par raison de continuité.

N'oublions pas qu'on peut considérer deux systèmes de cônes, mais qu'ils donnent les mêmes résultats. On choisira celui dont le sommet est le mieux situé au point de vue graphique.

Note. — Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner, des solutions de la question 1118, par MM. E. Dejardin, à Paris; E. Kruschwitz, étudiant à Berlin; Paillet, élève du collége de Rochefort; Djagupov, élève du gymnase de Stravropol, classe de M. Chudadov (Caucase).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1073

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 144);

PAR M. C. MOREAU.

L'équation

$$x^3 - \frac{4+p}{3}x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}x + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3} = 0,$$

dans laquelle $0 < p < 1$, *a une racine* α *comprise entre zéro et l'unité, et l'on a*

$$\int_0^\alpha x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx$$

$$+ \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(S. REALIS.)

Faisons, dans la seconde intégrale, $x = 1 - y$, il viendra

$$\int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx$$

$$= -\int_1^{\alpha} y^{2-p}(1-y)^{1+p}\,dy = \int_{\alpha}^{1} x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx - \int_0^{\alpha} x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx$$

$$= -\int_0^{\alpha} x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx + \frac{\Gamma(3-p)\Gamma(2+p)}{\Gamma(5)}$$

$$= -\int_0^{\alpha} x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx + \frac{(2-p)(1-p)(1+p)p}{1.2.3.4}\,\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

et l'équation qu'il s'agit de vérifier devient

$$\int_0^{\alpha} x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx$$

$$- \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)} \int_0^{\alpha} x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx = 0.$$

Cherchons l'intégrale générale du premier membre de cette équation; pour cela, posons $\frac{x}{1-x} = y$, ce qui donne

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+y} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2};$$

'expression à intégrer sera

$$\int \frac{y^{-p}\,dy}{1+y} - \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)} \int \frac{y^{2-p}\,dy}{(1+y)^5}.$$

En intégrant maintenant quatre fois de suite, par parties, la seconde intégrale, on a

$$\int \frac{y^{2-p}dy}{(1+y)^5} = -\frac{y^{2-p}}{4(1+y)^4} - \frac{2-p}{4.3}\frac{y^{1-p}}{(1+y)^3}$$

$$-\frac{(2-p)(1-p)}{4.3.2}\frac{y^{-p}}{(1+y)^2} + \frac{(2-p)(1-p)p}{4.3.2.1}\frac{y^{-p-1}}{1+y}$$

$$+\frac{(2-p)(1-p)p(1+p)}{4.3.2.1}\int \frac{y^{-p-2}dy}{1+y};$$

en remplaçant cette valeur dans l'expression précédente, il restera, indépendamment des termes connus,

$$\int \frac{y^{-p}dy}{1+y} - \int \frac{y^{-p-2}dy}{1+y} = \int y^{-p-2}(y-1)dy$$

$$= -\frac{y^{-p}}{p} + \frac{y^{-p-1}}{1+p},$$

et l'intégrale générale cherchée sera

$$\frac{2.3}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\Big[\frac{y^{2-p}}{(1+y)^4} + \frac{2-p}{3}\frac{y^{1-p}}{(1+y)^3}$$

$$+\frac{(2-p)(1-p)}{2.3}\frac{y^{-p}}{(1+y)^2} - \frac{(2-p)(1-p)p}{2.3}\frac{y^{-p-1}}{1+y}$$

$$-\frac{(2-p)(1-p)(1+p)}{2.3}y^{-p} + \frac{(2-p)(1-p)p}{2.3}y^{-p-1}\Big].$$

Revenons maintenant à la variable x en posant

$$y = \frac{x}{1-x};$$

simplifions et ordonnons par rapport à x, nous obtiendrons, sans tenir compte de la constante introduite par l'intégration,

$$\frac{2.3\,x^{1-p}(1-x)^p}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\Big[x^3 - \frac{4+p}{3}x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}x$$

$$+\frac{(2-p)p(1+p)}{2.3}\Big].$$

Or on voit que, p étant plus petit que 1 et positif, cette quantité est nulle pour la limite inférieure $x = 0$; l'intégrale définie est donc

$$\frac{2.3\alpha^{1-p}(1-\alpha)^p}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\left[\alpha^3 - \frac{4+p}{3}\alpha^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}\alpha + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3}\right],$$

et elle est effectivement nulle si α est racine de l'équation du troisième degré donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Bignon, à Lima; J. Mister, répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique; et Brocard.

Question 1091

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. GENTY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les faces d'un dièdre droit doivent rester tangentes à un ellipsoïde donné, et l'arête de ce dièdre doit rencontrer deux droites fixes quelconques. On demande le lieu de cette arête. (MANNHEIM.)

Soient D et Δ les deux droites données; nous allons chercher combien de génératrices du lieu passent par un point quelconque m de la droite D.

Soit P le plan mené par le point m et la droite D; le problème revient à chercher combien il y a de droites, passant par le point m, situées dans le plan P, et telles que les plans tangents, menés par chacune de ces droites à l'ellipsoïde donné, se rencontrent sous un angle droit

Or les plans tangents à l'ellipsoïde, menés par le point m, enveloppent un cône du second degré; et le lieu des droites qui passent par le sommet d'un cône du second ordre, et qui sont telles que les plans tangents menés au cône par chacune de ces droites forment un dièdre droit, est aussi un cône du second ordre. Ce cône coupe le plan P suivant deux droites $m\mu$, $m\mu'$; ce sont les génératrices de la surface gauche cherchée qui passent au point m.

Il est évident que par le point μ de la droite Δ passent de même deux génératrices de la surface.

Donc la surface cherchée est le lieu décrit par une droite qui réunit les points correspondants de deux séries de points $m, m', \ldots, \mu, \mu', \ldots$, faites sur deux droites D et Δ, et telles qu'à un point m correspondent deux points μ, et à un point μ deux points m.

Donc le lieu cherché est une surface gauche du quatrième ordre sur laquelle les droites D et Δ sont des droites doubles.

Nota. — Le théorème sur lequel nous nous sommes appuyé n'est qu'un cas particulier du suivant :

On donne deux cônes du second ordre C *et* C' *ayant le même sommet* S; *le lieu des droites passant par le point* S, *et telles que les plans tangents menés par ces droites aux cônes* C *et* C' *forment deux couples de plans en rapport harmonique, est aussi un cône du second degré* (Γ), *qui passe par les huit arêtes de contact des plans tangents communs aux deux cônes donnés.*

Ce théorème lui-même résulte immédiatement du théorème analogue sur les coniques.

Si l'on suppose que l'un des cônes donnés S' est la sphère infiniment petite qui a son centre au sommet de l'autre cône, on a le cas particulier sur lequel nous nous sommes appuyé.

Dans le cas général, les trois cônes S, S' et Γ ont un système de diamètres conjugués commun. Dans le cas particulier qui nous occupe, les cônes S et Γ ont les mêmes axes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey et Brocard.

Question 1128

(voir même tome, p. 64);

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Si un nombre premier, P, *est égal à la somme de trois carrés,* P^2 *est généralement égal aussi à la somme de trois carrés; il ne pourrait y avoir d'exception que si* P *était décomposable en deux carrés* (*).

(CATALAN.)

On a identiquement

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

On a de même aussi, identiquement,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

De là

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2 + 4(ad-bc)^2.$$

Pour $d=0$,

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+4a^2c^2+4b^2c^2.$$

Ainsi le carré d'une somme de trois carrés est aussi, en général, une somme de trois carrés.

(*) Encore n'est-il pas sûr que ce cas d'exception puisse se présenter : le nombre premier $29=16+9+4=25+4$; néanmoins $29^2=24^2+16^2+3^2$.

Dans la note, à l'équation

$$29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2,$$

on pourrait joindre

$$29^2 = 21^2 + 16^2 + 12^2.$$

Note du Rédacteur. — M. *Charles Chabanel* a résolu la même question. Sa solution ne diffère de celle de M. Le Besgue qu'en ce qu'elle se fonde *immédiatement* sur l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2b^2 + 4b^2c^2,$$

facile à vérifier.

M. Chabanel remarque : 1° que la proposition énoncée existe lorsque le nombre P est quelconque (premier ou non premier), ce qui est bien évident, puisque l'identité précédente ne suppose en rien que $a^2 + b^2 + c^2$ soit un nombre entier premier ; 2° que, en écartant certains cas particuliers, le nombre P^2 est, en général, décomposable en trois systèmes différents de trois carrés.

QUESTIONS.

1129. Un triangle ABC, rectangle en A, tourne autour d'un axe mené par B parallèlement à AC. Calculer ses trois côtés sous la double condition que son périmètre ait une valeur donnée et que le volume engendré par lui en un tour complet soit maximum.

1130. Étant donnée une courbe plane quelconque et une surface du second degré, trouver les surfaces développables qui, passant par la courbe, ont leur arête de rebroussement sur la surface ; l'équation différentielle du premier ordre, à laquelle se ramène la solution de ce problème, peut toujours s'intégrer par de simples quadratures.

(E. Laguerre.)

AXES, PLANS CYCLIQUES, ETC., DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L. PAINVIN.

La détermination des axes d'une surface du second ordre, celle des plans cycliques, la recherche des conditions pour que la surface soit de révolution, sont des questions étroitement liées entre elles et qui dépendent toutes de la discussion d'une seule et même équation. Les propriétés sur lesquelles s'appuie cette discussion sont parfaitement connues; mais le rapprochement de ces questions, qui semblent différentes, n'est jamais fait d'une manière très-explicite dans les cours de Géométrie analytique, et nous pensons qu'il y a quelque intérêt à présenter cette théorie sous la forme que nous allons indiquer, et à bien mettre en vue le lien qui en rattache les diverses parties. On pourra ainsi se rendre compte de certaines difficultés qu'on rencontre et dont l'explication est nécessairement insuffisante lorsqu'on exclut les solutions imaginaires.

1. Précisons d'abord le sens des termes que nous emploierons.

I. Les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace peuvent être représentées par les rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et nous pourrons déterminer tous les points de l'espace en imposant aux quantités x, y, z, t la condition de n'être jamais infinies. Lorsque t est nul, le point est à l'infini; l'équation $t = 0$ définit donc le *lieu* de tous les points de l'espace qui se trouvent à l'infini; c'est le lieu de ces points qu'on désigne par le nom de *plan de l'infini*.

II. Dans les surfaces du second ordre, le lieu des milieux des droites réelles ou imaginaires, parallèles à une direction fixe, est un plan qu'on nomme *plan diamétral* conjugué de cette direction; le lieu des centres des sections parallèles à ce plan est une droite qui est nommée le *diamètre* conjugué de ce plan.

Lorsque des droites ou des plans sont imaginaires, ces droites ou ces plans sont dits *rectangulaires* lorsque les coefficients des équations qui les représentent satisfont aux relations établies pour le cas où les droites et les plans sont réels.

Lorsqu'un diamètre, réel ou imaginaire, sera perpendiculaire au plan diamétral conjugué, le diamètre sera dit *un axe* de la surface, et le plan diamétral correspondant sera nommé un *plan principal*.

III. Nous appellerons *cercle* toute section plane d'une sphère, que le plan soit réel ou imaginaire; et un *plan cyclique* d'une surface du second ordre sera un plan qui la coupe suivant un cercle.

D'après cette définition générale du cercle, il est facile de voir que son équation peut prendre la forme de celle de la parabole, mais les coefficients sont imaginaires.

Remarque. — Il faut bien comprendre que ces dénominations que nous adoptons ne désignent pas, dans le cas des imaginaires, des quantités géométriques dans le sens habituel du mot, mais seulement des formes analytiques. Ce langage, conventionnel et parfaitement légitime, qui est un auxiliaire puissant dans les raisonnements, ne fait donc que traduire les combinaisons des formes analytiques.

2. Soit l'équation d'une surface du second ordre

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ &\qquad + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0; \end{aligned}$$

considérons la conique (Γ), section de la surface par le plan de l'infini, c'est-à-dire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(\Gamma)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \\ &t = 0, \end{aligned}\right.$$

puis le cercle imaginaire de l'infini Ω, c'est-à-dire

$$(2)\qquad (\Omega)\quad x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0;$$

nous supposerons les axes de coordonnées rectangulaires.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux courbes (1) et (2) est

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\qquad - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ &t = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on exprime que cette conique se réduit à deux droites, on a l'équation de condition

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A - \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' - \lambda & B \\ B' & B & A'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi trois valeurs de λ; à chaque valeur de λ correspond un système de sécantes passant par les quatre points communs à la conique (Γ) et au cercle (Ω).

Nommons a, b, c, d les points d'intersection des coniques (1) et (2); les trois systèmes de sécantes seront

$$(ab, cd), \quad (ac, bd), \quad (ad, bc).$$

Désignons, en outre, par p, q, r les points de concours respectifs des deux sécantes de chaque système; les points p, q, r sont les points qui ont même polaire par rapport aux deux courbes Γ et Ω. Le triangle pqr est donc conjugué, à la fois, par rapport à la conique (Γ) et au cercle (Ω), c'est-à-dire que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé.

Or, si l'on considère un point O à distance finie, le centre de la surface, par exemple, s'il y a lieu, et qu'on mène un plan par ce point O et une des sécantes ab, le plan Oab coupera la surface du second ordre suivant un cercle; car cette section et la conique Γ, qui appartient aussi à la surface, doivent se rencontrer en deux points, lesquels seront nécessairement les points a et b; d'un autre côté, ces deux points sont, dans le plan sécant, les points circulaires à l'infini; la section est donc un cercle.

Si l'on joint le centre O à un des sommets du triangle pqr, au point p par exemple, la droite Op sera un axe de la surface; car la droite Op et le plan Oqr sont conjugués par rapport à la surface, puisque p est le pôle de qr par rapport à la conique Γ; mais p est également le pôle de la trace qr du plan par rapport au cercle Ω : la droite Op est donc perpendiculaire au plan Oqr.

Ainsi :

1° Les *plans cycliques* sont les plans passant par un point O, à distance finie, et les sécantes communes à la conique Γ et au cercle Ω.

2° Les *axes* sont les droites qui joignent le centre O aux sommets du triangle pqr conjugué à la fois par rapport à la conique Γ et au cercle Ω.

3° Les *plans principaux* sont les plans passant par le centre O et les côtés du triangle pqr.

Le plan principal correspondant à l'axe Op, par exemple, passe par le côté qr, opposé au sommet p.

Les droites Op, Oq, Or sont les intersections des deux plans cycliques de chaque système; on voit par là que ces plans sont respectivement perpendiculaires au plan principal correspondant.

Remarque. — Pour une valeur de λ vérifiant l'équation (4), le premier membre de l'équation (3) se réduit au produit de deux fonctions linéaires; par conséquent les plans cycliques pourront se déterminer en écrivant que la fonction

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - \lambda(x^2+y^2+z^2)$$

se réduit, pour une valeur convenable de l'indéterminée λ, au produit de deux fonctions linéaires, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} &Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy-\lambda(x^2+y^2+z^2)\\ &\quad=(mx+ny+pz)(m_1x+n_1y+p_1z);\end{aligned}\right.$$

les directions des plans cycliques s'obtiendront en égalant à zéro les fonctions linéaires $mx+ny+pz$ et $m_1x+n_1y+p_1z$.

De l'identité (I) il résulte immédiatement que deux sections circulaires d'un même système sont sur une même sphère.

3. Ces préliminaires étant posés, passons à la discussion de l'équation en λ.

Premier cas. *Les racines de l'équation en λ sont distinctes.* — L'équation en λ n'est autre que l'équation connue sous le nom d'*équation en s*; si l'équation de la surface donnée a ses coefficients réels, l'équation en λ (4) aura ses racines réelles, puisqu'elle détermine les systèmes de sécantes communes à deux coniques, dont une est toujours imaginaire.

Conservant les notations du n° 2, nous voyons que, *dans le cas actuel, la surface possède :*

Trois systèmes de plans cycliques.	(Oab, Ocd),	(Oac, Obd),	(Oad, Obc);
Trois axes.	Op,	Oq,	Or;
Trois plans principaux.	Oqr,	Opr,	Opq.

4. Deuxième cas. *L'équation en λ a une racine double.* — Dans ce cas, deux hypothèses peuvent se présenter :

1° Le système (3) des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes ;

2° Le système des sécantes communes se compose de deux droites coïncidentes.

1° *Le système* (3) *des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes.*

On a alors une *relation unique* entre les coefficients de l'équation de la surface donnée; mais cette relation ne peut être vérifiée que par des valeurs imaginaires de ces coefficients, car elle est décomposable en la somme de plusieurs carrés (Kummer, *Journal de Crelle*, t. XXVI; Hesse, *Geometrie des Raums*; Bauer, *Journal de Crelle*, t. LXXI).

La conique (Γ) touche le cercle imaginaire de l'infini en un point unique p, et le coupe en deux autres points a et b. Désignons par pq la tangente commune en p, q étant le point où cette tangente rencontre la corde ab.

Il n'y a plus que deux systèmes de sécantes communes : le système (ap, bp), qui correspond à la racine double de l'équation en λ; puis le système (ab, pq), qui correspond à la racine simple.

Il n'y a plus que deux points qui ont même polaire par rapport à (Γ) et (Ω) : ce sont les points p et q ; p a pour polaire la tangente pq, et q a pour polaire une droite pi passant par le point p.

Dans ce cas, qui correspond à une surface du second ordre à coefficients imaginaires, on a les propriétés particulières suivantes :

La surface du second ordre n'a que deux systèmes de plans cycliques : le système $(\mathrm{O}ap, \mathrm{O}bp)$, *correspondant à la racine double, et le système* $(\mathrm{O}ab, \mathrm{O}pq)$, *correspondant à la racine simple ; le plan cyclique* $\mathrm{O}pq$ *est un plan asymptote* (ou parallèle à un plan asymptote).

La surface n'admet plus que deux axes et deux plans principaux : l'axe $\mathrm{O}p$, *situé dans le plan principal* $\mathrm{O}pq$, *auquel il correspond, et l'axe* $\mathrm{O}q$, *qui correspond au plan principal* $\mathrm{O}pi$, *pi étant la polaire du point* q.

Le plan $\mathrm{O}pq$ *est à la fois un plan cyclique, un plan principal et un plan asymptote.*

Exemple. — Nous citerons comme exemple la surface

$$x^2 - y^2 + \sqrt{-1}\,yz + xz + \sqrt{-1}\,xy = 1.$$

L'équation en λ est ici

$$4\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0 \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_0 = 1 & \text{racine simple,} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} & \text{racine double;} \end{array} \right.$$

les plans cycliques correspondant à la racine simple sont

$$(\mathrm{O}ab, \mathrm{O}pq) \quad \left(x + 2y\sqrt{-1} - z\right)\left(y\sqrt{-1} + z\right) = 0;$$

l'axe $\mathrm{O}q$, intersection de ces deux plans, a pour équations

$$(\mathrm{O}q) \qquad \frac{x}{3} = \frac{y}{\sqrt{-1}} = \frac{z}{1};$$

le plan principal correspondant est

$$(Opi) \qquad 3x + y\sqrt{-1} + z = 0.$$

Les plans cycliques correspondant à la racine double sont

$$(Oap, Obp) \quad \left\{ \begin{array}{l} [z + y\sqrt{-1} + x(1 + \sqrt{-2})] \\ \times [z + y\sqrt{-1} + x(1 - \sqrt{-2})] = 0; \end{array} \right.$$

l'axe Op, intersection de ces deux plans, a pour équations

$$(Op) \qquad x = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{-1}} = \frac{z}{1};$$

le plan principal correspondant est

$$(Opq) \qquad y\sqrt{-1} + z = 0.$$

On peut facilement vérifier que le plan Opq est à la fois un plan cyclique, un plan asymptote et un plan principal.

2° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine double, se compose de deux droites coïncidentes.*

On a, dans ce cas, deux relations entre les coefficients de l'équation de la surface; on les obtient en écrivant les conditions imposées, ou, plus simplement, en écrivant que la fonction

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduit, pour une valeur convenable de l'indéterminée λ, à un carré parfait, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$(\text{II}) \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \\ = (mx + ny + pz)^2. \end{array} \right.$$

La conique (Γ), section de la surface du second ordre par le plan de l'infini, est alors doublement tangente au cercle imaginaire de l'infini. Soient a, b les deux points de contact, p le pôle de la droite ab. Les deux coniques n'ont plus que deux systèmes de sécantes communes; le système correspondant à la racine double se compose de deux droites confondues avec ab; le système correspondant à la racine simple se compose des deux tangentes communes ap, bp. Les points qui ont même polaire par rapport aux deux coniques (Γ) et (Ω) sont : le point p, qui a pour polaire ab; puis tous les points de ab dont les polaires respectives passent par le point p.

Nous aurons, d'après cela, la proposition suivante :

La surface du second ordre n'admet plus que deux systèmes de plans cycliques : un premier système, correspondant à la racine double, se compose de deux plans confondus avec Oab; *le second système se compose des deux plans distincts* Oap, Obp, *lesquels sont en même temps des plans asymptotes.*

La surface possède un premier axe Op *perpendiculaire au plan principal correspondant* Oab; *puis une infinité d'autres axes situés dans le plan* Oab, O *étant le centre; les plans principaux correspondants passent par l'axe* Op.

La surface du second ordre est alors une surface de révolution dont l'axe est Op.

5. Troisième cas. *L'équation en λ a une racine triple.* — Nous aurons à considérer, dans ce cas, les trois hypothèses suivantes :

1° Le système (3) des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites distinctes;

2° Le système des sécantes communes se compose de deux droites coïncidentes;

3° Le système des sécantes communes est indéterminé.

1° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites distinctes.*

On a alors *deux relations* entre les coefficients de l'équation de la surface donnée; mais ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires de ces coefficients; nous le démontrerons plus loin.

La conique (Γ) est osculatrice en p au cercle imaginaire de l'infini; le contact est du second ordre, et elle rencontre le cercle en un second point a. Désignons par pt la tangente commune. Le point p est le seul point qui ait même polaire par rapport aux deux coniques; pt est cette polaire.

De là résultent les propriétés suivantes :

La surface du second ordre n'admet plus qu'un seul système de plans cycliques; ce système est composé des deux plans distincts Opt, Opa; *le plan* Opt *est en même temps un plan asymptote.*

La surface admet un seul axe Op, *et* Opt *est le plan principal correspondant; l'axe est ici situé dans le plan principal.*

Exemple. — Nous citerons comme exemple la surface

$$x^2 + 2y^2 + xz\sqrt{-2} + xy\sqrt{-2} = 1;$$

l'équation en λ est ici

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 1)^3 = 0;$$

le système unique de plans cycliques est

$$(\mathrm{O}pt, \mathrm{O}pa) \qquad (y + z)(x\sqrt{-2} + y - z) = 0;$$

l'axe Op, intersection de ces deux plans, a pour équation

$$(Op) \qquad \frac{x}{\sqrt{-2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1},$$

et le plan principal correspondant est

$$(Opt) \qquad x\sqrt{-2} + y - z = 0;$$

c'est à la fois un plan cyclique, un plan principal et un plan asymptote.

2° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, se compose de deux droites coïncidentes.*

On a alors *trois relations* entre les coefficients de l'équation de la surface; mais ces relations ne peuvent être vérifiées, comme nous le verrons plus loin, que par des valeurs imaginaires de ces coefficients.

La conique (Γ) est osculatrice en p au cercle imaginaire de l'infini; le contact est du troisième ordre; désignons par pt la tangente commune. Tous les points de la droite pt ont même polaire par rapport aux deux coniques (Γ) et (Ω), et ces polaires passent par le point p; ce sont les seuls points qui ont même polaire.

De là résultent les propriétés suivantes :

La surface du second ordre n'admet plus qu'un seul système de plans cycliques, composé de deux plans coïncidant avec le plan Opt; *ce plan est en même temps un plan asymptote.*

La surface possède une infinité d'axes, lesquels passent par son centre et sont situés dans le plan Opt; *tous les plans principaux correspondants passent par la droite* Op, *qu'on peut regarder comme l'axe principal.*

Nous citerons comme exemple la surface

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{-1}yz = 1;$$

l'équation en λ est ici

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 2)^3 = 0;$$

le système unique de plans cycliques est

$$(Opt) \qquad (y - z\sqrt{-1})^2 = 0;$$

tous les axes sont dans ce plan, et l'axe principal Op a pour équations

$$(Op) \qquad x = 0, \quad y - z\sqrt{-1} = 0;$$

les plans principaux passent tous par cette droite.

3° *Le système* (3) *des sécantes communes, correspondant à la racine triple, est indéterminé.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$A = A' = A'' = \lambda, \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0;$$

la conique (Γ) se confond avec le cercle imaginaire de l'infini, et alors la *surface du second ordre est une sphère.*

6. La discussion complète de la question que nous avions en vue est terminée; il ne nous reste plus qu'à démontrer les deux assertions émises dans la première et dans la seconde hypothèse du troisième cas.

1° *Lorsqu'on exprime que l'équation en λ a une racine triple et que le système des sécantes communes se compose de deux droites distinctes, on obtient deux relations entre les coefficients de l'équation de la surface, et ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires de ces coefficients.*

L'équation en λ est

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & B'' & B' \\ B'' & A'-\lambda & B \\ B' & B & A''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(4\ bis)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^3 - (A + A' + A'')\lambda^2 \\ \quad + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)\lambda \\ \quad + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0, \end{array} \right.$$

et le système de sécantes correspondant à la valeur de λ est

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} (A-\lambda)x^2 + (A'-\lambda)y^2 + (A''-\lambda)z^2 \\ \qquad + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0. \end{array} \right.$$

Or, si l'on pose

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} M = A + A' + A'', \\ N = A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2, \\ P = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2, \end{array} \right.$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (4 *bis*) ait ses trois racines égales sont

$$(6)\qquad \frac{M}{3} = \frac{N}{M} = \frac{3P}{N};$$

les égalités (6) équivalent évidemment à deux relations distinctes.

Si maintenant on pose encore

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{ll} a = A'A'' - B^2, & b = AB - B'B'', \\ a' = A''A - B'^2, & b' = A'B' - B''B, \\ a'' = AA' - B''^2, & b'' = A''B'' - BB', \end{array} \right.$$

on constate très-facilement les identités suivantes :

$$(8)\begin{cases} (1^\circ) & 2(M^2-3N) = (A'-A'')^2+(A''-A)^2+(A-A')^2 \\ & \qquad +6(B^2+B'^2+B''^2); \\ (2^\circ) & 2(N^2-3MP) = (a'-a'')^2+(a''-a)^2+(a-a')^2 \\ & \qquad +6(b^2+b'^2+b''^2). \end{cases}$$

La première des identités (8) est évidente; pour établir la seconde, on remarque que

$$-AP = b^2 - a'a'', \quad -A'P = b'^2 - a''a, \quad -A''P = b''^2 - aa',$$

et la démonstration est alors immédiate.

On voit par là que les relations (6) ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires des coefficients A, A', ..., si l'on ne veut pas établir plus de deux relations distinctes entre ces coefficients.

2° *Si l'on exprime que l'équation en λ a une racine triple et que le système des sécantes communes se réduit à deux droites coïncidentes, on obtient trois relations entre les coefficients de l'équation de la surface, et ces relations ne peuvent être vérifiées que par des valeurs imaginaires des coefficients.*

Exprimons d'abord que le système des sécantes se réduit à deux droites confondues, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait; il vient

$$\frac{A-\lambda}{B''} = \frac{B''}{A'-\lambda} = \frac{B'}{B},$$

$$\frac{A-\lambda}{B'} = \frac{B''}{B} = \frac{B'}{A''-\lambda},$$

$$\frac{B''}{B'} = \frac{A'-\lambda}{B} = \frac{B}{A''-\lambda}.$$

Toutes ces relations seront vérifiées si l'on a

$$(9)\qquad \lambda_0 = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

De là on tire

$$A = \lambda_0 + \frac{B'B''}{B},\quad A' = \lambda_0 + \frac{B''B}{B'},\quad A'' = \lambda_0 + \frac{BB'}{B''},$$

et l'équation en λ devient

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda + \frac{B'B''}{B} & B'' & B' \\ B'' & \lambda_0 - \lambda + \frac{B''B}{B'} & B \\ B' & B & \lambda_0 - \lambda + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(\lambda - \lambda_0)^2 \left[\lambda - \lambda_0 - \left(\frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right)\right] = 0.$$

Comme cette équation doit avoir une racine triple et que cette racine triple est λ_0, on doit avoir

$$(10)\qquad B'^2B''^2 + B''^2B^2 + B^2B'^2 = 0.$$

On a donc à vérifier les relations (9) et (10), et, si l'on ne veut pas établir plus de trois relations distinctes entre les coefficients, il faudra nécessairement admettre des valeurs imaginaires.

Le calcul que nous venons de faire suppose qu'aucun des coefficients B, B′, B″ n'est nul; dans le cas contraire, il faudrait reprendre la recherche des relations qui doivent remplacer les relations (9), et l'on serait encore conduit à la même conclusion; la vérification est des plus faciles.

NOTE SUR LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Tout le monde sait que le procédé pour calculer π, connu sous le nom de *méthode des isopérimètres*, repose sur la résolution du problème suivant :

Étant donnés le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, trouver le rayon et l'apothème du polygone régulier ayant même périmètre, mais un nombre double de côtés.

Ce problème résolu, on part d'un polygone régulier quelconque, et l'on considère la suite indéfinie des polygones réguliers isopérimètres dont le nombre des côtés va constamment en doublant.

2. Dans cette suite, il est évident que les rayons vont en diminuant, que les apothèmes, au contraire, vont en augmentant, et l'on démontre, dans tous les cours, que, si l'on considère deux polygones consécutifs :

La différence entre le nouveau rayon et le nouvel apothème est moindre que le quart de la différence entre l'ancien rayon et l'ancien apothème.

3. L'idée nous est venue de considérer, d'une part, la suite indéfinie des rayons; de l'autre, la suite indéfinie des apothèmes. Nous avons été conduit ainsi aux deux théorèmes suivants, qui nous semblent nouveaux.

4. THÉORÈME. — *Dans la suite indéfinie des rayons, si l'on retranche chaque rayon du précédent, l'une*

quelconque des différences obtenues est moindre que le quart de la précédente.

En effet, désignons par r_1, r_2, r_3 les rayons de trois polygones consécutifs, et par a_2, a_3 les apothèmes des deux derniers; nous avons, comme on sait :

$$r_2 = \sqrt{a_2 r_1},$$
$$r_3 = \sqrt{a_3 r_2},$$
$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + r_2).$$

Éliminons a_2 et a_3 entre ces trois équations, nous arrivons à l'égalité

$$r_2^3 + r_2^2 r_1 = 2 r_3^2 r_1,$$

laquelle peut s'écrire

$$\frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_2} = \frac{r_3}{r_1 + r_2}\,\frac{r_3}{r_2 + r_3}.$$

Or les rayons vont en diminuant; donc chacun des rapports $\frac{r_3}{r_1 + r_2}$, $\frac{r_3}{r_2 + r_3}$ est moindre que $\frac{1}{2}$; donc le second membre de la dernière égalité est inférieur à $\frac{1}{4}$; donc on a

$$r_2 - r_3 < \tfrac{1}{4}(r_1 - r_2),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Théorème. — *Dans la suite indéfinie des apothèmes, si l'on retranche chaque apothème du suivant, l'une quelconque des différences obtenues est moindre que le quart de la précédente.*

En effet, désignons par a_1, a_2, a_3 les apothèmes de trois polygones consécutifs, et par r_1, r_2 les rayons des deux premiers; nous avons, comme on sait,

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + r_1),$$
$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + r_2),$$
$$r_2 = \sqrt{a_2 r_1}.$$

Éliminons r_1 et r_2 entre ces trois équations ; nous trouvons l'équation suivante :

$$(2a_3 - a_2)^2 = a_2(2a_2 - a_1),$$

qui peut s'écrire

$$\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{1}{4}\frac{a_2}{a_3}.$$

Comme les apothèmes vont en croissant, le rapport $\frac{a_2}{a_3}$ est moindre que l'unité ; donc le second membre de notre dernière égalité est inférieur à $\frac{1}{4}$; donc on a

$$a_3 - a_2 < \tfrac{1}{4}(a_2 - a_1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. *Remarque.* — Les démonstrations précédentes montrent évidemment que, dans la suite des rayons comme dans celle des apothèmes, le rapport des différences considérées non-seulement est toujours moindre que $\frac{1}{4}$, mais qu'il tend vers cette limite $\frac{1}{4}$ lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment.

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ;

PAR M. H. LAURENT.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des variables indépendantes, servant à fixer la position d'un système de corps ; pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit, comme l'on sait, que le travail des forces agissant sur le système, abstraction faite des forces développées par les liaisons, soit nul pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Si les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ont été choisies comme nous l'avons dit, c'est-à-dire indépendantes, il n'existera entre elles aucune liaison, et le travail prendra la forme

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k,$$

que nous désignerons par δU, cette notation n'impliquant nullement en soi l'existence d'une fonction U. La condition d'équilibre sera alors

$$\delta U = 0, \tag{1}$$

et cette formule se décomposera, comme l'on sait, dans les suivantes : $Q_1 = 0, Q_2 = 0, \ldots$, qui fixeront les valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Supposons l'équation (1) satisfaite, et par suite le système en équilibre, nous dirons que l'équilibre est *stable dans la direction* $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$. Si, rendant par l'introduction de nouvelles liaisons le mouvement impossible dans toute autre direction, le corps est susceptible de repasser par sa position d'équilibre quand on l'en écarte infiniment peu dans la direction considérée, en l'abandonnant sans vitesse initiale, on dit que l'équilibre est instable dans la direction $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$, quand il n'est pas stable dans cette direction.

Cela posé, écartons le corps infiniment peu de sa position d'équilibre dans la direction $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$, en sorte que ses coordonnées deviennent $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots$. Si nous l'abandonnions à lui-même dans sa nouvelle position, il n'y serait pas, en général, en équilibre, et, en rendant le mouvement impossible dans toutes les directions autres que $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$, il tendrait à se mouvoir dans cette direction. Pour savoir dans quel sens, nous ferons usage de l'artifice suivant :

Observons que, s'il y a tendance au mouvement, on pourra toujours s'y opposer en appliquant en chaque point du système une force égale, mais directement opposée à celle qui produirait son mouvement s'il était libre. Le système sera alors en équilibre dans sa nouvelle position, et la somme des travaux de toutes les forces qui le sollicitent doit être nulle; mais, si nous considérons en particulier le travail dans le mouvement virtuel coïncidant avec le mouvement réel que prendrait le corps si l'on n'avait pas introduit de nouvelles forces, le travail de chacune de ces nouvelles forces, qui sont les forces d'inertie, sera négatif. Désignons alors leur travail total par $-\Theta$. Le travail des autres forces sera la valeur que prend δU quand on y remplace q_1 par $q_1 + \delta q_1$, q_2 par $q_2 + \delta q_2, \ldots$, si le corps s'éloigne de sa position d'équilibre; au contraire, il sera ce que devient δU quand on y remplace q_1 par $q_1 - \delta q_1$, q_2 par $q_2 - \delta q_2, \ldots$, si le corps se rapproche et repasse par sa position d'équilibre; dans le premier cas, δU devient

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \ldots + Q_k \delta q_k + \delta q_1 \sum \frac{dQ_1}{dq} \delta q + \delta q_2 \sum \frac{dQ_2}{dq} \delta q,$$

ou bien

$$\delta U + \sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j,$$

et, dans le second cas,

$$Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_k \delta q_k - \delta q_1 \sum \frac{dQ_1}{dq} \delta q - \ldots,$$

ou bien

$$\delta U - \sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j.$$

Si nous posons

$$\sum \frac{dQ_i}{dq_j} \delta q_i \delta q_j = \delta^2 U,$$

l'équation qui exprime les conditions d'équilibre du corps dans sa nouvelle position sera

$$-\Theta + \delta U \pm \delta^2 U = 0,$$

le signe + convenant au cas où le corps s'éloigne, le signe — au cas où il se rapproche de sa position d'équilibre. Si l'on observe que δU est nul en vertu de (1), on aura

$$-\Theta \pm \delta^2 U = 0, \quad \text{ou} \quad \pm \delta^2 U = \Theta;$$

le second membre Θ est positif pour le déplacement virtuel coïncidant avec celui qui a réellement lieu; car $-\Theta$ est, d'après la remarque faite plus haut, essentiellement négatif; donc il faut prendre devant le premier membre le signe + si $\delta^2 U$ est positif, et le signe — s'il est négatif.

Ceci revient à dire que, si $\delta^2 U$ est positif, le mouvement réel que prendra le corps sera $+\delta q_1 + \delta q_2, \ldots$; il s'éloignera donc de sa position d'équilibre, et il y aura instabilité. Si, au contraire, $\delta^2 U$ est négatif, le déplacement réel du corps sera $-\delta q_1$, $-\delta q_2, \ldots$, c'est-à-dire qu'il repassera par sa position d'équilibre, et que cet équilibre sera stable. Si le signe de $\delta^2 U$ reste indéterminé, il y aura en général instabilité.

Ainsi, en résumé, pour voir si un corps est en équilibre stable ou instable dans une position donnée $q_1, q_2, \ldots$ et le long d'une direction δq_1, $\delta q_2, \ldots$, il faut former la quantité $\delta^2 U$, et l'équilibre sera stable le long de la direction considérée, si le long de cette direction on a $\delta^2 U < 0$: il sera instable dans le cas contraire.

Ces conclusions sont d'ailleurs soumises à des restrictions sur lesquelles on n'attire peut-être pas assez l'attention dans les Cours de Mécanique, restrictions qui infirment souvent le principe des vitesses virtuelles lui-même. Ainsi il est incontestable, pour tout homme de bon sens, qu'un point matériel pesant est en équilibre stable dans toutes les directions lorsqu'il est au fond d'un entonnoir conique à axe vertical; cependant on n'a pas $\delta U = 0$, en effet, appelant δq le déplacement en hauteur, δU est de la forme $p\,\delta q$, et ni p ni δq ne peuvent être nuls.

Lorsque δU est une différentielle exacte, il existe une fonction U dont la différentielle est nulle dans le cas de l'équilibre, et il est clair que, si l'équilibre est stable dans toutes les directions, U passe par un maximum; si l'équilibre est instable dans toutes les directions, U passe par un minimum. On dit alors simplement que l'équilibre est *stable* ou *instable*.

Les directions relatives à la stabilité et à l'instabilité sont distribuées d'une façon assez curieuse et qui n'a pas encore été remarquée, à ce que je crois.

Considérons un point matériel m soumis à l'action de forces qui se réduisent à trois, X, Y, Z, parallèles respectivement à trois axes rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées du point matériel; dans ce cas, on a

$$\delta U = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z,$$

$$\delta^2 U = \frac{dX}{dx}\,\delta^2 x + \left(\frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy}\right)\delta y\,\delta z + \ldots.$$

Si l'on construit alors la surface conique ayant pour équation

$$(2) \qquad \frac{dX}{dx}\,\xi^2 + \left(\frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy}\right)\eta\zeta = \ldots = 0,$$

ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes relatives au point m considéré comme origine, il est facile de voir que cette surface partagera l'espace en deux régions : dans l'une d'elles $\delta^2 U$ sera positif, et dans l'autre il sera négatif. Sur la surface même, on aura $\delta^2 U = 0$. Donc, si par une position d'équilibre d'un point matériel libre on fait passer un certain cône du second degré, l'équilibre sera stable pour tous les déplacements effectués dans une certaine région de l'espace déterminé par ce cône, et l'équilibre sera instable pour tous les déplacements correspondant à l'autre région. Si le cône en question est imaginaire, il y aura stabilité ou instabilité dans toutes les directions; la même chose aura évidemment lieu pour un point faisant partie d'un système quelconque avec ou sans liaisons, pourvu que l'on substitue aux liaisons les forces qui les produisent; on pourra ainsi, pour chaque point d'un système, construire les régions de stabilité et d'instabilité.

On pourra toujours diriger les axes de coordonnées de telle sorte que le cône (2) soit rapporté à ses axes; mais alors les termes en $\eta\zeta$, en $\xi\zeta$ et en $\eta\xi$ disparaissent, et la quantité $\delta^2 U$ affectera la forme

$$\frac{dX}{dx}\delta x^2 + \frac{dY}{dy}\delta y^2 + \frac{dZ}{dz}\delta z^2.$$

Autour du point m considéré dans sa position d'équilibre, décrivons une petite sphère de rayon r, puis supposons le point m dérangé de sa position d'équilibre, mais placé sur la sphère dans la direction δx, δy, δz; portons sur cette direction une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{\delta^2 U}}$: le lieu des points ainsi obtenus aura pour équation, en coordonnées polaires $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 U}},$$

ou bien, en dirigeant les axes de la façon la plus simple,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX}{dx}r^2\cos^2\alpha + \frac{dY}{dy}r^2\cos^2\beta + \frac{dZ}{dz}r^2\cos^2\gamma}}.$$

En prenant des coordonnées ordinaires $\xi = \rho \cos\alpha$, $\eta = \rho \cos\beta$, $\zeta = \rho \cos\gamma$, cette équation devient

$$\frac{1}{r^2} = \frac{dX}{dx}\xi^2 + \frac{dY}{dy}\eta^2 + \frac{dZ}{dz}\zeta^2.$$

Nous trouvons ainsi une surface du second degré dont le cône asymptote fournissait les régions de stabilité, et la surface n'est réelle que dans les régions d'instabilité. Toutefois on peut adjoindre à cette surface sa conjuguée, et l'on obtient ainsi une double surface du second ordre à centre, dont les rayons vecteurs permettront de comparer dans toutes les directions les valeurs de $\delta^2 U$.

Or, si l'on remonte à l'origine de cette théorie, $\delta^2 U$ est égal en valeur absolue à la quantité que nous avons appelée Θ et qui représente le travail des forces d'inertie. Ce travail, pour un déplacement d'amplitude r, est égal à la force vive acquise par le système; on peut donc dire que la double surface du second ordre à laquelle nous venons de parvenir sert à faire connaître la force vive avec laquelle un point déplacé d'une quantité constante revient à sa position d'équilibre. Cette force vive est maxima et minima, comme l'on voit, dans deux directions rectangulaires.

Considérons maintenant un point m en équilibre sur une surface que nous représenterons par l'équation

$$z = f(x, y),$$

en représentant, conformément à l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction f. On pourra poser

$$\delta U = X\delta x + Y\delta y$$

et

$$\delta^2 U = \frac{dX}{dx}\delta x^2 + \left(\frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dx}\right)\delta x \delta y + \frac{dY}{dy}\delta y^2.$$

Si l'on prend pour plan des xy le plan tangent à la surface menée par le point M, l'équation $\delta^2 U = 0$, ou bien

$$\frac{dX}{dx}\delta x^2 + \left(\frac{dY}{dy} + \frac{dX}{dx}\right)\delta x \delta y + \frac{dY}{dy}\delta y^2 = 0,$$

dans laquelle on considère δx et δy comme des coordonnées courantes, représentera deux droites qui sépareront les portions de surfaces relatives à l'équilibre stable ou instable. Si l'on représente par P, Q, R les composantes de la force qui sollicite le point m, on aura

$$X = P + Rp, \quad Y = Q + Rq,$$

et l'équation $\delta^2 U$ deviendra, en observant que $p = 0$, $q = 0$,

$$\left(\frac{dP}{dx} + rR\right)\delta x^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dy} + 2sR\right)\delta x \delta y + \left(\frac{dQ}{dy} + tR\right)\delta y^2 = 0.$$

En prenant pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice, on a

$$\left(\frac{dP}{dx} + Rr\right)\delta x^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dy}\right)\delta x \delta y + \left(\frac{dQ}{dy} + Rt\right)\delta y^2 = 0,$$

Toutes les fois que l'on aura $\frac{dP}{dx} = 0$, $\frac{dQ}{dy} = 0$ et $\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dy}$, l'équation précédente représentera les asymptotes de l'indicatrice. Or les équations précédentes supposent $P = ay + b$, $Q = -ax + c$: ainsi l'on peut dire que, si les composantes parallèles au plan tangent mené par le point m de la force qui sollicite ce point sont des fonctions linéaires de la forme $ay + b$ et

$- ax + c$, les régions de stabilité et d'instabilité seront délimitées par les asymptotes de l'indicatrice.

Ainsi, par exemple, si un point pesant est en équilibre sur une surface, l'équilibre sera stable dans l'un des angles des asymptotes de l'indicatrice, et instable dans l'autre angle, ce qui est conforme aux indications du bon sens.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 58);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

Tangente. — La direction de la tangente en M est fournie par

$$dx\,\text{OA} + dy\,\text{OB},$$

dx et dy étant liés par la relation, dérivée de (2),

$$x\,dx - y\,dy = 0.$$

Cela donne

$$(3) \qquad \text{MT} \mathrel{\underline{\triangle}} y\,\text{OA} + x\,\text{OB},$$

relation qu'on aurait aussi en dérivant par rapport à t l'équipollence

$$\text{OM} \mathrel{\underline{\triangle}} \text{ch}\,t.\text{OA} + \text{sh}\,t.\text{OB}.$$

Cette tangente rencontre OA en un point S que l'on détermine, en faisant que $\text{OS} \mathrel{\underline{\triangle}} \text{OM} + k\,\text{MT}$ ne renferme pas de terme en OB. Cela donne

$$k = -\frac{y}{x},$$

et

$$(4) \qquad \text{OS} \mathrel{\underline{\triangle}} \frac{1}{x}\,\text{OA}.$$

Si P est le pied de l'ordonnée MP, on a donc

$$\text{OP}.\text{OS} \mathrel{\underline{\triangle}} (\text{OA})^2.$$

Propriétés de la droite MN *formant avec* MT *un angle égal à* AOB. — La droite $\text{MN} \mathrel{\underline{\triangle}} \text{MT}.\text{OB} : \text{OA} \mathrel{\underline{\triangle}} y\,\text{OB} + x\,(\text{OB})^2 : \text{OA}$ forme avec la tangente l'angle constant AOB. Soit $\text{N}'\text{M} \mathrel{\underline{\triangle}} \text{MN}$. Il viendra

$$(5) \quad \text{OM} - \text{N}'\text{M} \mathrel{\underline{\triangle}} \text{ON}' \mathrel{\underline{\triangle}} x\,\text{OA} - x\,(\text{OB})^2 : \text{OA} \mathrel{\underline{\triangle}} x\,\text{OA} - x\,\text{OE} \mathrel{\underline{\triangle}} x\,\text{EA},$$

si l'on forme le triangle BOE directement semblable à AOB.

On a aussi

$$PN' \triangleq ON' - OP \triangleq x\,EO,$$

et les deux triangles OPN′, AOE sont homothétiques.

Si OA, OB sont les axes, NMM′ est la normale; elle coupe dans un rapport constant l'abscisse OP.

Diamètres conjugués, théorèmes d'Apollonius. — Si l'on a

$$c^2 - d^2 = 1,$$

et

(6) $$OC \triangleq c\,OA + d\,OB, \quad OD \triangleq d\,OA + c\,OB,$$

ces droites OC, OD, sont deux demi-diamètres conjugués.

Les relations (6) donnent en effet

$$OA \triangleq c\,OC - d\,OD, \quad OB \triangleq -d\,OC + c\,OD,$$

et, substituant dans (1),

$$OM \triangleq (cy - dy)\,OC + (cy - dx)\,OD,$$

équipollence de la même forme que (1), car

$$(cx - dy)^2 - (cy - dx)^2 = 1.$$

La règle XII montre que les aires des triangles OCD, OAB sont égales.

On vérifie que la relation suivante existe entre OC et OD :

$$(OC)^2 - (OD)^2 \triangleq (OA)^2 - (OB)^2.$$

Si donc on pose

(7) $$(OA)^2 - (OB)^2 \triangleq (OF)^2,$$

on obtiendra deux points remarquables F, F_1 (foyers) indépendants du choix des diamètres.

La relation (7) donne

$$(OB)^2 \triangleq (OA - OF)(OA + OF),$$

et, remarquant que $OF_1 \triangleq -\,OF$,

$$(OB)^2 \triangleq AF.AF_1.$$

Donc : *en un point quelconque de l'hyperbole, la tangente est bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs, et le produit de ceux-ci est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.*

Trouver les foyers, connaissant deux diamètres conjugués. — Ce problème est résolu par l'équipollence (7), qu'on peut écrire

$$(OF)^2 \triangleq OA\,[OA - (OB)^2 : OA] \triangleq OA\,(OA - OE) \triangleq OA.EA,$$

c'est-à-dire que l'excentricité est moyenne proportionnelle entre AO, AE, et parallèle à la bissectrice de l'angle OAE.

Autrement

$$(OF)^2 \triangleq (OA + OB)(OA - OB) \triangleq OK.OK_1,$$

si l'on fait $AK \triangleq - AK_1 \triangleq OB$.

L'excentricité est donc aussi moyenne proportionnelle entre OK, OK_1, et bissectrice de l'angle de ces deux droites, dans lesquelles on reconnaît aisément les asymptotes.

Propriétés diverses. — Soient (*)

$$OL \triangleq y\,OK, \quad OL_1 \triangleq y\,OK_1, \quad OL' \triangleq x\,OK, \quad OL'_1 \triangleq x\,OK_1.$$

Si l'on se rappelle que

$$OK \triangleq OA + OB, \quad OK_1 \triangleq OA - OB,$$

on trouvera facilement les relations suivantes :

$$LM \triangleq (x - y)\,OA, \quad L'M \triangleq -(x - y)\,OB,$$

$$OM + OL_1 \triangleq 2OQ \triangleq (x + y)\,OA, \quad L'_1M \triangleq (x + y)\,OB.$$

On peut déduire de là plusieurs équipollences, parmi lesquelles nous ferons remarquer les suivantes :

$$2OQ.LM \triangleq (OA)^2, \quad ML'.ML'_1 \triangleq -(OB)^2, \quad 2OQ.ML' \triangleq ML.ML'_1 \triangleq OA.OB,$$

$$LM : ML' \triangleq OA : OB, \quad 2OQ : L'_1M \triangleq OA : OB.$$

Il est très-facile de les interpréter géométriquement, en remarquant que ML est une parallèle à un diamètre transverse, limitée à une asymptote, LL_1 et $L'ML'_1$ des parallèles au diamètre conjugué, limitées aux deux asymptotes, et Q le point milieu de ML_1.

Interprétations mécaniques. — Dans le mouvement exprimé par

$$OM \triangleq \operatorname{ch} t.OA + \operatorname{sh} t.OB,$$

la vitesse est

$$\operatorname{sh} t.OA + \operatorname{ch} t.OB,$$

et l'accélération

$$\operatorname{ch} t.OA + \operatorname{sh} t.OB \triangleq OM.$$

Ce mouvement est donc celui d'un point *repoussé* par un centre fixe en raison de la distance.

En se reportant aux formules

$$\operatorname{ch} t = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \operatorname{sh} t = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$

on voit que l'équipollence de l'hyperbole peut se mettre sous la forme

$$OM \triangleq \tfrac{1}{2}OK\,e^t + \tfrac{1}{2}OK_1\,e^{-t}.$$

Cette courbe s'obtient donc par la composition des deux mouvements rectilignes représentés par $\frac{1}{2}OK\,e^t$, $\frac{1}{2}OK_1\,e^{-t}$, s'effectuant suivant les asymptotes OK, OK_1.

Le produit de ces deux termes étant constant, on a la propriété connue : *le produit des deux coordonnées d'un point est constant, les asymptotes étant prises pour axes coordonnés.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Cycloïde.

153. Si un mouvement rectiligne uniforme est composé avec un mouvement circulaire de vitesse égale à celle du premier, on aura, en prenant les constantes de la manière que nous reconnaîtrons dans la suite être la plus convenable,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{OM} \triangleq t - \sqrt{}\,\varepsilon^t.$$

La courbe M peut être considérée comme engendrée par un point d'une circonférence de rayon égal à 1, qui se meut sur cette circonférence, tandis que le centre parcourt une droite d'inclinaison nulle. Comme la rotation entière du point mobile est achevée lorsque $t = 2\pi$, il est aisé de voir par là que la courbe est la cycloïde ordinaire.

154. Pour déterminer la tangente à la cycloïde, il est nécessaire de connaître la dérivée, par rapport à t, de $\varepsilon^t \triangleq e^{t\sqrt{}}$. L'Algèbre des imaginaires nous enseigne que cette dérivée est

$$\sqrt{}\,.\,e^{t\sqrt{}} \triangleq \sqrt{}\,\varepsilon^t.$$

Si l'on désirait une démonstration géométrique, on supposerait que, dans le cercle exprimé par

$$\mathrm{CM} \triangleq \varepsilon^t,$$

t reçoive l'accroissement ω. La corde correspondante MM_1, divisée par ω, c'est-à-dire par la longueur de l'arc correspondant du cercle de rayon 1, donne $\mathrm{MM}_1 : \omega$, dont la limite, pour ω infiniment petit, sera une droite égale à 1, et perpendiculaire au rayon CM. Donc la dérivée de $\mathrm{CM} \triangleq \varepsilon^t$ est cette expression même ε^t multipliée par le rayon.

155. La tangente à la cycloïde est donnée en direction par la dérivée de l'équipollence (1), c'est-à-dire par

$$(2) \qquad \mathrm{MT} \triangleq 1 + \varepsilon',$$

et la normale a pour direction

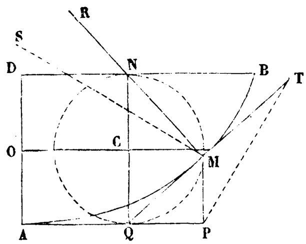
$$\mathrm{MN} \triangleq \surd + \surd\varepsilon'.$$

Il en résulte

$$\mathrm{ON} \triangleq t + \surd,$$

et, comme $\mathrm{OC} \triangleq t$ (*fig* 33) détermine la position variable du centre C du cercle générateur, il s'ensuit que la normale passe par l'extrémité du rayon $\mathrm{CN} \triangleq \surd$, perpendiculaire sur la base DB. On voit qu'on trouve ici cette propriété de la cycloïde d'une manière tout à fait

Fig. 33.



spontanée; le calcul sera un peu moins facile, si nous cherchons où la tangente MT rencontre la droite NCQ. Nous poserons, pour cela,

$$\mathrm{OQ} \triangleq t - q\surd \triangleq \mathrm{OM} + p\,\mathrm{MT} \triangleq t + p + (p - \surd)\varepsilon',$$

q, p étant deux quantités réelles qu'il reste à déterminer au moyen des deux équations en lesquelles se décompose cette équipollence, si l'on sépare les parties réelle et imaginaire

$$t = t + p + p\cos t + \sin t,$$

$$-q = p\sin t - \cos t.$$

Ces équations donnent $q = 1$, et par suite la tangente MT coupe le cercle générateur au point Q, diamétralement opposé à N (chose évidente, du reste).

156. La dérivée de la vitesse MT est

$$(3) \qquad \sqrt{\varepsilon^t} \triangleq \mathrm{MC}\,;$$

c'est l'*accélération* du mouvement exprimé par l'équipollence (1); en d'autres termes, le point M, qui se meut sur la cycloïde selon cette loi, peut être considéré comme attiré par une force constante vers le centre mobile C du cercle générateur.

157. Si, comme au n° **143**, nous cherchons le point R de la normale MN, où celle-ci rencontre la normale infiniment voisine, nous devrons égaler à zéro la dérivée de

$$\mathrm{OR} \triangleq t - \sqrt{\varepsilon^t} + p\sqrt{(1 + \varepsilon^t)},$$

c'est-à-dire que

$$(1 + \varepsilon^t - p\varepsilon^t)\, dt + \sqrt{(1 + \varepsilon^t)}\, dp \triangleq 0.$$

En considérant $\frac{dt}{dp}$ comme un rapport tout à fait arbitraire, on voit (*) que le produit

$$(1 + \varepsilon^t - p\varepsilon^t)\,\mathrm{cj}\,(\sqrt{\ } + \sqrt{\varepsilon^t}) \triangleq -\sqrt{\ } - \sqrt{\varepsilon^t} + p\sqrt{\varepsilon^t} - \sqrt{\varepsilon^{-t}} - \sqrt{\ } + p\sqrt{\ }$$

doit être identique à son propre conjugué; par suite, $p = 2$.

(*) En général, si $\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy \triangleq 0$, on a en même temps

$$\mathrm{cj.A}\,dx + \mathrm{cj.B}\,dy \triangleq 0.$$

Multipliant la première équipollence par cj.B, la seconde par B et retranchant, on obtient

$$\mathrm{A\ cj.B} \triangleq \mathrm{cj.AB}.$$

(*Note du Traducteur.*)

Donc le rayon de courbure MR est double de la normale MN. Le lieu de tous les centres R, c'est-à-dire la développée, est donné par l'équipollence

$$(4)\qquad \mathrm{OR} \mathrel{\underline{\frown}} 2\sqrt{} + t + \sqrt{}\varepsilon^t,$$

c'est par conséquent une cycloïde égale à la première

$$\mathrm{OM} \mathrel{\underline{\frown}} t - \sqrt{}\varepsilon^t.$$

Les rayons des cercles générateurs en M et en R sont $-\sqrt{}\varepsilon^t$, $\sqrt{}\varepsilon^t$, c'est-à-dire parallèles, mais de directions opposées.

158. Soit que, par chaque point M de la cycloïde, on mène la droite MS, qui forme un angle donné α avec le rayon de courbure MR, et présente avec ce dernier un rapport donné a, de sorte que

$$\mathrm{MS} \mathrel{\underline{\frown}} a\,\varepsilon^\alpha \mathrm{MR},$$

et que l'on cherche le lieu de tous les points S.

On a aisément

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathrm{OS} &\mathrel{\underline{\frown}} t - \sqrt{}\varepsilon^t + 2a\sqrt{}\varepsilon^\alpha(1+\varepsilon^t) \\ &\mathrel{\underline{\frown}} 2a\sqrt{}\varepsilon^\alpha + t + (2a\varepsilon^\alpha - 1)\sqrt{}\varepsilon^t, \end{aligned}$$

ce qui montre que la courbe S est engendrée, elle aussi, par la composition d'un mouvement continu en ligne droite, exprimé par le terme t, avec un mouvement de rotation dont le rayon constant est $2a\varepsilon^\alpha - 1$.

Par suite, la courbe S est une cycloïde, qui est ordinaire toutes les fois que l'on a

$$\mathrm{gr.}\,(2a\varepsilon^\alpha - 1) = 1,$$

c'est-à-dire (52)

$$(2a\varepsilon^\alpha - 1)(2a\varepsilon^{-\alpha} - 1) \mathrel{\underline{\frown}} 1 \quad \text{ou (92)} \quad a = \cos\alpha,$$

auquel cas la courbe S est développée imparfaite de la courbe M.

159. Comme nouvelle application de notre méthode et de la manière très-simple d'exprimer une cycloïde, recherchons la trajectoire orthogonale de toutes les positions que prend la cycloïde, en se mouvant parallèlement à sa base. Ces cycloïdes, en nombre infini, sont exprimées par

$$(6)\qquad \mathrm{OM} \bumpeq \tau + t - \sqrt{}\varepsilon^{t},$$

τ étant le paramètre de position qui distingue l'une de l'autre les cycloïdes égales.

L'équipollence (6) exprimera aussi la trajectoire cherchée, si t est une telle fonction de τ, qu'elle indique sur chaque cycloïde le point où celle-ci est rencontrée par la trajectoire. La tangente à la trajectoire sera par suite exprimée par la dérivée de (6), prise par rapport à t, dérivée que nous désignerons par la caractéristique $\mathfrak{D}$. La tangente $\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^{t}$ devra en outre (pour que l'on ait une trajectoire orthogonale) être perpendiculaire à la tangente $1 + \varepsilon^{t}$ (155) de chaque cycloïde. Donc $\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^{t}$ doit être parallèle à $\sqrt{} + \sqrt{}\varepsilon^{t}$, c'est-à-dire que l'expression

$$(\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^{t})(-\sqrt{} - \sqrt{}\varepsilon^{-t}) \bumpeq -(1+\varepsilon^{-t})\sqrt{}\mathfrak{D}\tau - 2\sqrt{} - \sqrt{}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t})$$

doit être équipollente à sa conjuguée, ce qui donne

$$\mathfrak{D}\tau = -2,$$

d'où

$$\tau = c - 2t;$$

par conséquent, toutes les trajectoires orthogonales cherchées sont exprimées par

$$\mathrm{OM} \bumpeq c - t - \sqrt{}\varepsilon^{t},$$

c'est-à-dire sont d'autres cycloïdes égales aux premières, et ayant leurs bases sur la droite AQP.

160. On définit géométriquement la longueur d'un arc curviligne AM par la limite de la somme des cordes infiniment petites (c'est-à-dire diminuant au-dessous de toute quantité) inscrites dans cet arc ; par suite, la dérivée de cette longueur sera la limite du rapport de la corde MM_1 à l'accroissement correspondant de t, c'est-à-dire sera précisément la longueur de la droite MT, donnée par l'équipollence (2) du n° **155**. Donc la dérivée de l'arc de cycloïde est (**52**),

$$\mathfrak{D}s = \text{gr.}\,\text{MT} = \sqrt{(1+\varepsilon^t)(1+\varepsilon^{-t})} = \varepsilon^{\frac{t}{2}} + \varepsilon^{-\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{t}{2},$$

et, comptant l'arc à partir du point A, correspondant à $t=0$, on a

$$s = \text{AM} = 4\sin\frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \text{AMB} = 4.$$

161. On trouve (*) que l'aire σ du triangle mixtiligne APM, limité par l'arc AM et l'ordonnée PM, a pour dé-

---

(*) Soit en effet, en général,

$$\text{OM} \,\underline{\triangle}\, x + y\sqrt{},$$

d'où

$$\text{MT} \,\underline{\triangle}\, \frac{dx}{dt} + \sqrt{}\,\frac{dy}{dt}.$$

La différentielle de l'aire mixtiligne est

$$\text{MP}\,dx = d\sigma\,;$$

mais le triangle MPT a pour aire

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{MP}\,\frac{dx}{dt}\,;$$

donc

$$d\sigma = 2\sigma_1\,dt, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 2\sigma_1.$$

(*Note du Traducteur.*)

rivée le double du triangle MPT, c'est-à-dire, d'après la règle XII, que l'on a

$$\mathfrak{D}\sigma = \frac{\surd}{2}(\mathrm{MP\,cj.MT} - \mathrm{cj.MP.MT}).$$

Dans le cas que nous considérons, la distance du point M à la droite OC est

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{OM} - \mathrm{cj.OM}) \triangleq \frac{\surd}{2}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t});$$

par suite

$$\mathrm{MP} \triangleq -\surd + \frac{\surd}{2}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t}).$$

De là

$$\mathfrak{D}\sigma = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(\varepsilon^{2t} + \varepsilon^{-2t}) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t),$$

et, en remontant aux fonctions primitives,

$$\sigma = \mathrm{APM} = \frac{t}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

Problèmes généraux.

162. Par ces quelques exemples, j'espère avoir montré comment la méthode des équipollences s'applique à l'étude des courbes, et comment celles-ci peuvent être exprimées par des équipollences de formes différentes des deux suivantes :

$$\mathrm{OM} \triangleq x + y\surd,$$
$$\mathrm{OM} \triangleq z\varepsilon^{u},$$

qui correspondent aux deux systèmes de coordonnées habituellement employés en Géométrie analytique. Ainsi l'équipollence de la cycloïde (153) est certainement plus simple que toute autre expression qu'on en puisse donner, et conduit par suite plus rapidement à la résolution des problèmes.

Nous allons maintenant résoudre les principaux problèmes relatifs aux courbes, en conservant à l'équipollence $OM \bumpeq \Phi(t)$ (133) toute sa généralité.

163. Problème. — *Trouver la développée d'une courbe* M. — En prenant les dérivées par rapport à la variable réelle t, dont OM est supposée fonction, la tangente à la courbe au point M sera

$$(1) \qquad MT \bumpeq \textcircled{d}OM.$$

Pour plus de rapidité, nous omettrons, dans les dérivées, le point fixe O, et nous écrirons $\textcircled{d}M$ au lieu de $\textcircled{d}OM$. Un point quelconque de la normale est conséquemment donné par

$$(2) \qquad MR \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\textcircled{d}M,$$

λ étant un coefficient réel arbitraire.

La développée, étant l'enveloppe de toutes les normales, sera donnée par

$$OR \bumpeq OM + \frac{1}{\lambda}\surd\textcircled{d}M,$$

pourvu que λ soit une telle fonction de t, que MR soit tangente à la développée au point R ; par suite, la droite

$$\textcircled{d}R \bumpeq \textcircled{d}M + \frac{1}{\lambda}\surd\,\textcircled{d}^2M - \frac{\textcircled{d}\lambda}{\lambda^2}\surd\textcircled{d}M$$

doit être parallèle à $\surd\textcircled{d}M$.

Multipliant par $\mathrm{cj}.\textcircled{d}M$, on voit que

$$\textcircled{d}M\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}M + \frac{1}{\lambda}\surd\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}M\,\textcircled{d}^2M$$

doit être parallèle à $\surd$.

De là, en ajoutant l'expression conjuguée, on aura

$$2\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}\,\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}+\frac{1}{\lambda}\sqrt{}\,(\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}\,\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}-\text{Ⓓ}\mathrm{M}\,\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}^2\mathrm{M})\triangleq 0.$$

Substituant dans l'équipollence (2), on a, pour expression du rayon de courbure,

$$(3)\qquad \mathrm{MR}\triangleq\frac{2(\text{Ⓓ}\mathrm{M})^2\,\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}}{\text{Ⓓ}\mathrm{M}\,\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}-\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}\,\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}}.$$

164. Au lieu d'employer cette relation (3), il pourra être commode de décomposer $\text{Ⓓ}^2\mathrm{M} : \text{Ⓓ}\mathrm{M}$ en ses parties réelle et imaginaire, c'est-à-dire de poser

$$(4)\qquad \frac{\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}}{\text{Ⓓ}\mathrm{M}}\triangleq l+\lambda\sqrt{},$$

et comme cette supposition rend identique l'équipollence précédente

$$2+\frac{\sqrt{}}{\lambda}\left(\frac{\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}}{\text{Ⓓ}\mathrm{M}}-\frac{\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}^2\mathrm{M}}{\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}}\right)\triangleq 0,$$

on voit que la valeur de λ, qu'il faut substituer dans (2), est précisément celle donnée par (4).

165. Appliquons la relation (3) au cas où la courbe M est rapportée aux coordonnées orthogonales habituelles, c'est-à-dire où l'on a

$$\mathrm{OM}\triangleq x+y\sqrt{},$$

x et y étant des fonctions de la variable t, par rapport à laquelle on prend les dérivées désignées par la caractéristique Ⓓ.

Les valeurs de

$$\text{Ⓓ}\mathrm{M}\triangleq\text{Ⓓ}x+\text{Ⓓ}y\sqrt{},$$
$$\mathrm{cj.}\,\text{Ⓓ}\mathrm{M}\triangleq\text{Ⓓ}x-\text{Ⓓ}y\sqrt{},\ldots,$$

substituées dans (3), donnent aisément

$$(5) \qquad \mathrm{MR} \mathrel{\hat{=}} \frac{2(\mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{D}y^2)(\mathfrak{D}x + \sqrt{}\,\mathfrak{D}y)}{2(\mathfrak{D}y\,\mathfrak{D}^2x - \mathfrak{D}x\,\mathfrak{D}^2y)\sqrt{}}$$
$$\mathrel{\hat{=}} \frac{(\mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{D}y^2)(\mathfrak{D}y - \sqrt{}\,\mathfrak{D}x)}{\mathfrak{D}y\,\mathfrak{D}^2x - \mathfrak{D}x\,\mathfrak{D}^2y}.$$

Ainsi se trouve complétement déterminée la position du centre de courbure R. Pour la grandeur du rayon MR, on a

$$\pm(\mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{D}y^2)^{\frac{3}{2}} : (\mathfrak{D}y\,\mathfrak{D}^2x - \mathfrak{D}x\,\mathfrak{D}^2y).$$

166. Un nouvel exemple relatif à cette théorie va nous être fourni par la courbe qu'exprime l'équipollence

$$\mathrm{OM} \mathrel{\hat{=}} e^{at}\varepsilon^t.$$

Cette courbe est une spirale logarithmique, parce que le logarithme du rayon vecteur gr. $\mathrm{OM} = e^{at}$ est proportionnel à l'azimut inc. $\mathrm{OM} = t$.

Prenant les dérivées par rapport à t, on aura

$$\mathfrak{D}\,\mathrm{M} \mathrel{\hat{=}} (a + \sqrt{})\,e^{at}\varepsilon^t,$$
$$\mathfrak{D}^2\mathrm{M} \mathrel{\hat{=}} (a + \sqrt{})^2 e^{at}\varepsilon^t.$$

Donc l'équipollence (4) donne

$$l + \lambda\sqrt{} \mathrel{\hat{=}} a + \sqrt{},$$

c'est-à-dire $\lambda = 1$; et (2) devient

$$\mathrm{MR} \mathrel{\hat{=}} (a\sqrt{} - 1)e^{at}\varepsilon^t.$$

La développée, donnée par

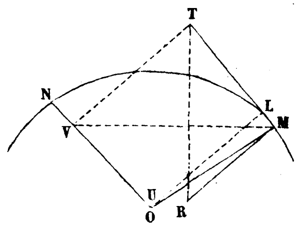
$$\mathrm{OR} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{OM} + \mathrm{MR} \mathrel{\hat{=}} a\sqrt{}\,e^{at}\varepsilon^t,$$

est une spirale logarithmique égale à M.

167. La décomposition effectuée au n° **164** peut se construire géométriquement. Outre $\mathrm{MT} \triangleq \textcircled{D}\mathrm{M}$, on construit (*fig.* 34)

$$\mathrm{MU} \triangleq \textcircled{D}^2\mathrm{M},$$

Fig. 34.



et l'on mène UL perpendiculaire sur MT. On aura

$$\mathrm{LU} \triangleq \lambda \sqrt{\mathrm{MT}},$$

et, par suite, la relation (2) nous donnera

$$\mathrm{MR} \triangleq (\mathrm{MT})^2 : \mathrm{UL}. \tag{6}$$

Ainsi par exemple, dans l'ellipse exprimée par

$$\mathrm{OM} \triangleq \cos t.\mathrm{OA} + \sin t.\mathrm{OB},$$

la droite

$$\mathrm{MT} \triangleq -\sin t.\mathrm{OA} + \cos t.\mathrm{OB}$$

est équipollente au demi-diamètre ON conjugué de OM, et la relation

$$\mathrm{MU} \triangleq -\mathrm{OM}$$

nous montre que U tombe au centre O de l'ellipse.

Par suite, le centre de courbure R pourra se déterminer en élevant les perpendiculaires MR, TV, et en menant TR perpendiculaire à MV (*).

(*) Car la similitude des deux triangles RMT, MTV donne

$$\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{MT}} \triangleq \frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{TV}} \triangleq \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{VT}} \triangleq \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{UL}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MR} \triangleq (\mathrm{MT})^2 : \mathrm{UL}.$$

(*Note du Traducteur.*)

Dans l'hypothèse où la courbe est engendrée par le mouvement d'un point M, *t* étant le temps, MT est la vitesse et MU (151) l'*accélération* du mouvement; par suite, le rayon de courbure est égal au carré de la vitesse, divisé par la composante normale de l'accélération.

168. Outre les expressions

$$\mathrm{OM} \mathrel{\underline{\frown}} x + y\sqrt{}, \quad \mathrm{OM} \mathrel{\underline{\frown}} z\varepsilon^{u},$$

il est bon de remarquer spécialement la suivante :

$$(7) \qquad \mathrm{OM} \mathrel{\underline{\frown}} \int \varepsilon^{\varphi}.ds \quad (*),$$

où φ (inclinaison de la tangente) est fonction de s, ou bien, ce qui revient au même, où ces deux variables sont fonctions de la variable indépendante t.

L'expression précédente donne

$$\mathcal{D}^2\mathrm{M} \mathrel{\underline{\frown}} (\mathcal{D}^2 s + \sqrt{}\,\mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}s)\varepsilon^{\varphi};$$

en vertu de (4), on a

$$l + \lambda\sqrt{} \mathrel{\underline{\frown}} \frac{\mathcal{D}^2 s}{\mathcal{D}s} + \sqrt{}\,\mathcal{D}\varphi,$$

et le rayon de courbure est exprimé par

$$(8) \qquad \mathrm{MR} \mathrel{\underline{\frown}} \sqrt{}\,\frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}\varphi}\,\varepsilon^{\varphi}.$$

(*A suivre.*)

(*) On arrive évidemment à cette expression en considérant une corde finie de la courbe comme la *somme géométrique* de tous les éléments infiniment petits de l'arc partant d'une extrémité de cette corde pour aboutir à l'autre. (*Note du Traducteur.*)

CORRESPONDANCE.

M. *Bourguet* nous écrit, au sujet de la solution donnée (2e série, t. XII, p. 577, question 1028), qu'il faut dans l'équation obtenue (p. 579) remplacer b par a et a par b, en dehors des parenthèses, et que le résultat se décompose en deux facteurs, de sorte que la conique fait partie du lieu cherché. Les observations de M. Bourguet sont suivies d'une nouvelle solution qui contient une discussion assez étendue; nous regrettons que le défaut d'espace nous oblige à remettre cette seconde solution à un autre numéro.

M. Édouard *Ortiz*, docteur ès sciences à Madrid, nous communique quelques remarques sur la Géométrie élémentaire, et particulièrement sur le quadrilatère inscrit dans un cercle. Du théorème de *Ptolémée* M. Ortiz déduit le théorème de *Pythagore*, et plusieurs autres propositions de la Géométrie élémentaire.

PUBLICATIONS RÉCENTES (1874).

Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, par *Claude Gaspard Bachet*, sieur *de Méziriac*. 3e édition revue, simplifiée et augmentée par M. *A. Labosne*, professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzévirs, titre en 2 couleurs, papier vergé, couverture en parchemin. (*Tiré à petit nombre.*) — Paris, Gauthier-Villars. Prix : 6 francs.

Elementi di Geometria, di *Francesco Rapisardi*, professore di Matematica nel collegio *Cutelli* di *Catania*.

L'opera è vendibile in *Catania*, presso *Concetto Battiato*, librario, via *Manzoni* (lire 8,00).

RECTIFICATION.

Page 112, ligne 9 (même tome), *au lieu de*

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2b^2 + 4b^2c^2,$$

lisez $$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1064

(voir 2e série, t. XI, p. 96);

PAR M. C. MOREAU.

On a une courbe fermée, plane et convexe. Si $d\sigma$ désigne un élément superficiel infiniment petit extérieur à la courbe, θ l'angle sous lequel on voit la courbe de cet élément, et t, t' les longueurs des tangentes à la courbe, issues de l'élément, la somme de toutes les quantités $\frac{d\sigma \sin\theta}{tt'}$, se rapportant à tous les éléments $d\sigma$ du plan extérieurs à la courbe, est égale à $2\pi^2$.

(F. DIDON.)

Soient C une courbe fermée, plane et convexe, AB, A'B' deux tangentes qui se coupent au point M sous l'angle θ et qui font respectivement des angles ω et ω' avec un axe fixe quelconque XY situé dans le plan; je mène les deux tangentes infiniment voisines déterminant le quadrilatère élémentaire Mabc que je prends pour valeur de $d\sigma$. Cela posé, $d\omega$ et $d\omega'$ étant supposés tous les deux du premier ordre, on aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$d\sigma = \mathrm{M}abc = \mathrm{M}a.\mathrm{M}b\sin\theta,$$

$$\mathrm{M}a = \frac{t'\,d\omega'}{\sin\theta}, \quad \mathrm{M}b = \frac{t\,d\omega}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma\sin\theta}{tt'} = d\omega\,d\omega'.$$

Si maintenant on fait la somme de toutes les quan tités telles que $d\omega.d\omega'$, en faisant varier successivement ω et ω' de ω à $2\pi + \omega$ et de ω' à $2\pi + \omega'$, il est clair que chaque élément plan, tel que $\mathrm{M}abc$, aura été pris deux fois, et que, par suite, la somme cherchée sera

$$\sum \frac{d\sigma\sin\theta}{tt'} = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega+2\pi}\int_{\omega'}^{\omega'+2\pi} d\omega\,d\omega' = 2\pi^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1066

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. C. MOREAU.

Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, on a

$$a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m} < (a+1)^{2m+3}.$$

(S. REALIS.)

Chassons le dénominateur 2.3^m, les inégalités à démontrer deviennent

$$2a^3(3a^2)^m < (2a^3 + 3a^2 + a)(3a^2 + 3a + 1)^m$$
$$< (2a^3 + 6a^2 + 6a + 2)(3a^2 + 6a + 3)^m,$$

et, sous cette forme, elles sont évidentes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey, Kruschwitz et Droiteau, élève du lycée de Moulins.

Question 1076

(voir 2e série, t. XI, p. 144);

Par M. MORET-BLANC.

Étant donnés une droite et un point, on mène par le point deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné, puis la seconde tangente commune à ces deux cercles. Le lieu du point symétrique du point donné par rapport à cette tangente est un limaçon de Pascal, qui a pour l'un de ses foyers le point donné; l'autre foyer est le point symétrique du point donné, par rapport à la droite donnée.

(H. Faure.)

Soient O et DD′ le point et la droite donnés, d leur distance et 2α l'angle constant formé par les rayons menés du point O aux centres de deux circonférences conjuguées.

Je prends le point O pour pôle et la perpendiculaire menée de ce point à DD′, mais prolongée en sens contraire, pour axe polaire.

Les centres des cercles sont situés sur une parabole ayant le point O pour foyer et la droite DD′ pour directrice; la droite qui joint les centres de deux cercles conjugués est vue du foyer O sous un angle constant 2α : elle enveloppe donc une ellipse ayant le point O pour foyer (Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, n° 480). On aura les extrémités du grand axe en cherchant les points où l'axe polaire est rencontré par la ligne des centres quand elle est parallèle à la droite DD′, c'est-à-dire quand les circonférences conjuguées ont même rayon.

On a alors

$$r_1 = d + r_1 \cos\alpha,$$

$$r_2 = d - r_2 \cos\alpha,$$

d'où

$$r_1 \cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = a + c,$$

$$r_2 \cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = a - c,$$

$$a = \frac{d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad c = \frac{d\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$2a$ et $2c$ désignant respectivement le grand axe et la distance des foyers.

Le lieu des symétriques du point O, par rapport à toutes les tangentes à l'ellipse, c'est-à-dire le lieu des seconds points d'intersection des circonférences conjuguées, est le cercle directeur décrit du second foyer. Si l'on nomme r et θ les coordonnées polaires d'un point du lieu cherché, la corde commune des deux circonférences conjuguées correspondantes fait, avec l'axe polaire, l'angle $\frac{\theta}{2}$, et, en appelant δ sa longueur, on a

$$4a^2 = 4c^2 + \delta^2 - 4c\delta\cos\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\delta = 2c\cos\frac{\theta}{2} \pm 2\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

La distance du point O à la seconde tangente commune est égale, par raison de symétrie, à la distance du second point d'intersection des deux circonférences à la droite DD', c'est-à-dire à

$$\delta\cos\frac{\theta}{2} + d.$$

Le rayon vecteur r est le double de cette distance; donc l'équation du lieu cherché est

$$r = 4c\cos^2\frac{\theta}{2} \pm 4\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + 2d,$$

équation qui devient, en faisant disparaître le radical et ayant égard aux valeurs de a et de c,

$$(1)\qquad r^2 - 4cr\cos\theta - 4(c+d)r + 4d^2 = 0.$$

Si l'on transporte le pôle au point O′, symétrique du point O par rapport à la droite DD′, on obtient l'équation

$$(2)\qquad r = 4(c+d)\cos\theta \pm 4\sqrt{c(c+d)},$$

ou

$$r = \frac{4d}{\sin^2\alpha}\cos\theta \pm \frac{4d\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

qui représente bien un limaçon de Pascal, ayant pour pôle la nouvelle origine (*).

Il est clair que le lieu des projections du point O sur les tangentes communes serait un autre limaçon de Pascal, ayant pour foyer la projection du point O sur DD′.

Note du Rédacteur. — Pour résoudre cette question par la Géométrie élémentaire, je nommerai C, C′ les centres des deux cercles; D, D′ les points auxquels ils touchent la droite donnée; G le point d'intersection de la droite des centres et de la tangente commune donnée DD′; GH la seconde tangente commune; AO, AM les perpendiculaires abaissées du point donné A sur les deux tangentes GH, GD; O′, M′ les points symétriques de A, par rapport à ces deux droites, et enfin 2α l'angle donné CAC′.

Les distances GC, GC′ étant proportionnelles aux rayons AC, AC′, la droite GA est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle CAC′; il en résulte que l'angle GAC est le complément de α.

Les triangles GAC, GDC donnent

$$AC = CG\,\frac{\sin AGC}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad CD = CG\sin CGD,$$

donc

$$(1)\qquad \cos\alpha = \frac{\sin AGC}{\sin CGD};$$

(*) M. Maurice Cabart, garde général des forêts, a aussi trouvé l'équation d'un limaçon de Pascal, au moyen de plusieurs transformations successives de coordonnées.

mais, la ligne GC étant bissectrice de l'angle OGM des tangentes, on a

$$\text{AGC} = \pm \tfrac{1}{2}(\text{AGM} - \text{AGO}) = \pm \tfrac{1}{2}(\text{AOM} - \text{AMO})$$

et

$$\text{CGM} = \tfrac{1}{2}(\text{AGM} + \text{AGO}) = \tfrac{1}{2}(\text{AOM} + \text{AMO});$$

il s'ensuit

$$\cos\alpha = \pm \frac{\sin \frac{1}{2}(\text{AOM} - \text{AMO})}{\sin \frac{1}{2}(\text{AOM} + \text{AMO})} = \pm \frac{\sin \text{AOM} - \sin \text{AMO}}{\sin \text{OAM}} = \pm \frac{\text{AM} - \text{AO}}{\text{MO}},$$

d'où

(1) $$\text{AM} \pm \text{MO} \cos\alpha = \text{AO},$$

et, par conséquent,

(2) $$\text{AM}' \pm \text{M}'\text{O}' \cos\alpha = \text{AO}'.$$

Cette dernière égalité montre que le lieu du point O′ est un limaçon de Pascal, dont les points A et M′ sont les foyers.

Remarque. — L'équation (2) représente, en coordonnées bipolaires, le lieu du point O′. Il est facile d'en déduire l'équation de ce lieu en prenant pour coordonnées le rayon vecteur $\text{M}'\text{O}' = \rho$, et l'angle $\text{O}'\text{M}'\text{A} = \omega$ que ce rayon vecteur forme avec l'axe polaire M′A; car, dans le triangle AM′O′, on a, en désignant par $2d$ le côté AM′,

$$\overline{\text{AO}'}^2 = 4d^2 + \rho^2 - 4d\rho\cos\omega.$$

D'autre part, l'équation (2) donne

$$\text{AO}'^2 = 4d^2 + \rho^2\cos^2\alpha \pm 4d\rho\cos\alpha;$$

donc

$$\rho^2 - 4d\rho\cos\omega = \rho^2\cos^2\alpha \pm 4d\rho\cos\alpha,$$

ou

$$\rho = \frac{4d\cos\omega}{\sin^2\alpha} \pm \frac{4d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

(G.).

QUESTIONS.

1131. D'un point quelconque (x_0, y_0) du plan, on peut mener $2m - p$ normales à la courbe

(1) $$y^m - max^p = 0, \quad m > p;$$

les pieds de ces normales sont sur la conique

$$(2)\qquad mx^2 + py^2 - mx_0x - py_0y = 0.$$

Cette conique passe par l'origine O et le point P (x_0, y_0); son centre est le milieu de la droite OP, et son équatiou ne dépend pas du paramètre a. De là plusieurs conséquences remarquables et immédiates.

(L. Painvin.)

1132. On donne trois droites quelconques D_A, D_B, D_C; un triangle dont les côtés sont A, B, C et un point o dans le plan de ce triangle.

Par le point o, on mène un plan quelconque qui coupe les droites données en a, b, c. Les plans (A, a), (B, b), (C, c) se coupent en un point m, dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier le plan qui passe par le point o.

(Mannheim.)

1133. On donne un triangle dont les côtés sont A, B, C, un trièdre dont le sommet est un point du plan de ce triangle et un point quelconque o.

Par le point o, on mène une transversale quelconque qui coupe les faces du trièdre aux points a, b, c.

Les plans (A, a), (B, b), (C, c) se coupent en un point m dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier la transversale qui passe en o. (Mannheim.)

1134. On a, *identiquement*,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} \quad (*).$$

(Catalan.)

(*) *Note sur une formule de M. Botesù* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1872).

RÉFLEXIONS SUR L'ÉVÉNEMENT SCIENTIFIQUE D'UNE FORMULE PUBLIÉE PAR WRONSKI EN 1812, ET DÉMONTRÉE PAR M. CAYLEY EN 1873;

PAR M. ABEL TRANSON.

Problème. — Étant supposée l'équation

$$o = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \ldots,$$

dans laquelle $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ sont des fonctions quelconques de x, tandis que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont des quantités fixes, ou si l'on veut des variables indépendantes, qui n'entrent pas dans la composition de ces fonctions, donner le développement de x ou même celui de la fonction quelconque $F(x)$ en fonction des puissances et des produits de $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Wronski a communiqué à l'Institut, en 1811, et il a publié, en 1812, la solution de ce grand problème que, plus tard, dans ses ouvrages scientifiques, il a appelé le *problème universel*, c'est-à-dire il a donné la formule du coefficient relatif au terme en $(x_1^p x_2^q x_3^r \ldots)$ dans le développement soit de x, soit de $F(x)$; et M. Cayley a donné une démonstration de cette formule dans le numéro du *Quarterly Journal*, pour avril 1873.

Voici le titre et le début du journal anglais :

ON WRONSKI'S THEOREM by professor *Cayley*.

The theorem considered by the author as an answer to the question : En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences, et de résoudre généralement ce problème universel? » Is given without demonstration in his *Réfutation de la théorie des fonc-*

tions analytiques de Lagrange (Paris, 1812, p. 30), and reproduced [with, I think, a demonstration (*)], in the *Philosophie de la Technie* (Paris, 1815); and it is also stated and demonstrated in the *Supplément à la réforme de la Philosophie* (Paris, 1847, p. 59 et seq.); the theorem, but without a demonstration, is given in *Montferrier's Encyclopédie mathématique* (Paris, no date, t. III, p. 398).

Le problème dont j'ai donné ci-dessus l'énoncé est manifestement beaucoup plus général que celui de Lagrange dans son célèbre Mémoire de 1770 (*Académie de Berlin*), lequel correspond à une équation telle que

$$0 = x - a - x_1 f_1(x),$$

problème relativement simple, et dont la solution est connue dans la science sous le nom de *Série de Lagrange*.

Je serai conduit dans la suite de ces réflexions à dire l'importance majeure que Wronski attribue à son problème universel. Déjà les paroles que M. Cayley lui emprunte dans le début de son article peuvent la faire pressentir; mais, dans le Mémoire de 1811, la solution de ce problème n'est qu'un accessoire : l'auteur ne la présente que comme un résultat propre à faire excuser la hardiesse de s'être attaqué à une œuvre de Lagrange, la hardiesse d'avoir produit une *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques!* En effet, sa réfutation achevée, il s'exprime ainsi : « Il nous reste, pour résister à l'autorité imposante de Lagrange, à montrer que la loi de laquelle nous avons dérivé la réfutation précédente (la *Réfutation des fonctions analytiques*) embrasse, comme un cas très-

(*) La démonstration du *problème universel* n'est pas dans la *Philosophie de la Technie;* mais, en revanche, on y trouve la démonstration de la *Loi absolue*, comme j'aurai occasion de le dire.

particulier, la découverte principale que cet illustre géomètre a faite dans cette partie de l'Algorithmie qui porte sur le développement des fonctions. (*Réfutation*, p. 28.) »

A la vérité, Wronski ne donnait pas la démonstration de cette loi (*loi des séries*) de laquelle il avait dérivé la réfutation, et il n'expliquait pas davantage comment de cette loi des séries il déduisait sa formule pour la solution du problème universel. Il se bornait à annoncer la subordination de la loi des séries à une autre loi beaucoup plus générale, qu'il appelait alors la *loi algorithmique absolue*, et qu'il a souvent reproduite dans ses ouvrages ultérieurs sous le nom de *loi suprême*, loi que l'année précédente, en 1810, il avait communiquée à l'Institut, également sans démonstration, et dont Lagrange et Lacroix, dans un Rapport publié au *Moniteur* du 15 novembre 1810, avaient dit : « Ce qui a frappé vos commissaires dans le Mémoire de M. Wronski, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions, et qu'elles n'en sont que des cas très-particuliers (*). »

Cette absence de démonstration fait dire, non sans quelque apparence de mauvaise humeur, au rapporteur de la Commission du Mémoire de 1811 : « On a peine à deviner les raisons qui peuvent déterminer M. Wronski à ne donner toujours ses formules que comme des espèces d'énigmes dont il invite les géomètres à chercher la solution. N'aurait-on pas le droit de penser qu'à force de généraliser les formules de développement l'auteur n'est plus en état de les démontrer?... » Et à la fin du Rapport : « En résumé, vos commissaires ne peuvent avoir aucune opinion sur les formules de développement que renferme

(*) Avec ce Rapport, il est indispensable de lire la lettre de Wronski insérée au *Moniteur* du 21 novembre 1810.

le Mémoire dont nous venons de rendre compte, parce que l'auteur ne les a pas démontrées, et que, de plus, il les a présentées en termes inintelligibles. Quant à la prétendue réfutation de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, nous en avons dit assez pour montrer qu'elle ne mérite aucune attention. »

Je réserve la question de savoir si, en effet, la réfutation de la *Théorie des fonctions analytiques* ne méritait aucune attention. Je me bornerai à présenter sur ce sujet deux observations : la première, c'est que Wronski, lorsqu'il a publié cette réfutation, en 1812, l'a fait suivre, sous le titre de *Troisième Mémoire*, d'un examen détaillé du Rapport de la Commission, et dans cet examen il prouve très-bien, au moins à mon sens, que le rapporteur s'est attaché à des détails secondaires et que, effectivement, il n'a fait « aucune attention » à ce qui constitue la réfutation elle-même. Ma seconde observation, c'est que l'œuvre de Lagrange à laquelle avait été décerné solennellement le premier des fameux prix décennaux, cette œuvre, ou plutôt cette tentative *philosophique* de produire *les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions,* cette tentative, dis-je, est aujourd'hui, et depuis longtemps déjà, universellement abandonnée par les géomètres.

Et maintenant, j'exposerai, d'après Wronski lui-même, les raisons qu'il a cru avoir de produire ses formules, celle même de la *loi suprême* soumise, en 1810, au jugement de Lagrange, sans les appuyer de leurs démonstrations; mais je veux d'abord exprimer mon opinion sur le reproche de les avoir présentées « en termes inintelligibles ». Je le ferai avec la circonspection qui convient à un simple disciple de la science, mais avec la liberté aussi d'un serviteur de la vérité.

Qu'est-ce qu'une formule inintelligible? C'est, à ce que je crois, une formule impliquant des symboles dont on n'a pas la signification. Or le Mémoire de 1811 ne contient que deux formules générales ; il contient, d'une part, « afin de résister à l'autorité imposante de Lagrange » la formule du *problème universel* dont j'ai parlé au début de ces réflexions ; et d'autre part, pour fonder la Réfutation, il contient la formule de la *loi des séries*. Eh bien ! ces deux formules ne mettent en œuvre que des symboles connûs, très-simples et très-intelligibles. Pour en convaincre le lecteur, je vais succinctement exposer cette *loi des séries*.

Selon Wronski, l'idée, ou plus précisément la forme générale des séries, est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

où le premier membre représente une fonction déterminée, une fonction exprimée par des algorithmes connus ; donnée, en un mot, par ce que l'auteur appelle sa *construction théorique*, et où le second membre offre le développement de cette fonction $F(x)$ à l'aide d'une autre fonction $\varphi(x)$ arbitrairement choisie. La fonction $\varphi(x)$ sert alors de *mesure algorithmique* pour l'évaluation de $F(x)$, pour son *développement technique*.

Le symbole $\varphi(x)^{\mu|\xi}$ représente le produit de μ facteurs dans lesquels la variable x reçoit, à partir de son premier état, $\mu - 1$ accroissements égaux à ξ ; de sorte qu'on a

$$\varphi(x)^{\mu|\xi} = \varphi(x)\,\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(\mu-1)\xi].$$

Cet accroissement ξ est susceptible lui-même d'une valeur arbitraire. Quand cette valeur est différente de zéro, la fonction $F(x)$ est évaluée selon les *facultés progressives* de $\varphi(x)$; elle l'est, selon les *puissances* de $\varphi(x)$, si l'on suppose $\xi = 0$. De plus, si l'on a simplement

$\varphi(x) = x$, le développement est selon les *factorielles* de la variable, ou bien selon ses *puissances*, selon que ξ est différent de zéro ou égal à zéro.

Quant aux coefficients A_0, A_1, A_2, A_3,..., le premier est manifestement égal à ce que devient $F(x)$ pour la valeur qui annule $\varphi(x)$; ainsi, en supposant $\varphi(\alpha) = 0$, on a

$$A_0 = F(\alpha).$$

Les suivants A_1, A_2, A_3,... sont nécessairement indépendants de x, puisque, s'il en était autrement, $\varphi(x)$ ne constituerait pas à elle seule la mesure algorithmique de $F(x)$. D'ailleurs, ces mêmes coefficients dépendent non moins nécessairement de la fonction déterminée $F(x)$, de la fonction arbitraire $\varphi(x)$ et de la constante α. Or la *loi des séries* consiste précisément dans l'expression de cette dépendance, expression qui, elle-même, constitue la formule du coefficient général A_μ.

J'observerai, en passant, que cette idée des séries implique la conception de l'infini ; car, si pour un cas particulier de $\varphi(x)$ le second membre n'est pas illimité, il est nécessairement identique au premier ; et alors il offre positivement la construction théorique de $F(x)$ et non pas son développement technique.

Quoi qu'il en soit, c'est dans ce degré de généralité tout à fait éminent, c'est-à-dire en supposant la mesure algorithmique $\varphi(x)$ et l'accroissement ξ, l'un et l'autre arbitraires, que Wronski donnait, dans son Mémoire de 1811, la formule du coefficient de A_μ; et voici cette formule :

$$A_\mu = \frac{[\Delta^a \varphi(x)\, \Delta^b \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^c \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^l \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^m F(x)]}{\Delta^a \varphi(x)\, \Delta^b \varphi x^{2|\xi}\, \Delta^c \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^l \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^m \varphi(x)^{\mu|\xi}}.$$

Le numérateur est une de ces sommes combinatoires qui, depuis moins d'un demi-siècle, sous les noms d'abord de *fonctions alternées,* puis de *déterminants,* ont acquis dans la science une importance de plus en plus grande, mais qui, jusque-là, avaient été fort peu employées, bien que connues depuis longtemps, et depuis longtemps aussi, comme Wronski le rappelait, « exprimées de différentes manières, entre autres, suivant les procédés indiqués par Laplace, dans son *Mémoire sur le Calcul intégral et sur le Système du monde,* inséré parmi ceux de l'Académie de Paris, de l'année 1772, deuxième Partie (*Réfutation,* p. 15). » Et il ne se contentait pas de cette indication, il donnait en exemple, et pour l'intelligence de sa formule, les développements de ces sommes combinatoires pour les cas simples où le terme général comporte seulement deux ou bien trois facteurs : précisément le détail que l'on trouve aujourd'hui au début de toutes les explications sur les déterminants.

Dans cette expression de A_μ, le dénominateur est un simple produit de μ facteurs ; le numérateur offre, entre crochets, ce que nous appelons aujourd'hui le *terme principal du déterminant ;* il faut y faire égal à ξ l'accroissement dont dépendent les différences Δ ; donner aux indices a, b, c,... de ces différences les valeurs

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \ldots, \quad l = \mu - 1, \quad m = \mu,$$

et à la variable x une valeur telle que $\varphi(x) = 0$. Enfin, si l'on supposait $\xi = 0$, il faudrait remplacer les différences par des différentielles. Tel est le coefficient de $\varphi(x)^{\mu|\xi}$.

Quant au coefficient de $(x_1^p x_2^q x_3^r \ldots)$, dans la solution du problème universel, c'est une formule tout à fait analogue à la précédente. C'est encore au numérateur un déterminant, formé ici des différentielles des fonctions $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, F(x)$, et au dénominateur encore un simple produit.

D'après tout cela, n'avais-je pas raison de dire que les formules mises en œuvre dans le Mémoire de 1811 n'impliquaient que des symboles connus, et comment de telles formules ont-elles pu être signalées à l'Académie comme inintelligibles!... Osons le dire, si le rapporteur de la Commission ne les a pas comprises, il n'y a à cela qu'une seule, absolument une seule explication possible, notamment l'explication que suggère la dernière phrase de son Rapport, c'est qu'apparemment, ayant préjugé indigne de toute attention le Mémoire dont il avait à rendre compte, il ne l'a pas suffisamment étudié.

Arrivé à ce point de mes réflexions, je souhaite vivement n'avoir point lassé l'attention du lecteur; car, s'il a bien voulu me suivre jusqu'ici, je puis lui offrir le bénéfice de sa patience; je puis, à l'aide de ce qui précède, lui indiquer le point décisif sur lequel Wronski a entendu faire porter la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques;* c'est que Lagrange voulait placer les principes du Calcul différentiel dans les coefficients d'un développement particulier des fonctions, du développement qui procède selon les puissances de la variable, développement dont la possibilité, et surtout l'universalité, n'étaient pas même justifiables *a priori,* au lieu que, par la *loi des séries* (et plus complétement encore par la *loi suprême*), on voit que le Calcul différentiel établit non-seulement la possibilité, mais aussi l'existence et même la détermination précise des coefficients d'une infinité de développements, dont le développement selon les puissances de la variable n'est qu'un cas infiniment particulier. Donc c'est dans le Calcul différentiel qu'il faut voir les principes de tous ces coefficients, et nullement dans quelques-uns de ces coefficients qu'il faut voir les principes de ce calcul.

Mais, dit le rapporteur du Mémoire de 1811, « pourquoi M. Wronski ne donne-t-il toujours ses formules que comme des espèces d'énigmes dont il invite les géomètres à chercher la solution » ?

Le procédé, en effet, est peu académique; aussi je veux sur ce point laisser Wronski s'expliquer lui-même. En 1810, il avait, comme je l'ai déjà dit, communiqué la loi suprême, sans en donner la démonstration; et à ce sujet, il s'exprimait comme il suit dans une Lettre à Delambre, secrétaire de l'Académie : « Pour ce qui concerne la démonstration de la loi absolue, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Institut de France, j'ai eu plusieurs raisons pour la supprimer provisoirement. La raison principale a été d'attacher davantage l'attention au fait même et à l'existence de cette loi absolue, et de ne pas la détourner par une démonstration longue et fatigante. La première et la seule chose dont il soit question actuellement est de savoir si cette loi existe : la démonstration viendra après. Elle est toute prête; au premier désir de l'Institut, je m'empresserai de la lui faire parvenir (*voir* le *manifeste historique* dans le supplément à la *Réforme de la Philosophie,* t. II du *Messianisme,* p. 29). » Et il semble que Lacroix et Lagrange soient entrés dans cette manière de voir, puisque, sans attendre la démonstration de la loi, ils ont reconnu sa valeur et son universalité (*). « Cette circonstance (son universalité), dit Wronski dans un des Mémoires publiés en 1812, à la suite de la Réfutation, ne laisse aucun doute, ni sur la vérité, ni sur l'importance de cette loi; elle équivaut en quelque sorte à une démonstration. En effet, il serait, d'une part, plus difficile d'imaginer une formule fausse, de laquelle on pourrait dériver toutes les formules connues, qu'il ne l'est de trouver la vraie loi qui les embrasse réellement; et, d'autre part,

(*) *Voir* ci-dessus leur déclaration

il nous paraît qu'une loi qui embrasse et contient, de la manière la plus précise et la plus déterminée, tout ce qui a été fait pour l'évaluation des quantités, depuis que les hommes s'occupent de Mathématiques, n'est point sans quelque importance (*Réfutation,* p. 80). »

Néanmoins, Wronski ne s'est pas cru autorisé par tous ces raisonnements à retenir indéfiniment sa démonstration. Il l'a donnée, en 1815, dans la *Philosophie de la Technie* (1re section); elle n'y remplit pas moins de 90 pages in-4°, dont plusieurs sont couvertes de calculs, ce qui justifie suffisamment l'auteur de l'avoir supprimée « provisoirement », pour ne pas détourner l'attention de ses juges par une démonstration « longue et fatigante ».

Dans sa réponse au Rapport de 1811, il établit avec quelque hauteur la thèse, que « découvrir une loi est plus difficile et plus important que de la démontrer lorsque déjà elle se trouve découverte »; mais enfin, pour prouver sans doute que ses formules, à supposer qu'elles soient « des énigmes », ne sont pas des énigmes sans solution, il donne en moins de deux pages une démonstration très-simple et très-rigoureuse de la *loi des séries*, et le lecteur qui en prendra connaissance accordera volontiers à Wronski que « MM. les commissaires auraient pu la trouver »; car elle suppose seulement, avec la notion des différences et des différentielles, la résolution d'un système d'équations du premier degré par la formule des déterminants!...

Quant à la solution du problème universel, c'est-à-dire quant à ce développement dont la *célèbre série de Lagrange* n'est qu'un cas extrêmement particulier, il la réservait encore à cette époque de 1812. Il ne l'a produite qu'en 1847, dans le Supplément à la *Réforme de la Philosophie* (dans le t. II du *Messianisme*); et dès lors se trouvèrent établies deux des trois lois sur lesquelles il a la prétention de fonder la *Réforme des Mathématiques*, nommément les deux premières de ces lois (la *loi suprême* et le *problème universel*), au moyen desquelles, réservant à une troisième loi ce qui concerne la branche spéciale de la théorie des nombres, il prétend répondre à cette étrange question, rapportée par M. Cayley, au début de l'article du *Quarterly Journal* :

> « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel? »

Ici, il faut l'avouer, la démonstration du problème universel donnée en 1847 paraît être d'un accès aussi difficile, j'allais dire aussi formidable, que la démonstration de la loi suprême publiée en 1815. D'ailleurs, qu'importait le plus ou moins de difficultés de ces démonstrations? Qui donc s'intéressait en France aux travaux de Wronski? Encore à l'heure qu'il est, le Rapport de 1811 semble peser sur Wronski, semble avoir autorisé le monde savant à considérer indéfiniment ses œuvres ultérieures si nombreuses et si considérables comme ne méritant « aucune attention (*). »

Mais voici de quoi éveiller l'opinion publique; voici de quoi fixer l'attention. Pour la première fois après soixante ans passés, un des maîtres incontestés de la

---

(*) C'est avec une indifférence au moins égale qu'ont été accueillies ses œuvres philosophiques. Chose singulière! Dans le *Recueil des Rapports sur les progrès des Lettres et des Sciences en France*, publié à l'occasion de l'Exposition internationale de 1867, l'éminent auteur de *la Philosophie en France au* XIX^e^ *siècle* paraît avoir ignoré jusqu'au nom de Wronski. Les moindres auteurs qui, du plus loin possible, se rattachent à la Philosophie, obtiennent dans son Rapport les honneurs d'une analyse consciencieuse pendant qu'on y cherche en vain quelque mention du *Prodrome du Messianisme*, des *Prolégomènes*, de la *Métapolitique*, de la *Réforme du savoir humain*,..., de la *Réforme de la Philosophie!*...

science vient d'apporter à l'un des principaux résultats de Wronski la garantie de son adhésion; mais, surtout, M. Cayley, par des transformations ingénieuses, vient de réduire la démonstration de ce résultat à des termes si simples, qu'il l'a rendue accessible aux moindres géomètres. C'est cela que j'ai cru pouvoir appeler un *événement scientifique*.

La moindre conséquence qu'on doive attendre de cet événement, c'est de voir bientôt des juges compétents examiner l'œuvre de Wronski avec une attention sérieuse et en donner au public une appréciation motivée. Or c'est le moment de dire que l'unique objet des réflexions que je présente ici est de provoquer cet examen et cette appréciation. Mon intention ne va point au delà; j'ai cru devoir à la justice et à la vérité d'interjeter appel du jugement prononcé sur Wronski en 1811. Cette tâche suffisait à ma mesure comme à mon dessein, et je laisse à de plus habiles que moi le soin d'en faire davantage.

Je pourrais donc m'arrêter ici; mais, sans doute, les paroles empruntées à Wronski par M. Cayley, et rapportées ci-dessus ont excité la curiosité du lecteur : je vais essayer de la satisfaire.

Voici un autre problème : étant donnée une fonction quelconque $F(x)$, la développer sous la forme suivante :

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 \ldots,$$

dans laquelle Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3,... sont des fonctions de x absolument arbitraires, et A_0, A_1, A_2, A_3,... une suite de quantités déterminées. Ces quantités sont des constantes dont la construction dépend manifestement de la fonction donnée $F(x)$ et des fonctions arbitraires Ω, étant entendu que le coefficient A_μ doit dépendre de la forme des Ω dont les indices sont depuis zéro jusqu'à μ, et non des Ω à la suite.

La question est de donner la construction de ces quantités constantes, et, si l'on suppose ce vaste problème résolu, il est clair qu'en attribuant aux fonctions Ω telles formes que de raison on obtiendra effectivement tous les développements connus, et l'on possédera virtuellement tous les développements possibles.

C'est cela que Wronski appelle la *loi suprême;* c'est cette loi dont Lagrange a rendu témoignage en 1810; et voici un de ses usages :

Supposons qu'on ait à résoudre une équation quelconque

$$0 = \Phi(x);$$

on transformera d'abord la fonction $\Phi(x)$ au moyen de la loi suprême, en se laissant guider par les circonstances spéciales de la question pour le choix et pour le nombre des fonctions arbitraires, de manière à obtenir le résultat final avec une approximation déterminée. Cette préparation étant réalisée, la forme obtenue sera manifestement comparable à l'équation

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + \ldots,$$

et alors l'application de la formule publiée par Wronski en 1812, et démontrée par M. Cayley en 1873, donnera la solution de l'équation proposée.

Rien, d'ailleurs, ne particularise la nature de cette équation : ce peut être une équation algébrique ou une équation transcendante; elle pourra être aux différences ou aux différentielles, totales ou partielles; en un mot, tout ce qu'on voudra.

C'est ainsi que l'auteur se flatte d'avoir « embrassé par un seul problème tous les problèmes des sciences mathématiques et de les pouvoir résoudre par ce problème universel ». Et pour fixer le caractère de ces solutions, j'ajoute que Wronski entend ne donner pour la LOI

SUPRÊME (*Phil. de la Technie*, t. I, p. 265), et dans les applications du PROBLÈME UNIVERSEL (*Réforme du savoir humain*, Complément, t. I, p. LXXXI et *passim*), que des séries convergentes exclusivement.

J.-V. PONCELET.

INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, PHYSIQUE OU EXPÉRIMENTALE, 3e édition, publiée par M. *X. Kretz*, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — 1 beau vol. in-8° de 757 pages, avec planches.

COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES, publié par M. *X. Kretz*. — 1 beau vol. in-8° de 520 pages, avec planches et figures gravées dans le texte.

Avant de parler de ces deux Ouvrages, on nous permettra de consacrer quelques lignes à leur illustre auteur.

J.-V. Poncelet, général dans l'arme du Génie et membre de l'Académie des Sciences de 1834 à 1868, a été, personne ne l'ignore, l'un des plus glorieux représentants de la science française au XIXe siècle.

Sorti en 1810 de l'École Polytechnique, il quitta, en mars 1812, l'École d'Application de Metz pour participer à l'expédition de Russie, cette conception insensée du premier empereur. Il se trouvait parmi les 7000 Français qui, placés à l'arrière-garde dans l'horrible retraite de Moscou, et sous les ordres de l'infortuné maréchal Ney, vinrent, séparés du reste de l'armée, se briser à Krasnoé, le 18 novembre 1812, contre les 25000 hommes et les quarante canons du prince Miloradovitch.

Laissé pour mort sur le champ de bataille et rayé des cadres, Poncelet, dépouillé par l'ennemi, fut traîné en captivité et parcourut à pied l'énorme distance qui sépare Krasnoé de Saratoff. Ces tristes étapes, au milieu de plaines silencieuses et glacées, ces froids terribles qui solidifiaient le mercure du thermomètre, frappèrent profondément le jeune lieutenant du Génie; mais son courage n'en fut pas abattu, son énergie n'en fut pas atteinte.

Parvenu en mars 1813 sur les rives du Volga, il refusa d'imiter quelques-uns de ses compagnons d'armes qui, mettant à profit leurs connaissances mathématiques pour donner des leçons aux Russes, purent fuir la misère et acquérir un bien-être relatif. L'âme de Poncelet était d'une autre trempe, et il lui aurait fallu, pour agir ainsi, faire le sacrifice de ses sentiments les plus intimes.

Réduit à l'isolement, dénué de toutes ressources, le jeune officier, après une maladie, résultat naturel de ses fatigues et de ses angoisses, se sentit ranimé par le soleil d'avril, si beau dans ces climats. Il résolut de se distraire de ses chagrins par le travail obstiné de l'esprit. Privé de livres, d'instruments de précision, il redécouvrit pour ainsi dire un à un les éléments des sciences mathématiques, et fit profiter de ses efforts plusieurs de ses compagnons d'infortune.

Ces cahiers d'études et de recherches, écrits à Saratoff, et que Poncelet a publiés en 1862 et 1864, sous le titre d'*Applications d'Analyse et de Géométrie,* contenaient en germe le célèbre *Traité des propriétés projectives des figures*.

Ce Traité, qui assure à l'auteur une des premières places parmi les géomètres de toutes les époques, parut en 1822 et fixa immédiatement sur lui l'attention du monde savant. L'Ouvrage était depuis longtemps épuisé et atteignait dans les ventes des prix que, dans sa rigide probité, Poncelet traitait de scandaleux, lorsqu'il put enfin, à sa grande joie, en donner, de 1865 à 1866, une seconde édition augmentée du double.

Poncelet regretta toujours de n'avoir pu continuer, au delà de 1825, ses spéculations géométriques.

« Malheureusement ou heureusement peut-être, écrivait-il en 1865, les marques honorables d'intérêt que m'avaient values quelques travaux et inventions se rattachant à l'art de l'Ingénieur, de la part de MM. les Inspecteurs généraux de l'Artillerie et du Génie, Valé et Baudrand, ainsi que de M. Arago, examinateur de l'École d'Application de Metz, firent qu'on me proposa, en 1823 et 1824, de créer à cette École un Cours sur la Science des machines, que la récente introduction de l'industrie anglaise en France y faisait vivement désirer. Ce fut, sinon avec répugnance, du moins avec un vif sentiment de regret, que je consentis enfin, en 1825, à accepter cette tâche laborieuse à laquelle je n'étais nullement préparé, et qui allait, en me privant de tout loisir, ajourner indéfiniment la publication des travaux géométriques qui devaient faire suite au premier volume du *Traité des propriétés projectives des figures....* »

C'est François Arago qui, en 1825, poussa Poncelet, comme malgré lui, à l'École de Metz. C'est là qu'il créa ce Cours plein d'originalité, qui a si rapidement et si profondément transformé l'enseignement de la Mécanique. En s'écartant, avec le chagrin de l'inventeur entravé, de la route où l'entraînaient ses goûts et ses instincts primitifs, il eut du moins la consolation d'être utile aux ingénieurs et aux artistes. Il eut celle d'écrire pour le grand nombre et d'éviter les reproches trop souvent et trop justement adressés aux savants de profession qui, sacrifiant tout aux théories abstraites, méprisent ou délaissent l'indispensable pratique.

En 1827, Poncelet fonda à l'Hôtel-de-Ville de Metz le

Cours professionnel, public et gratuit, destiné aux ouvriers et intitulé : Leçons du soir sur la Mécanique industrielle.

En 1838, il fut appelé à la Faculté des Sciences de Paris et chargé d'y créer le Cours de Mécanique physique et expérimentale.

Les trois dates que nous venons de rappeler résument, pour ainsi dire, tous les travaux didactiques de Poncelet sur la Mécanique. A chacune d'elles répond en effet un Ouvrage où il a développé avec un talent consommé toutes les matières du Cours qu'il professait pour le compte de l'État, ou que son ardent amour du bien l'avait porté à ouvrir gratuitement en faveur de ceux que leur éducation première semblait devoir à jamais priver de connaissances si précieuses et si élevées.

Nous laissons ici de côté les diverses et nombreuses expériences de l'auteur, relatives à la Physique et à l'Hydraulique; ses belles inventions concernant les ponts-levis, les roues hydrauliques et les dynamomètres; ses intéressants travaux sur la stabilité des constructions. Nous nous bornerons à signaler son admirable Rapport historique sur les machines-outils, à propos de l'Exposition universelle de Londres en 1851, où Poncelet avait été élu tout d'une voix Président de la Classe des Machines.

C'est au Cours professé par l'éminent géomètre à l'Hôtel-de-Ville de Metz que se rapporte l'*Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, dont M. X. Kretz a donné en 1870 une troisième édition.

Dans cet Ouvrage devenu classique, et que tout ingénieur doit lire avec une scrupuleuse attention, Poncelet rompit franchement avec la méthode consacrée. Remontant aux travaux de D. Bernoulli, de Borda, de Carnot, de Navier, partageant, comme il le dit modestement, les vues de Petit, Burdin, Coriolis, Belanger, ses anciens camarades à l'École Polytechnique, la Mécanique industrielle est pour lui en réalité la Science du travail des forces, et c'est le principe général des forces vives ou celui de la transmission du travail qui doit dominer tout l'enseignement.

C'est en se plaçant à ce point de vue que l'auteur essaya de mettre les notions fondamentales relatives à l'action et au travail des forces à la portée des intelligences les plus ordinaires. Employant le calcul sous sa forme la plus élémentaire, il s'adressa surtout au bon sens, au raisonnement direct.

La difficulté d'une pareille tâche n'a pas besoin d'être démontrée. Poncelet l'entreprit dans l'unique désir de répandre parmi la classe industrielle, en les lui rendant pour ainsi dire familières, des doctrines d'une utilité incontestable qu'elle ne peut ignorer sans préjudice et qui, autrefois, étaient presque exclusivement le partage d'un petit nombre d'ingénieurs. Il sut réaliser sa pensée en dotant notre littérature scientifique d'une œuvre tout à fait personnelle et qu'on peut regarder à bon droit comme un modèle d'exposition.

L'*Introduction à la Mécanique industrielle* est divisée en deux Parties :

La première renferme les principes fondamentaux, suivis d'applications diverses.

Poncelet a soin de faire précéder ces principes de notions générales sur la constitution et les propriétés physiques des corps. Il savait, en effet, que la Mécanique rationnelle n'est qu'une science d'abstraction et que, pour l'introduire utilement dans le monde des ateliers et des arts, il faut avant tout se rendre un compte exact de la compressibilité et de la flexibilité naturelles des corps, de leur inertie et des résistances de toute espèce qu'ils opposent au mouvement et à l'action des forces. Il savait quel danger court l'étude de cette science si importante, lorsqu'on la présente d'une manière incomplète, sans prévenir le lecteur des lacunes que l'expérience n'a pu encore y combler. Les théoriciens n'ont plus confiance en elle lorsqu'ils voient leurs formules leur donner des résultats qui diffèrent parfois des faits réels du simple au quadruple, et les praticiens la dédaignent, à leur grand détriment. Aussi Poncelet a-t-il soin de s'appuyer constamment sur des données positives et des chiffres exacts, sur des principes d'une application immédiate dans les arts, comme il le marque lui-même dans sa Préface, en termes excellents : « Un intervalle difficile à franchir et qui réclame des efforts incessants sépare la Mécanique abstraite de ses applications ; ses vraies difficultés ne résident pas dans la démonstration des principes généraux de l'équilibre et du mouvement, mais bien dans la conception physique des phénomènes de chaque espèce, dans la recherche des lois qui les régissent individuellement. La marche, à la fois géométrique et expérimentale, suivie par Kepler, Galilée, Newton et D. Bernoulli, est encore celle qui doit nous guider. »

Parmi les applications qui suivent et éclaircissent l'exposé des principes fondamentaux, nous citerons les questions concernant l'inertie et la force vive, le choc direct, le tir des projectiles, le travail produit par l'action de la vapeur d'eau et par celle des moteurs animés.

La seconde Partie de l'Ouvrage que nous analysons traite des résistances que les corps opposent à l'action directe des forces ou au mouvement d'autres corps.

Dans le préambule de cette seconde Partie, Poncelet revient avec plus de détails sur la structure intime des corps et sur les phénomènes qui dépendent du jeu des actions moléculaires. Ce chapitre présente encore aujourd'hui un grand intérêt, bien que la Théorie mécanique de la Chaleur soit venue apporter des modifications essentielles à quelques-unes des considérations qui y sont développées.

A ce premier chapitre succède une étude très-importante sur la résistance des prismes à l'extension, à la compression et à la rupture. Elle est complétée par de nombreux résultats d'expériences et par l'examen des principales circonstances du mouvement oscillatoire des prismes sous l'influence de charges constantes et de chocs brusques, avec applications relatives à l'emploi du fer, notamment dans les ponts suspendus.

Le frottement des solides, ou la résistance des corps solides au glissement, est ensuite exposé dans tous ses détails, avec de nombreuses et très-utiles Tables numériques.

Le dernier chapitre du Livre est relatif à la résistance des fluides; c'est, sans doute, au point de vue de l'érudition et de la discussion des faits d'expériences, le plus parfait de l'œuvre. Il est terminé par un remarquable essai sur une théorie du choc et de la résistance des fluides indéfinis, principalement fondée sur la considération des forces vives.

Ce sont les Leçons professées par Poncelet à l'École d'Application de Metz qui ont, à leur tour, donné naissance à son célèbre *Cours de Mécanique appliquée aux machines,* qu'on suit depuis près d'un demi-siècle dans toutes les grandes Écoles ouvertes aux élèves-ingénieurs.

L'édition que vient d'en donner M. X. Kretz (1874) est, en réalité, la première édition française. En effet, en 1826, des feuilles lithographiées reproduisant les Leçons de Poncelet furent distribuées aux officiers-élèves. Ces feuilles, qui firent sensation, furent soumises, l'année suivante, à l'appréciation de l'Académie des Sciences.

Une Commission, composée d'Arago et de Charles Dupin, fut nommée pour les examiner; et, dans la séance du 7 mai 1827, Ch. Dupin fit sur le Cours de Poncelet un Rapport des plus favorables.

« C'est, disait-il, une production remarquable par la rigueur de l'esprit qui en a tracé la marche, et par les simplifications opérées pour rendre moins difficilement applicables à la pratique des calculs réservés, pour la plupart, à des spéculations transcendantes. En résumant notre opinion sur le Cours déféré à notre examen, nous pensons qu'il est digne de l'approbation de l'Académie, et nous proposerions de l'insérer dans la collection des *Mémoires des Savants étrangers,* s'il n'appartenait pas à S. Exc. le Ministre de la Guerre de décider la publication illimitée de cette production. »

Cet appel resta sans écho. (Mais aussi pourquoi charger un Ministre de la Guerre des intérêts de la Science?) On se contenta de faire lithographier, au fur et à mesure des besoins, les feuilles nécessaires aux élèves de l'École d'Application; et sans le culte de M^me^ Poncelet pour la mémoire de son mari, le *Cours de Mécanique appliquée aux machines,* qui a subi à l'étranger, notamment en Belgique, de nombreuses contrefaçons, ne serait pas encore, au bout de quarante-sept ans, édité en France.

Il convient de dire que le concours de M. Gosselin avait été très-utile à Poncelet pour la révision des feuilles de 1826, ainsi que celui de M. le général Morin, alors capitaine d'Artillerie détaché à Metz, pour la révision de cahiers lithographiés en 1831, 1832, 1834, 1836.

Le *Cours de Mécanique appliquée* publié par M. Kretz est divisé en quatre Sections.

La première, *Considérations générales sur les machines en mouvement,* comprend les équations générales du mouvement des machines, l'examen des circonstances principales de ce mouvement, les moyens de le régulariser et les conditions du meilleur établissement des machines industrielles.

La deuxième Section, *Des principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports déterminés,* traite des modérateurs, des régulateurs, des manivelles, des volants, et des communications de mouvement par courroies ou chaînes, par engrenages, par cames. Elle est terminée par la Théorie des moments d'inertie.

Dans la troisième Section, *Calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme et soumises à des actions sensiblement invariables,* Poncelet étudie les différentes sortes de résistance (frottement de glissement, frottement de roulement, roideur des cordes et des courroies, frottement des cordes et des courroies autour de cylindres fixes) et applique les résultats obtenus aux machines les plus usuelles. Nous citerons : le frottement d'un corps sur un plan incliné, le frottement du coin, celui des pièces guidées, des tourillons et des pivots; la résistance des galets; l'équilibre du treuil en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes, celui des poulies, celui des arbres tournants mus par cordes ou courroies sans fin; la résistance des chaînes; le frottement de la vis à filets carrés ou de la vis à filets triangulaires, celui des engrenages. Deux Notes, l'une relative à la valeur approchée, linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, et l'autre sur le moment total des résistances dans les vis et les cônes de friction, terminent cette Section.

La quatrième Section, *Influence des variations de la vitesse sur les résistances,* renferme enfin les principes généraux qui concernent les pièces animées de mouvements périodiques et l'influence des changements brusques de vitesse. Ces principes sont ensuite appliqués à l'étude du choc des cames contre les pilons ou marteaux, et à celle des machines à percer, à découper, à estamper et à frapper les monnaies.

Comme le remarque M. Kretz dans la Préface qu'il a écrite pour le Cours de l'École de Metz, « peu de modifications essentielles ont été apportées jusqu'ici, par les auteurs qui ont traité de la Mécanique appliquée, aux idées exposées par Poncelet à une époque où l'emploi des machines était loin d'avoir l'extension actuelle ». C'est le plus bel éloge qu'on puisse, en réalité, faire de Poncelet.

Cependant il a paru utile au savant ingénieur de mentionner, dans des Notes placées au bas des pages, les travaux récents relatifs aux matières du Cours et les considérations nouvelles nécessitées par les progrès de la pratique. Ces Notes sont précieuses et ajoutent encore à la valeur si grande de l'Ouvrage; elles font honneur à la sagacité et à la pénétration de M. Kretz. Nous signalerons surtout celles qui se rapportent à la période de mise en marche des machines et à leur bon fonctionnement; à l'écart proportionnel des vitesses au point de vue de la régularisation et à l'effet du couplement sur la régularité; à la détermination de la vitesse de règle et aux conditions de régularité des machines industrielles; aux différents régulateurs; aux équations du mouvement d'une transmission, en tenant compte de l'élasticité des liens; à la répartition des divers volants d'une usine; au rapport des accélérations maximum et minimum des manivelles à simple et à double effet; au volant des machines couplées; enfin au ralentissement dans les transmissions par courroies et à la loi des tensions d'une courroie sur une poulie en mouvement. (On sait que M. Kretz a publié, sur ces dernières questions, de très-remarquables

Mémoires insérés dans les *Annales des Mines* et dans les *Comptes rendus*, 1862, 1873.)

Ajoutons que MM. Resal et Moutier ont secondé M. Kretz dans l'accomplissement de la première partie de sa tâche, et que M. Resal a, en outre, enrichi de quelques Notes le *Cours de Mécanique appliquée*.

C'est un devoir pour nous de louer les soins apportés par la maison Gauthier-Villars à l'impression des deux Ouvrages sur lesquels nous appelons toute l'attention du lecteur. Ils continuent dignement la série des belles éditions scientifiques dues au zèle éclairé et au dévouement infatigable de cette maison.

Nous voudrions pouvoir annoncer au public, en terminant cet article, que le Cours de Poncelet, à la Faculté des Sciences de Paris, est sous presse; mais nous ne savons malheureusement pas si les Notes de l'illustre ingénieur sont prêtes pour la publication, et si elles verront jamais le jour. S'il faut renoncer à l'espoir de les posséder, l'Extrait du Cours de Mécanique physique de la Sorbonne, dont M. Resal a fait suivre ses Éléments de Mécanique, destinés aux candidats à l'École Polytechnique, ne peut qu'inspirer, à cet égard, le plus vif regret (*).

Quoi qu'il en soit, Poncelet a assez fait pour sa gloire. Il s'est montré profond géomètre, habile inventeur, professeur éminent, ingénieur plein d'initiative et de sagacité, écrivain original. Il s'est montré en même temps homme de bien par excellence, rigoureusement dévoué à ses devoirs, sévère pour lui-même, plein de

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites, une lettre adressée par Mme Poncelet à M. le Président de l'Académie des Sciences et lue par M. le Secrétaire perpétuel dans la séance du 9 février 1874 nous permet de compter sur cette dernière et importante publication, qui couronnera dignement les profonds travaux de Poncelet sur la Mécanique.

sollicitude pour les faibles et les déshérités, d'une loyauté à toute épreuve et d'un ardent patriotisme. Il put avoir des rivaux : il n'eut jamais d'ennemis ni d'envieux. Il le méritait, car il ne détesta que l'injustice. Sa modestie seule put lui faire craindre de voir, dans l'avenir, son nom éclipsé et ses découvertes oubliées. Il vivra autant que la Science elle-même.

Nous nous reprocherions, en finissant, de ne pas nous incliner devant Mme Poncelet, avec une respectueuse émotion et une réelle gratitude.

Poncelet avait résolu de consacrer les dernières années de sa laborieuse carrière à la publication complète de ses œuvres. Il avait achevé l'impression de ses découvertes géométriques et allait entreprendre celle de ses travaux sur la Mécanique, lorsque la mort le frappa.

Mme Poncelet, qui, à force de dévouement et d'affection, était parvenue à prolonger la vie et les précieux labeurs de son mari, ne voulut pas laisser inachevée la réalisation de ses derniers projets et de ses plus chers désirs. C'est à elle, c'est à ses sentiments élevés, qu'on doit les deux éditions dont nous venons de montrer toute l'importance. Elle s'unit ainsi plus intimement, aux yeux de la postérité, à celui dont elle a soutenu l'âge mûr et consolé la vieillesse.

Ch. de Comberousse.

SUR UNE FORMULE D'ARITHMÉTIQUE;

Par M. Désiré ANDRÉ.

1. *Combien de fois le nombre premier p entre-t-il comme facteur dans le produit des n premiers nombres?*

C'est là une question bien connue, et dont on expose la solution dans plusieurs traités d'Algèbre. Seulement, dans ces traités, on se borne à indiquer comment on trouve le nombre demandé, sans donner explicitement la formule qui le représente. Cette lacune, regrettable selon nous, l'objet de cette Note est de la combler.

2. La méthode indiquée d'ordinaire pour calculer le nombre demandé est celle-ci :

Prendre la partie entière du quotient de n par p, la partie entière du quotient du nombre obtenu par p, la partie entière du quotient du nouveau nombre obtenu par p encore, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une partie entière inférieure à p; puis, enfin, faire la somme de toutes ces parties entières.

Cette méthode conduit immédiatement à la formule omise; car, si nous désignons par

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

la partie entière du quotient de a par b, les parties entières dont on vient de parler et dont on doit faire la somme sont représentées respectivement par les expressions

$$\left(\frac{n}{p}\right),\quad \left(\frac{n}{p^2}\right),\quad \left(\frac{n}{p^3}\right),\quad \left(\frac{n}{p^4}\right),\ldots,$$

de telle sorte que, si l'on désigne par x le nombre cherché, on a

$$x = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{n}{p^k}\right).$$

3. Cette formule n'est donc que la traduction immédiate de la méthode indiquée. On peut aussi l'établir directement; voici, pour cela, comme nous raisonnerons.

Parmi les facteurs $1, 2, 3, \ldots, n$, le nombre de ceux qui sont multiples de p est

$$\left(\frac{n}{p}\right),$$

le nombre de ceux qui sont multiples de p^2 est

$$\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

le nombre de ceux qui sont multiples de p^3 est

$$\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant la somme

$$\left(\frac{n}{p}\right)+\left(\frac{n}{p^2}\right)+\left(\frac{n}{p^3}\right)+\ldots;$$

elle est exactement égale à x. En effet, soit p^k une puissance de p qui entre dans l'un des facteurs $1, 2, 3, \ldots, n$; elle est bien comptée k fois dans cette formule, car elle entre pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p}\right),$$

pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

et ainsi de suite.

On a donc

$$x=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

4. On voit combien cette formule est facile à établir ; elle a été probablement plusieurs fois établie : aussi, bien que, à notre connaissance, elle ne soit imprimée nulle part, l'avons-nous toujours regardée et citée comme une formule bien connue. Elle est d'ailleurs, selon nous, fort importante. Nous nous en sommes servi maintes fois, notamment pour la démonstration de certains théorèmes sur les nombres (*), sur les combinaisons (**), sur les factorielles (***). Afin de montrer combien elle est d'un emploi commode, nous allons en faire une application à une question bien simple du cours de Mathématiques spéciales.

5. *Application.* — Soit ce théorème :

Le produit de n nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des n premiers nombres.

Pour le démontrer, il suffit de prouver qu'un nombre premier quelconque entre comme facteur dans le premier produit autant de fois, au moins, que dans le second.

Soit

$$(t+1)(t+2)(t+3)\ldots(t+n)$$

le premier produit. Il est évidemment égal au produit des $t+n$ premiers nombres, divisé par le produit des t premiers nombres ; par suite, le facteur premier p y entre un nombre de fois marqué par la différence

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t}{p^k}\right).$$

Dans le second produit, ce même facteur p entre un

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XI, p. 314.
(**) *Idem,* 2e série, t. XII, p. 84.
(***) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. I, p. 84.

nombre de fois égal à

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Donc il suffit de prouver qu'on a

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t}{p^k}\right)\geq\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right),$$

ou, *a fortiori*,

$$\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\left(\frac{t}{p^k}\right)\geq\left(\frac{n}{p^k}\right),$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{t+n}{p^k}\right)\geq\left(\frac{t}{p^k}\right)+\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Or cette dernière relation est évidemment satisfaite; donc le théorème est démontré.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 138);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

169. PROBLÈME. — *Déterminer l'ordre du contact de deux courbes, et trouver le cercle osculateur d'une courbe donnée.* — Supposons que les deux courbes soient exprimées par

$$\mathrm{OM} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{F}(t), \quad \mathrm{ON} \mathrel{\underline{\triangle}} f(u),$$

et que u soit une fonction indéterminée de t, laquelle reçoit une valeur particulière qui donne $\mathrm{OM} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{ON}$, c'est-à-dire que M soit le point commun aux deux courbes. Attribuons à t l'accroissement infiniment petit ω, et déterminons la fonction u de manière que la droite

$$\mathrm{M'N'} \bumpeq \mathrm{ON'} - \mathrm{OM'} \bumpeq \omega^{n+1}\,\mathrm{OP}$$

soit la plus petite possible, OP étant une droite finie. Le nombre n sera l'ordre du contact.

Pour les points non singuliers, c'est-à-dire généralement, n est un nombre entier, parce qu'à l'accroissement ω correspondent

$$\mathrm{OM'} \bumpeq \mathrm{OM} + \omega\,\mathcal{D}\mathrm{M} + \frac{\omega^2}{2}\mathcal{D}^2\mathrm{M} + \ldots,$$

$$\mathrm{ON'} \bumpeq \mathrm{ON} + \ldots,$$

$$\mathrm{M'N'} \bumpeq \omega\,(\mathcal{D}\mathrm{N} - \mathcal{D}\mathrm{M}) + \frac{\omega^2}{2}(\mathcal{D}^2\mathrm{N} - \mathcal{D}^2\mathrm{M}) + \ldots.$$

Ainsi le contact est au moins du second ordre, lorsqu'on peut satisfaire aux trois équipollences

$$\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{ON}, \quad \mathcal{D}\mathrm{M} \bumpeq \mathcal{D}\mathrm{N}, \quad \mathcal{D}^2\mathrm{M} \bumpeq \mathcal{D}^2\mathrm{N}.$$

170. Prenons pour exemple la parabole

$$\mathrm{OM} \bumpeq t^2 + t\surd,$$

et la circonférence

$$\mathrm{ON} \bumpeq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\surd + (1 - \surd)(1 - \varepsilon^u),$$

qui ont un point commun correspondant à

$$t = \tfrac{1}{2}, \quad u = 0.$$

La relation

$$\mathcal{D}\mathrm{M} \bumpeq \mathcal{D}\mathrm{N}$$

donne l'équipollence

$$2t + \surd \bumpeq -(\surd + 1)\,\varepsilon^u\,\mathcal{D}u,$$

qui est satisfaite par

$$\mathcal{D}u = -1.$$

De même, la relation

$$\mathcal{D}^2 M \bumpeq \mathcal{D}^2 N,$$

ou

$$2 \bumpeq -(\surd + 1)(\mathcal{D}^2 u + \surd\, \mathcal{D} u^2)\, \varepsilon^u,$$

est satisfaite par

$$\mathcal{D}^2 u = -1.$$

Mais on ne pourrait pas ensuite avoir

$$\mathcal{D}^3 M \bumpeq \mathcal{D}^3 N,$$

quelle que fût la valeur réelle de $\mathcal{D}^3 u$. Donc le contact entre la parabole et le cercle est du second ordre.

171. Si l'on avait à comparer deux mouvements au lieu de deux courbes, u serait donné en fonction de t, et, par suite, l'*osculation* des deux mouvements pourrait être moindre que celle des courbes. Ainsi le mouvement parabolique des corps pesants, exprimé par

$$OM \bumpeq t^2 + tP\surd,$$

et le mouvement circulaire uniforme, exprimé par

$$ON \bumpeq \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2}\surd + (\surd - 1)\, \varepsilon^{\frac{1}{2} - t},$$

donnent, pour $t = \frac{1}{2} + \omega$,

$$M'N' \bumpeq -(1 + \surd)\, \frac{\omega^2}{2}.$$

Par suite, l'osculation des deux mouvements est seulement du premier ordre.

172. Au moyen des principes établis déjà, il sera facile de déterminer le cercle osculateur à une courbe donnée en l'un de ses points M. Si R en est le centre, la circonférence de ce cercle est exprimée par l'équipollence

$$ON \bumpeq OR + \varepsilon^u RM.$$

Pour prendre les dérivées, il faut considérer OR, RM comme constantes, ce qui donne

$$\textcircled{d}\mathrm{N} \bumpeq \surd\,\varepsilon^{u}\,\textcircled{d}u\,\mathrm{RM},$$
$$\textcircled{d}^{2}\mathrm{N} \bumpeq (\surd\,\textcircled{d}^{2}u - \textcircled{d}u^{2})\,\varepsilon^{u}\,\mathrm{RM},$$

expressions dans lesquelles on devra faire $u = \mathrm{o}$, cette valeur étant celle qui fait coïncider N avec M.

Pour que le contact soit du second ordre, on devra avoir

$$\textcircled{d}\mathrm{M} \bumpeq \surd\,\textcircled{d}u\,\mathrm{RM},$$
$$\textcircled{d}^{2}\mathrm{M} \bumpeq (\surd\,\textcircled{d}^{2}u - \textcircled{d}u^{2})\,\mathrm{RM}.$$

Les divisant l'une par l'autre, la relation du n° 164 nous donne

$$l + \lambda\surd \bumpeq \frac{\textcircled{d}^{2}u}{\textcircled{d}u} + \surd\,\textcircled{d}u,$$

en sorte que

$$\lambda = \textcircled{d}u,$$

et la relation

$$\textcircled{d}\mathrm{M} \bumpeq \surd\,\textcircled{d}u\,\mathrm{RM}$$

est identique avec la relation (2) du n° 63.

173. L'enveloppe de toutes les droites MS, qui forment avec les tangentes

$$\mathrm{MT} \bumpeq \textcircled{d}\mathrm{M}$$

l'angle constant α, se trouve résulter du n° 163 en posant

$$\mathrm{MS} \bumpeq p\,\varepsilon^{u}\,\textcircled{d}\mathrm{M},$$

puis en déterminant p de manière que $\textcircled{d}\mathrm{S}$ soit parallèle à cette même droite MS. On trouve ainsi

$$(9) \qquad \mathrm{MS} \bumpeq \sin\alpha\,\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\surd}\,\mathrm{MR},$$

relation connue entre les points S d'une développée imparfaite, et les points R de la développée proprement dite.

174. Problème. — *Déterminer la courbe* P *parallèle à une courbe donnée* M, *c'est-à-dire ayant avec elle toutes les normales* MP *communes.* — Le point P appartenant à la normale de la courbe donnée au point M, on aura

$$\mathrm{OP} \bumpeq \mathrm{OM} + p\surd \textcircled{d}\mathrm{M}.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée en direction par

$$\textcircled{d}\mathrm{P} \bumpeq \textcircled{d}\mathrm{M} + p\surd \textcircled{d}^2\mathrm{M} + \surd \textcircled{d}p\,\textcircled{d}\mathrm{M},$$

doit être parallèle à la tangente $\textcircled{d}\mathrm{M}$. Multipliant par $\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}$, nous aurons

$$p\surd\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}\,\textcircled{d}^2\mathrm{M} + \surd\textcircled{d}p\,\textcircled{d}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}$$

parallèle à $\textcircled{d}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}$, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et, par conséquent, équipollente à sa propre conjuguée

$$-p\surd\textcircled{d}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}^2\mathrm{M} - \surd\textcircled{d}p\,\textcircled{d}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}.$$

Il en résulte

$$-2\,\frac{\textcircled{d}p}{p} = \frac{\textcircled{d}^2\mathrm{M}}{\textcircled{d}\mathrm{M}} + \mathrm{cj}.\,\frac{\textcircled{d}^2\mathrm{M}}{\textcircled{d}\mathrm{M}},$$

et, revenant aux fonctions primitives,

$$p = c : \sqrt{\textcircled{d}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\,\textcircled{d}\mathrm{M}}.$$

Donc la distance des deux courbes est

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{MP} \bumpeq c\surd\sqrt{\textcircled{d}\mathrm{M} : \mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{M}},$$

c'est-à-dire de grandeur constante, et les deux courbes sont vraiment parallèles. Avec les formules du n° 164, on a

$$p = ce^{-\int l\,dt}.$$

175. Ces calculs seraient devenus plus rapides en posant [168, (7)]

$$dM \triangleq \varepsilon^{\varphi} ds.$$

Supposons plus généralement que la droite MP forme avec la tangente un angle constant α, on aura

$$OP \triangleq OM + p\varepsilon^{\alpha+\varphi}\mathfrak{D}s,$$

et si la tangente

$$\mathfrak{D}P \triangleq \varepsilon^{\varphi}\mathfrak{D}s + p\varepsilon^{\alpha+\varphi}(\mathfrak{D}^2 s + \sqrt{\ }\mathfrak{D}s\mathfrak{D}\varphi) + \varepsilon^{\alpha+\varphi}\mathfrak{D}p\mathfrak{D}s$$

doit être parallèle à $\mathfrak{D}$M, on aura aussi

$$\begin{aligned} &p\varepsilon^{\alpha}(\mathfrak{D}^2 s + \sqrt{\ }\mathfrak{D}s\mathfrak{D}\varphi) + \varepsilon^{\alpha}\mathfrak{D}p\mathfrak{D}s \\ &\quad = p\varepsilon^{-\alpha}(\mathfrak{D}^2 s - \sqrt{\ }\mathfrak{D}s\mathfrak{D}\varphi) + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{D}p\mathfrak{D}s. \end{aligned}$$

En remontant aux fonctions primitives, on a

$$p\mathfrak{D}s = ca^{-\varphi},$$

c étant la constante arbitraire, et a étant égal à $e^{\cot\alpha}$; par suite

$$MP \triangleq ca^{-\varphi}\varepsilon^{\alpha+\varphi}. \tag{11}$$

Donc toutes les droites MP, qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M, P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique (166) qui coupe ces rayons sous le même angle.

176. Problème. — *Déterminer les développées d'une courbe donnée* M, *c'est-à-dire les trajectoires orthogonales de ses tangentes* MT. — Appelons T le point de la trajectoire cherchée, et posons

$$OT \triangleq OM + q\mathfrak{D}M.$$

La tangente à la courbe T est donnée par

$$\mathfrak{D}T \triangleq (1 + \mathfrak{D}q)\mathfrak{D}M + q\mathfrak{D}^2 M$$

et doit être perpendiculaire à $\mathfrak{D}$M; on aura par suite, selon la supposition habituelle,

(4) $$\mathfrak{D}^2\mathrm{M} : \mathfrak{D}\mathrm{M} \triangleq l + \lambda\sqrt{},$$

$$1 + \mathfrak{D}q + ql = 0,$$

et de là

(12) $$\mathrm{MT} \triangleq - e^{-\int l\,dt} \int e^{\int l\,dt}\, dt\, \mathfrak{D}\mathrm{M} \quad (^*).$$

177. Les calculs sont plus rapides si l'équipollence de la courbe M est donnée sous la forme (7); alors, posant

$$\mathrm{MT} \triangleq q\,\varepsilon^{\varphi},$$

on aura

$$\mathfrak{D}\mathrm{T} \triangleq \varepsilon^{\varphi}\,(\mathfrak{D}s + \mathfrak{D}q) + q\sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi,$$

et cette droite devra être perpendiculaire à ε^{φ}, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{D}s + \mathfrak{D}q = 0.$$

Revenant aux fonctions primitives, on a

$$q = c - s,$$

et de là

(13) $$\mathrm{MT} \triangleq (c - s)\,\varepsilon^{\varphi}.$$

Il nous sera facile de démontrer que la développante T a pour développée la courbe M. Nous avons en effet

$$\mathfrak{D}\mathrm{T} \triangleq (c - s)\sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi$$

et (supposant pour abréger $\mathfrak{D}\varphi$ constant)

$$\mathfrak{D}^2\mathrm{T} \triangleq (s - c)\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi^2 - \sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi\,\mathfrak{D}s;$$

par suite, la relation (4) (164) donne, par rapport à la courbe T,

$$\lambda = \mathfrak{D}\varphi,$$

(*) Ce résultat suppose l'intégration de l'équation différentielle $1 + \mathfrak{D}q + ql = 0$, qu'on laisse au lecteur le soin d'effectuer.

(*Note du Traducteur.*)

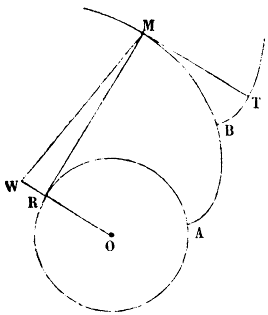
et le rayon de courbure en T est

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{}\,\mathcal{D}T \bumpeq (s-c)\,\varepsilon^{\varphi} \bumpeq TM.$$

178. Appliquons les formules précédentes à la développante du cercle de rayon 1

$$OR \bumpeq \varepsilon^{\varphi} \quad (\textit{fig.}\ 35).$$

Fig. 35.



La dérivée de son arc est

$$\mathcal{D}s = \mathcal{D}\varphi,$$

c'est-à-dire qu'on peut donner à l'équipollence la forme

$$OR \bumpeq \sqrt{}\int \varepsilon^{\varphi} d\varphi.$$

Par suite, la développante du cercle est exprimée par

$$OM \bumpeq (1-\varphi\sqrt{})\,\varepsilon^{\varphi}.$$

Pour trouver la seconde développante BT, donnons à l'équipollence de la première développante AM la forme

$$OM \bumpeq \int \varepsilon^{\varphi}\varphi\, d\varphi.$$

Nous aurons ainsi

$$\mathcal{D}s \bumpeq \varphi\,\mathcal{D}\varphi \quad \text{et} \quad MT \bumpeq \left(c-\tfrac{1}{2}\varphi^2\right)\varepsilon^{\varphi}.$$

De là

$$OT \triangleq (1 + c - \varphi\surd + \tfrac{1}{2}\varphi^2)\,\varepsilon^{\varphi} \triangleq \surd\int \varepsilon^{\varphi}(c - \tfrac{1}{2}\varphi^2)\,d\varphi.$$

Le rayon de courbure BT en T est $c - \frac{1}{2}\varphi^2$; celui de sa développée M est φ, et celui de R est égal à 1.

179. *Déterminer la direction de la droite* MW *qui, partant d'un point* M *d'une courbe, divise en deux parties égales la corde infiniment voisine parallèle à la tangente en* M; *trouver de plus la parabole ayant avec la courbe un contact du troisième ordre.* Ce problème est le dernier de la *Géométrie de position*. Je l'ai résolu n° 25 de mon *Essai* (1835), avant les solutions données par M. Transon (1841) et par Dupin (1848).

Si N, L sont les deux points de la courbe qui correspondent à $t + \omega$ et à $t - \psi$, on a

$$ON \triangleq OM + \omega \textcircled{D} M + \frac{\omega^2}{2}\textcircled{D}^2 M + \ldots,$$

$$OL \triangleq OM - \psi\,\textcircled{D} M + \ldots,$$

$$LN \triangleq (\omega + \psi)\,\textcircled{D} M + \tfrac{1}{2}(\omega^2 - \psi^2)\,\textcircled{D}^2 M + \tfrac{1}{6}(\omega^3 + \psi^3)\,\textcircled{D}^3 M + \ldots,$$

et, pour que cette droite soit parallèle à la tangente $\textcircled{D}M$, il faudra que l'expression

$$3(\omega - \psi)\,\textcircled{D}^2 M + (\omega^2 - \omega\psi + \psi^2)\,\textcircled{D}^3 M$$

le soit également; cette expression, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \psi)$ et composée avec $(\omega + \psi)\,\textcircled{D}M$, donnera la droite LN (*).

ω, ψ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \psi$ soit un infiniment petit du second ordre, comme

(*) On néglige évidemment ici les infiniment petits d'ordre supérieur, ce qui est du reste parfaitement licite.

(*Note du Traducteur.*)

l'est $\omega^2 - \omega\psi + \psi^2$. Posant

$$\omega - \psi = q\omega^2,$$

nous devrons déterminer la quantité réelle q, de manière que l'on ait

$$(14) \qquad 3q\mathcal{D}^2\mathrm{M} + \mathcal{D}^3\mathrm{M} \bumpeq r\mathcal{D}\mathrm{M},$$

r étant aussi réel ; d'après quoi la direction de la droite, qui joint le point M au milieu de LN, sera donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MN} + \mathrm{ML} \bumpeq (\omega - \psi)\mathcal{D}\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}(\omega^2 + \psi^2)\mathcal{D}^2\mathrm{M},$$

ou

$$(15) \qquad \mathrm{MW} \bumpeq q\mathcal{D}\mathrm{M} + \mathcal{D}^2\mathrm{M}.$$

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

M. *Ch. Forestier*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse, nous communique l'observation suivante, au sujet de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale en 1873. (*Voir* même tome, p. 88.)

« *Les lieux du centre et des foyers de la conique* B *sont complétement indépendants de la loi suivant laquelle on fait varier la grandeur des axes de l'ellipse* A, *pourvu que leurs directions et le centre restent les mêmes ; il est inutile d'assigner la condition que l'ellipse* A *reste homofocale. C'est immédiatement évident, puisque l'équation* $c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$ *de la conique* B, *étant homogène en* a *et* b, *les équations qui détermineront les coordonnées d'un point quelconque défini de la conique ne dépendront que du rapport* $\frac{a}{b}$, *et l'élimina-*

tion de ce rapport donnera l'équation du lieu. On pourra même supposer que l'ellipse A *se transforme en hyperbole, ou que b devient imaginaire.* »

M. *H. Gondelon*, élève au lycée de Moulins, nous a adressé, un peu tardivement, une solution bien exacte de la question 1118, déjà résolue par un assez grand nombre de lecteurs des *Nouvelles Annales*. (*Voir* même tome, p. 63 et 106.)

BIBLIOGRAPHIE.

Un auteur, toujours fort original, M. *Léopold Hugo*, vient de faire paraître un nouvel *Essai sur la Géométrie des Cristalloïdes*, avec cette épigraphe : *la Sphère est un Équidomoïde*. Grand in-8; 1873.

Voici les titres des chapitres :

I. Segmentation du prisme triangulaire. — II. Polygonisation des théorèmes. — III. Cristallisation des théorèmes. — IV. Grande planche systématique des figures cristalloïdales employées dans l'Architecture et dans l'Industrie.

PUBLICATIONS RÉCENTES (1874).

La Chaleur, mode de mouvement, par *John Tyndall*, L. L. D., F. R. S., professeur de Philosophie naturelle à l'Institution royale de la Grande-Bretagne; 2ᵉ édition française, traduite de l'anglais sur la 4ᵉ édition, par M. l'abbé Moigno. In-18 jésus de 576 pages, avec 110 figures dans le texte; 1874. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE TRILINÉAIRE, par *A. Cambier*, ancien élève de l'École Normale des Sciences, professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Mons. — Mons, Hector Manceaux, imprimeur-libraire-éditeur.

TAVOLE NUMERICHE DEL LOGARITMO INTEGRALE, ossia dell' esponenziale-integrale e di altri integrali *euleriani*. Nota del prof. *Giusto Bellavitis*, M. E. del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Estr. dal vol. XVIII delle Memorie dell' Istituto stesso). — Venezia, presso la Segreteria del R. Istituto nel palazzo ducale. Tipografia di *Giuseppe Antonelli*; 1874.

GIORNALE DI MATEMATICA ELEMENTARE E COMPUTISTERIA, edito e diretto da *Giovanni Massa*; anno I. — *Nizza, Montferrato*; 1874.

NOTE SUR L'ÉNONCÉ DE LA QUESTION 1125

(voir même tome, p. 64).

Euler a démontré dans son Algèbre (t. II, n° 238), qu'il existe une infinité de systèmes de trois nombres entiers x, y, z, tels que les sommes x^2+y^2, x^2+z^2, y^2+z^2 de leurs carrés pris deux à deux sont des carrés de nombres entiers; de là résulte que :

« Un tétraèdre dont les six arêtes sont mesurées par des nombres entiers peut avoir parmi ses angles solides un trièdre trirectangle »; par conséquent, la question 1125 se réduit à la proposition suivante :

« *Sur les arêtes d'un trièdre trirectangle on peut, et d'une infinité de manières, prendre trois longueurs* OA, OB, OC, *en nombres entiers, telles que l'aire du triangle*

ABC *soit elle-même mesurée par un nombre entier, ainsi que les trois autres faces du tétraèdre résultant* OABC. »

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1018

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

Si deux ellipses, de même centre et de mêmes axes en direction ont une aire égale, les angles excentriques au point commun sont complémentaires. Considérer le point limite où les ellipses s'approchent de la similitude; trouver le lieu du point limite d'intersection.

(A. WITWORTH).

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

les équations des deux ellipses, avec la relation

$$a'b' = ab = m^2.$$

Les équations peuvent s'écrire

$$a^4y^2 + m^4x^2 = a^2m^4, \quad a'^4y^2 + m^4x^2 = a'^2m^4,$$

d'où, pour les points communs,

$$y^2 = \frac{m^4}{a^2 + a'^2}, \quad x^2 = \frac{a^2a'^2}{a^2 + a'^2}.$$

Si φ et φ' sont les angles excentriques en l'un des points communs, on a

$$\cos^2\varphi = \frac{a'^2}{a^2+a'^2}, \quad \cos^2\varphi' = \frac{a^2}{a^2+a'^2} = \sin^2\varphi;$$

donc φ et φ' sont complémentaires.

Si les ellipses s'approchent indéfiniment de la similitude, a' tend vers a, et à la limite

$$x^2 = \frac{a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{m^4}{2a^2} = \frac{b^2}{2}.$$

Les points communs sont les extrémités des diamètres conjugués égaux.

On obtiendra le lieu de ces points limites en éliminant a^2 entre les deux équations précédentes. En les multipliant membre à membre, il vient

$$x^2y^2 = \frac{m^4}{4}, \quad xy = \pm\frac{m^2}{2}.$$

Le lieu se compose de deux hyperboles équilatères conjuguées ayant pour asymptotes les axes des ellipses, lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux, et enveloppe des ellipses de surface donnée πm^2, ayant mêmes axes en direction (*voir* 2e série, t. VIII, p. 321).

Note.— M. Pellissier a, comme M. Moret-Blanc, résolu la question 1018, en rectifiant le premier énoncé de cette question. (*Voir* 2e série, t. X, p. 191.)

Question 1072

(voir 2e série, t. XI, p. 144);

PAR M. FOURET,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à une droite et à un cylindre de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur le cylindre. (MANNHEIM.)

Cet énoncé peut se généraliser de la manière suivante:

Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à deux cylindres de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur l'un de ces cylindres.

Soient r le rayon de la sphère; a et b les rayons des cylindres que je désignerai respectivement par (A) et (B); d la plus courte distance de leurs axes; et γ l'un des angles que forment les directions de ces droites.

Pour chercher le lieu du point de contact de la sphère avec le cylindre (A), prenons pour axes des z et des x l'axe de (A) et la perpendiculaire commune aux axes de (A) et de (B). L'axe des y perpendiculaire aux deux autres se trouve déterminé.

x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque du lieu cherché, les coordonnées du centre de la sphère, de rayon r, tangente en ce point au cylindre (A), sont

$$x\frac{a\pm r}{a},\quad y\frac{a\pm r}{a},\quad z,$$

en prenant le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que la sphère est supposée d'un côté ou de l'autre du plan tangent au cylindre (A).

Nous exprimerons que cette sphère est tangente à (B) en écrivant que son centre est à une distance de l'axe de (B) égale à $b\pm r$, ce qui donne l'équation

$$(c)\quad \left(x\frac{a\pm r}{a}-d\right)^2+\left(y\frac{a\pm r}{a}\cos\gamma-z\sin\gamma\right)^2=(b\pm r)^2.$$

En remarquant que l'on peut combiner deux à deux les signes des binômes $(a\pm r)$ et $(b\pm r)$ de quatre manières différentes, on voit que cette équation représente quatre surfaces du second ordre qui, par leur intersection avec le cylindre (A), fournissent quatre courbes gauches du quatrième ordre constituant dans leur ensemble le lieu en question.

La forme de l'équation (c) montre que les surfaces qu'elle représente sont des cylindres elliptiques, ayant deux par deux les mêmes plans principaux représentés par les équations

$$x = \frac{ad}{a \pm r},$$

$$y = \frac{a \tang \gamma}{a \pm r} z.$$

Les sections droites de ces cylindres sont des ellipses dont les demi-axes ont pour longueurs

$$a \frac{b \pm r}{a \pm r} \quad \text{et} \quad a \frac{b \pm r}{\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + (a \pm r)^2 \cos^2 \gamma}}.$$

Ces éléments déterminent les cylindres d'une manière complète.

Pour avoir le lieu qui fait l'objet de la question 1072, il suffit de supposer que le cylindre (B) se réduit à son axe, c'est-à-dire que $b = 0$.

Les quatre cylindres elliptiques se réduisent alors à deux, et le lieu ne se compose plus que de deux courbes gauches du quatrième ordre. Celles-ci peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires.

On voit aisément que :

Si $d < a$, les deux courbes sont réelles ;

Si $a < d < a + 2r$, la courbe correspondant aux sphères extérieures est seule réelle ;

Si $d > a + 2r$, les deux courbes sont imaginaires.

On peut enfin remarquer que la courbe, lieu des contacts des sphères intérieures, n'est jamais formée que d'un anneau unique, tandis que, dans le cas de $d < r$, la courbe correspondant aux sphères extérieures se compose de deux anneaux distincts.

Note.— La même question a été résolue par MM. Gambey et Moret-Blanc.

Question 1106

(voir 2e série, t. XI, p. 528);

PAR M. JAMET,

Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval).

Dans un paraboloïde hyperbolique, la génératrice de chaque système qui passe par le sommet est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. (A. TISSOT).

Soient

LA, L'B deux génératrices de l'un des systèmes (*);

xy une génératrice de l'autre;

P un plan parallèle au plan directeur de ce second système.

Si par le point A, où xy coupe LA, je mène AC parallèle à L'B, cette droite AC ira couper le plan P en un certain point C, situé sur l'intersection du plan P et du plan mené par LA, parallèlement à L'B; ou, ce qui revient au même, parallèlement au plan directeur du premier système. De plus, si L' est la trace de L'B sur le plan P, on aura L'C = AB, et le segment AB, intercepté par deux génératrices du premier système sur une génératrice du second, sera minimum quand L'C sera minimum, c'est-à-dire quand L'C sera perpendiculaire à l'intersection LC des deux plans directeurs; mais alors

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

AB, qui est parallèle à L'C, sera perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, et, par suite, passera par le sommet.

Note. — La même question a été résolue par MM. Bourguet, Gambey, Dewulf, Moret-Blanc, Ylliac de Goïsel, Tourettes.

Question 1120

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Construire géométriquement une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point.

(DE SAINT-GERMAIN.)

Cette construction se fait simplement au moyen du théorème suivant, qui est facile à démontrer :

Si, d'un point quelconque M *d'une hyperbole équilatère, on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ *sur une tangente* AB *et sur le diamètre* OT, *mené du centre* O *au point de contact* T, *les distances* OP *et* OQ *sont égales.*

Pour la construction, abaisser du point donné M une perpendiculaire MP sur la tangente donnée AB; mener du point donné M une tangente MQ au cercle décrit du point O comme centre avec OP pour rayon, et joindre OQ qui rencontre AB au point de contact T.

Le point de contact de la tangente donnée étant connu, les asymptotes s'en déduisent immédiatement, etc.

Il y a, en général, deux solutions.

Note du Rédacteur. — La question 1120 a déjà été proposée (2e série, t. III, p. 445) et résolue (2e série, t. IV, p. 320); mais de toutes les solutions qu'on en a données, et qu'on peut en donner, celle de M. Moreau est assurément la plus simple; et puis le théorème d'où cette solution se déduit immédiatement nous semble mériter d'être remarqué. Quant à sa démonstration, nous laissons au lecteur le plaisir de la trouver.

(G.)

QUESTIONS.

1135. a, b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est égale à un nombre entier (*).

(Catalan.)

1136. Le nombre entier p étant la somme de quatre carrés entiers, on a

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, positifs ou négatifs, tels que la somme algébrique

$$2p + P + Q + R + S$$

est égale à un carré; et l'on a aussi

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2,$$

P', Q', R', S' étant des entiers dont la somme algébrique est égale à p. (S. Realis.)

1137. Deux hyperboloïdes gauches H_1, H_2 ont une génératrice L commune. Par tout point m de L passent une génératrice L_1 de H_1 et une génératrice L_2 de H_2. Comment varie l'angle $\widehat{L_1 L_2}$ quand m parcourt L?

(Dewulf.)

(*) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*, seconde Note (Académie des *Nuovi Lincei*, 1873). J'ai donné plusieurs théorèmes d'Arithmétique dans mes *Recherches sur quelques produits indéfinis* (Gauthier-Villars).

1138. Dans un quadrilatère sphérique, deux côtés opposés sont fixes de directions et variables de grandeur, et les deux autres sont variables de directions, mais ils ont une grandeur constante égale à $\frac{\pi}{2}$. Trouver le lieu du point de rencontre des diagonales. (L. BOURGUET.)

1139. Par un point A extérieur à une parabole, on mène deux tangentes à la courbe et aux points de contact des normales qui se coupent en un point B. Quel doit être le lieu du point A pour que celui du point B soit : 1° une droite; 2° un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole? (ANDROUSSKI.)

1140. Par les sommets A, B, C d'un triangle inscrit dans un cercle, on mène des parallèles aux côtés opposés; elles rencontrent la circonférence en des points A', B', C'. On prolonge les cordes A'B', A'C', B'C' qui coupent respectivement les côtés AB, AC, BC du triangle donné aux points c, b, a. Démontrer que le point de rencontre des hauteurs du triangle abc est le centre du cercle donné. (H. BROCARD.)

1141. On considère deux tangentes fixes AC, BC aux points A et B d'une conique fixe; C est le point de rencontre des tangentes, AB est la corde des contacts.

Par chacun des points A et B, on mène une sécante quelconque; elles rencontrent la conique en μ et ν respectivement. Les droites $A\mu$, $A\nu$ coupent la tangente BC en M et N; les droites $B\mu$, $B\nu$ coupent la tangente AC en M' et N'. Ceci admis, on a les deux propriétés suivantes :

1° Le rapport anharmonique des quatre points A, C, M', N' est égal à celui des quatre points C, B, M, N;

2° Les quatre droites AB, $\mu\nu$, MN', M'N passent par un même point. (L. PAINVIN.)

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE arc sin$x$ AU MOYEN DE LA FORMULE DE MACLAURIN;

PAR M. CHEVILLIET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Il suffit de considérer le cas où x est positif.

On connaît la loi des coefficients; car, si l'on pose

$$f(x) = \text{arc}\sin x,$$

on a, en général (BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 146),

$$\frac{f^{2n}(0)}{1.2.3\ldots 2n} = 0, \quad \frac{f^{2n-1}(0)}{1.2.3\ldots(2n-1)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \frac{1}{2n-1},$$

ce qui permet d'écrire

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \text{R},$$

où

$$\text{R} = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(\theta x),$$

en adoptant la troisième forme du reste; n est l'exposant de x dans le terme qui précède immédiatement R.

$f^{n+1}(\theta x)$ est donné par la formule (*ibid.*, p. 144)

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = {} & \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}} \\ & \times\Bigg[1 - \frac{1}{1}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ & + \frac{1.3}{1.2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ & - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots \\ & \mp \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-3} \\ & \pm \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-2} \\ & \mp \frac{1.3}{1.2}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-1} \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\Bigg], \end{aligned}$$

le signe supérieur correspondant au cas où n est pair, et le signe inférieur à celui où il est impair. Ici n est impair; par conséquent, il faut prendre le signe inférieur. On a donc

$$R = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)\frac{x}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}$$
$$\times\left[1-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n}\right].$$

Si n augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers zéro, car son inverse

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$>1+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

augmente indéfiniment. Le deuxième a aussi pour limite zéro, si x est inférieur à l'unité, ce qu'on doit supposer pour que la série soit convergente. Le troisième facteur reste fini.

Le quatrième également, comme nous allons essayer de le prouver. D'abord il est facile de voir, comme M. Bertrand l'a déjà montré (*ibid.*, p. 144), que les coefficients des différents termes dont il se compose vont en diminuant en valeur absolue jusqu'au milieu. Cela posé, nous disons que :

Si dans le polynôme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0 - A_1 z + A_2 z^n + \ldots \pm A_n z^n \mp A_n z^{n+1} + \ldots \\ \quad - A_2 z^{2n-1} + A_1 z^{2n} - A_0 z^{2n+1}, \end{array}\right.$$

où les coefficients positifs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *vont en diminuant,* z *est positif et* < 1, *la valeur de ce polynôme est moindre que* A_0.

On peut en effet mettre (1) sous la forme

$$A_0(1 - z^{2n+1}) - A_1 z(1 - z^{2n-1}) + A_2 z^2(1 - z^{2n-3}) \dots \pm A_n z^n (1 - z),$$

ou, en mettant $1 - z$ en facteur commun,

$$\begin{aligned}(1 - z)\big[&A_0(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n})\\ &- A_1 z(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-2})\\ &+ A_2 z^2(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-4}) + \dots - \pm A_n z^n\big].\end{aligned}$$

En ordonnant l'expression entre crochets, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{r|r|r|l}
A_0 + A_0 & z + A_0 & z^2 + \dots + A_0 & z^n + \dots \\
- A_1 & - A_1 & - A_1 & \\
 & + A_2 & + A_2 & \\
 & & \vdots & \\
 & & \pm A_n &
\end{array}\\[2ex]
\begin{array}{r|r|r|l}
+ A_0 & z^{2n-2} + A_0 & z^{2n-1} + A_0 & z^{2n}. \\
- A_1 & - A_1 & & \\
+ A_2 & & &
\end{array}
\end{array}\right.$$

Or, d'après les hypothèses que nous avons faites, les coefficients des différentes puissances de z sont positifs, et, à l'exception des deux extrêmes, moindres que A_0, de sorte que l'expression (2) est moindre que

$$A_0(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n}),$$

moindre, *a fortiori*, que

$$A_0(1 + z + z^2 + \dots) = \frac{A_0}{1 - z};$$

donc le polynôme (1) est plus petit que A_0.

(Le cas où $z = 1$ ne fait pas exception, car alors le polynôme est nul).

Dans le cas actuel $A_0 = 1$ et l'on a, par suite,

$$R < \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\left(\frac{x - \theta x}{1 - \theta x}\right)^n \frac{x}{\sqrt{1 - \theta^2 x^2}},$$

qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment; donc

$$\text{arc sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{1.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

PROBLÈME DE HUYGHENS;

Par M. A. PICART.

Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques et rangés en ligne droite : le premier vient choquer le second avec une vitesse donnée v; le deuxième, avec la vitesse communiquée par le premier, choque le troisième; celui-ci avec sa vitesse acquise choque le quatrième et ainsi de suite; les masses du premier et du dernier étant données, trouver celles que doivent avoir les corps intermédiaires, pour que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible.

Ce problème a été proposé et résolu pour la première fois par Huyghens (1669), dans le cas particulier de trois corps. D'autres géomètres ont étendu sa solution à un nombre quelconque de corps, mais sans se préoccuper des caractères analytiques qui assurent l'existence du maximum ou du minimum. Lagrange, le premier (*Mémoires de Turin*, 1759), démontra, dans le cas général, l'existence du maximum, en appliquant à ce problème une méthode nouvelle de recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. Seulement il se borna à vérifier les conditions du maximum pour trois masses intermédiaires, en ajoutant : « Au reste, dans ce problème, quel que soit le nombre des masses, on trouvera les conditions du maximum toutes remplies, si l'on veut bien prendre la peine de pousser plus loin le calcul. » C'est cette généralisation que je me propose de faire ici pour un nombre quelconque n de masses intermédiaires.

Soient a la masse du premier corps, b celle du dernier, soient ensuite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les masses intermédiaires inconnues. En se rappelant que, dans le choc de deux corps élastiques, la quantité de mouvement et la force vive restent les mêmes avant et après le choc, on trouvera que la vitesse communiquée par le premier corps a au deuxième x_1 est égale à $\frac{v\,2a}{a+x_1}$: que celle que donne celui-ci au troisième x_2 est égale à $\frac{v\,2a\,2x_1}{(a+x_1)(x_1+x_2)}$, et ainsi de suite, de telle sorte que la vitesse reçue par le dernier b sera exprimée par

$$\frac{v\,2a\,2x_1\,2x_2\,2x_3\ldots 2x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)},$$

et que la fonction dont il s'agit de trouver le maximum est

$$Z=\frac{x_1\,x_2\,x_3\ldots x_{n-1}\,x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}.$$

Il faut égaler à zéro les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction. Or on a

$$lZ=lx_1+lx_2+\ldots+lx_n-l(a+x_1)-l(x_1+x_2)-\ldots-l(x_n+b),$$

d'où l'on tire

$$\frac{Z'_{x_1}}{Z}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{a+x_1}-\frac{1}{x_1+x_2},$$

$$\frac{Z'_{x_2}}{Z}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_2+x_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Z'_{x_p}}{Z}=\frac{1}{x_p}-\frac{1}{x_{p-1}+x_p}-\frac{1}{x_p+x_{p+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Z'_{x_n}}{Z}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}+x_n}-\frac{1}{x_n+b},$$

ou

$$\frac{Z'_{x_1}}{Z} = \frac{a x_2 - x_1^2}{x_1 (a + x_1)(x_1 + x_2)},$$

$$\frac{Z'_{x_2}}{Z} = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_2 (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{Z'_{x_p}}{Z} = \frac{x_{p-1} x_{p+1} - x_p^2}{x_p (x_{p-1} + x_p)(x_p + x_{p+1})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{Z'_{x_n}}{Z} = \frac{x_{n-1} b - x_n^2}{x_n (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}.$$

Donc, pour le maximum ou le minimum, on doit avoir

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a x_2 - x_1^2 &= 0, \\ x_1 x_3 - x_2^2 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ x_{p-1} x_{p+1} - x_p^2 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ x_{n-1} b - x_n^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

ou

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{p-1}}{x_p} = \frac{x_p}{x_{p+1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b};$$

d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrêmes sont les masses données a et b. Pour juger à présent du maximum ou du minimum, il faut considérer la fonction homogène du second degré

$$Z''_{x_1^2} h_1^2 + Z''_{x_2^2} h_2^2 + \ldots + Z''_{x_p^2} h_p^2 + \ldots + Z''_{x_n^2} h_n^2 + 2 Z''_{x_1 x_2} h_1 h_2 + \ldots$$
$$+ 2 Z''_{x_p x_q} h_p h_q + \ldots + 2 Z''_{x_{n-1} x_n} h_{n-1} h_n,$$

et voir si les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que donnent les équations (1), étant introduites dans les coefficients, cette fonction reste toujours négative ou toujours positive pour toutes les valeurs possibles des quantités h_1, $h_2, \ldots, h_n$. Soit fait, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{Z}}{x_1(a+x_1)(x_1+x_2)}=\alpha_1,$$
$$\frac{\mathrm{Z}}{x_2(x_1+x_2)(x_2+x_3)}=\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\mathrm{Z}}{x_p(x_{p-1}+x_p)(x_p+x_{p+1})}=\alpha_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\mathrm{Z}}{x_n(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}=\alpha_n,$$

on aura

$$\mathrm{Z}'_{x_1}=\alpha_1(ax_2-x_1^2),$$
$$\mathrm{Z}'_{x_2}=\alpha_2(x_1x_3-x_2^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{Z}'_{x_p}=\alpha_p(x_{p-1}x_{p+1}-x_p^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{Z}'_{x_n}=\alpha_n(x_{n-1}b-x_n^2),$$

d'où l'on tire, en tenant compte des équations (1),

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Z}''_{x_1^2}=-2\alpha_1x_1, & \mathrm{Z}''_{x_1x_2}=a\alpha_1,\\
\mathrm{Z}''_{x_2^2}=-2\alpha_2x_2, & \mathrm{Z}''_{x_2x_3}=x_1\alpha_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \mathrm{Z}''_{x_3x_4}=x_2\alpha_3,\\
\mathrm{Z}''_{x_p^2}=-2\alpha_px_p, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \mathrm{Z}''_{x_px_{p+1}}=x_{p-1}\alpha_p,\\
\mathrm{Z}''_{x_n}=-2\alpha_nx_n, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
 & \mathrm{Z}''_{x_{n-1}x_n}=x_{n-2}\alpha_{n-1};
\end{array}$$

toutes les autres dérivées partielles du second ordre sont nulles.

La fonction homogène du second degré se réduit donc ici à la forme

$$A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2 + \ldots + A_n h_n^2 + 2B_1 h_1 h_2 + 2B_2 h_2 h_3$$
$$+ 2B_3 h_3 h_4 + \ldots + 2B_{n-1} h_{n-1} h_n.$$

Pour qu'elle soit toujours négative, quelles que soient les valeurs des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$, il faut d'abord que l'on ait $A_1 < 0$. En la mettant sous la forme

$$A_1\left(h_1 + \frac{B_1 h_2}{A_1}\right)^2 + \left(A_2 - \frac{B_1^2}{A_1}\right) h_2^2 + A_3 h_3^2 + \ldots + A_n h_n^2$$
$$+ 2B_2 h_2 h_3 + 2B_3 h_3 h_4 + \ldots + 2B_{n-1} h_{n-1} h_n,$$

on voit qu'on doit avoir de plus

$$A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} < 0;$$

puis, en posant

$$A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} = a_2$$

et faisant une transformation analogue,

$$A_3 - \frac{B_2^2}{a_2} < 0;$$

puis, en désignant cette quantité par a_3,

$$A_4 - \frac{B_3^2}{a_3} < 0,$$

et ainsi de suite. Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour le maximum.

Or, si l'on désigne par r la raison de la progression

$$a : x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n : b,$$

on a

$$x_1 = ar, \quad x_2 = ar^2, \ldots, \quad x_p = ar^p, \ldots, \quad x_n = ar^n,$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{r^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{r^6}, \quad \alpha_4 = \frac{\alpha_1}{r^9}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\alpha_1}{r^{3(n-1)}};$$

par suite la fonction homogène du second degré prend la forme

$$-2a\alpha_1 rh_1^2 - \frac{2a\alpha_1}{r}h_2^2 - \frac{2a\alpha_1}{r^3}h_3^2 - \ldots - \frac{2a\alpha_1}{r^{2p-3}}h_p^2 - \ldots$$

$$-\frac{2a\alpha_1}{r^{2n-3}}h_n^2 + 2a\alpha_1 h_1 h_2 + \frac{2a\alpha_1}{r^2}h_2 h_3 + \frac{2a\alpha_1}{r^4}h_3 h_4 + \ldots$$

$$+\frac{2a\alpha_1}{r^{2p-2}}h_p h_{p+1} + \ldots + \frac{2a\alpha_1}{r^{2n-4}}h_{n-1}h_n,$$

ou

$$2a\alpha_1\left(-rh_1^2 - \frac{1}{r}h_2^2 - \frac{1}{r^3}h_3^2 - \ldots - \frac{1}{r^{2n-3}}h_n^2 + h_1 h_2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}h_2 h_3 + \frac{1}{r^4}h_3 h_4 + \ldots + \frac{1}{r^{2n-4}}h_{n-1}h_n\right).$$

Comme $2a\alpha_1$ est une quantité essentiellement positive, on peut supprimer ce facteur, et alors les conditions à vérifier pour le maximum sont

$$a_1 = -r < 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{r} - \frac{1}{4a_1} < 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{4r^4 a_2} < 0,$$

$$a_4 = -\frac{1}{r^5} - \frac{1}{4r^8 a_3} < 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{n-1} = -\frac{1}{r^{2n-5}} - \frac{1}{4r^{4n-12}a_{n-2}} < 0,$$

$$a_n = -\frac{1}{r^{2n-3}} - \frac{1}{4r^{4n-8}a_{n-1}} < 0.$$

Comme a_1 est du premier degré par rapport à r, on voit que a_2 est du degré -1, a_3 du degré -3, a_p du degré $-(2p-3)$, de sorte que ces inégalités, divisées respectivement par r, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$, ..., $\frac{1}{r^{2n-3}}$, peuvent s'écrire

$$b_1 = -1 < 0,$$

$$b_2 = -1 - \frac{1}{4b_1} < 0,$$

$$b_3 = -1 - \frac{1}{4b_2} < 0,$$

$$b_4 = -1 - \frac{1}{4b_3} < 0,$$

$$b_5 = -1 - \frac{1}{4b_4} < 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_{n-1} = -1 - \frac{1}{4b_{n-2}} < 0,$$

$$b_n = -1 - \frac{1}{4b_{n-1}} < 0;$$

et, pour les vérifier, il faut trouver l'expression générale du $p^{ième}$ terme de la suite

$$b_1, \quad b_2, \ldots, \quad b_p, \quad b_{p+1}, \ldots, \quad b_n, \ldots,$$

sachant que $b_1 = -1$ et que

$$b_{p+1} = -1 - \frac{1}{4b_p}.$$

C'est là une équation aux différences finies que l'on résout facilement; on trouve

$$b_p = -\frac{p+1}{2p}.$$

Donc toutes les quantités b_1, b_2, ..., b_p sont négatives;

par suite la fonction homogène prend le signe — pour toutes les valeurs possibles de $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Les valeurs en progression géométrique trouvées pour les masses intermédiaires correspondent donc au maximum de la vitesse du dernier corps. On peut arriver à cette conclusion d'une manière bien plus rapide.

Si l'on désigne par r la raison de la progression géométrique

$$a : x_1 : x_2 : \ldots : x_n : b,$$

on a

$$x_1 = ar, \quad x_2 = ar^2, \ldots, \quad x_n = ar^n,$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{r^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{r^6}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\alpha_1}{r^{3(n-2)}};$$

par suite la fonction homogène du second degré se réduit à la forme

$$-2a\alpha_1 \left[rh_1^2 + \frac{1}{r} h_2^2 + \frac{1}{r^3} h_3^2 + \ldots + \frac{1}{r^{2n-3}} h_n^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{r^2} h_2 h_3 + \frac{1}{r^4} h_3 h_4 + \ldots + \frac{1}{r^{2(n-2)}} h_{n-1} h_n \right],$$

ou

$$-2a\alpha_1 \left[\frac{r}{2} h_1^2 + \left(\sqrt{\frac{r}{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} h_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2r}} h_2 + \frac{1}{\sqrt{2r^3}} h_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2r^3}} h_3 + \frac{1}{\sqrt{2r^5}} h_4 \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{2r^{2n-5}}} h_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{2r^{2n-3}}} h_n \right)^2 + \frac{1}{2r^{2n-3}} h_n^2 \right],$$

et l'on voit qu'elle est négative pour toutes les valeurs possibles de $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 189);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

180. Une parabole, ayant au point M un contact du troisième ordre avec la courbe donnée, peut s'exprimer par

$$\mathrm{MN} \triangleq y\,\mathrm{MT} + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{MW},$$

N étant le point générateur de la parabole, MT sa tangente, MW la direction du diamètre (179), et y la variable de laquelle dépendent les différents points de la parabole. Pour qu'il y ait contact du troisième ordre entre la courbe donnée M et la parabole N, il faut (169) qu'on puisse prendre pour y une telle fonction de t, que $y = 0$ donne

$$\mathcal{D}\mathrm{M} \triangleq \mathcal{D}y\,\mathrm{MT} + y\,\mathcal{D}y\,\mathrm{MW},$$
$$\mathcal{D}^2\mathrm{M} \triangleq \mathcal{D}^2y\,\mathrm{MT} + (y\,\mathcal{D}^2y + \mathcal{D}y^2)\,\mathrm{MW},$$
$$\mathcal{D}^3\mathrm{M} \triangleq \mathcal{D}^3y\,\mathrm{MT} + (y\,\mathcal{D}^3y + 3\,\mathcal{D}y\,\mathcal{D}^2y)\,\mathrm{MW},$$

les droites MT, MW étant considérées comme fixes dans les seconds membres.

Par suite, se rappelant que $\mathrm{MT} \triangleq \mathcal{D}\mathrm{M}$, lorsque $y = 0$, on devra avoir

$$\mathcal{D}y = 1,$$

puis

$$\mathcal{D}^2\mathrm{M} \triangleq -\,q\,\mathcal{D}\mathrm{M} + \mathrm{MW}, \tag{15}$$

$-q$ étant la valeur que prend $\mathcal{D}y^2$ lorsque $y = 0$.

Finalement

$$\mathfrak{D}^3\mathrm{M} \triangleq \mathfrak{D}^3 y\, \mathfrak{D}\mathrm{M} - 3q\,\mathrm{MW}.$$

Substituant, dans cette relation, la valeur de MW donnée par (15), on aura

(16) $$\mathfrak{D}^3\mathrm{M} + 3q\,\mathfrak{D}^2\mathrm{M} \triangleq (\mathfrak{D}^3 y - 3q^2)\,\mathfrak{D}\mathrm{M}.$$

Cette équipollence servira à déterminer q, pour en substituer ensuite la valeur dans

$$\mathrm{MW} \triangleq q\,\mathfrak{D}\mathrm{M} + \mathfrak{D}^2\mathrm{M}.$$

On voit donc que cette droite MW est la même que celle du numéro précédent.

181. Comme première application, cherchons la parabole qui a un contact du troisième ordre avec la développante de cercle exprimée (178) par

$$\mathrm{OM} \triangleq \int \varepsilon^{\varphi}\varphi\, d\varphi.$$

Posant, pour abréger, $\mathfrak{D}\varphi = 1$, c'est-à-dire prenant les dérivées par rapport à φ, d'après la relation (14), nous devrons rendre réelle l'expression

$$3q(1 + \varphi\sqrt{}) + (2\sqrt{} - \varphi).$$

Par suite, nous aurons

$$q \triangleq -\frac{2}{3\varphi},$$

et, substituant dans (15),

$$\mathrm{MW} \triangleq \left(\tfrac{1}{3} + \varphi\sqrt{}\right)\varepsilon^{\varphi}.$$

Donc (*fig.* 35), si l'on prolonge de $\mathrm{RW} \triangleq \frac{1}{3}\mathrm{OR}$ le rayon de courbure $\mathrm{OR} = 1$ de la développée AR, la droite MW divisera en deux parties égales la corde de la courbe AM parallèle à la tangente au point M et infiniment voisine.

Cette relation, entre le rayon de courbure MR, celui RO de sa développée et la direction de la droite MW, subsiste, quelle que soit la courbe M. Si celle-ci est une conique, MW en est un diamètre : on a ainsi un moyen facile de construire le rayon de courbure RO de la développée d'une conique.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 181.

Pour étendre la relation entre les droites MW, MR et RO à une courbe quelconque, supposons que l'équation en soit écrite sous la forme (7) du n° 168, et prenons l'arc s pour variable indépendante.

Nous aurons

$$\mathfrak{D}M \triangleq \varepsilon^{\varphi},\quad \mathfrak{D}^2 M \triangleq \surd\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi,\quad \mathfrak{D}^3 M \triangleq \varepsilon^{\varphi}(\surd\,\mathfrak{D}^2\varphi - \mathfrak{D}\varphi).$$

D'après la relation (14), il faudra rendre réelle l'expression

$$3q\surd\,\mathfrak{D}\varphi + \surd\,\mathfrak{D}^2\varphi - \mathfrak{D}\varphi,$$

ce qui nous donnera

$$q = -\frac{\mathfrak{D}^2\varphi}{3\,\mathfrak{D}\varphi}.$$

De là, substituant dans (15),

$$MW \triangleq \varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi\left(\surd - \frac{\mathfrak{D}^2\varphi}{3\,\mathfrak{D}\varphi^2}\right).$$

Mais la relation (8) du même n° 168, appliquée successivement aux courbes M et R, donne

$$MR \triangleq \surd\,\frac{\varepsilon^{\varphi}}{\mathfrak{D}\varphi},$$

$$RC \triangleq \surd\,\frac{\mathfrak{D}\,\mathrm{gr.}\,MR}{\mathfrak{D}\varphi}\,\varepsilon^{\varphi-\frac{\pi}{2}} \triangleq \frac{\mathfrak{D}\left(\frac{1}{\mathfrak{D}\varphi}\right)}{\mathfrak{D}\varphi}\,\varepsilon^{\varphi} \triangleq \frac{\mathfrak{D}^2\varphi}{\mathfrak{D}\varphi^3}\,\varepsilon^{\varphi},$$

d'où

$$\frac{RC}{3} \triangleq \frac{\mathfrak{D}^2\varphi}{3\,\mathfrak{D}\varphi^3}\,\varepsilon^{\varphi},$$

et, par soustraction,

$$MR - \frac{RC}{3} \triangleq MR + \frac{CR}{3} \triangleq \frac{\varepsilon^{\varphi}}{\mathfrak{D}\varphi}\left(\surd - \frac{\mathfrak{D}^2\varphi}{3\,\mathfrak{D}\varphi^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$MR + \frac{CR}{3} \triangleq \frac{MW}{\mathfrak{D}\varphi^2},$$

ce qui montre bien que les deux droites $MR + \frac{CR}{3}$ et MW ont la même direction.

182. Une courbe rapportée à des coordonnées parallèles, soit orthogonales, soit obliques, est exprimée par l'équipollence

$$\mathrm{OM} \bumpeq x\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB}.$$

Prenant les dérivées par rapport à x, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\mathrm{M} &\bumpeq \mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\,\mathrm{OB},\\
\mathfrak{D}^2\mathrm{M} &\bumpeq \mathfrak{D}^2 y\,\mathrm{OB},\\
\mathfrak{D}^3\mathrm{M} &\bumpeq \mathfrak{D}^3 y\,\mathrm{OB}.
\end{aligned}$$

D'après l'équipollence (14) du n° 179, nous devons réduire

$$(3q\,\mathfrak{D}^2 y + \mathfrak{D}^3 y)\,\mathrm{OB}$$

à être parallèle à $\mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\,\mathrm{OB}$, ce qui ne peut s'obtenir qu'en supposant

$$3q\mathfrak{D}^2 y + \mathfrak{D}^3 y = 0.$$

D'après cela, la relation (15) donnera

$$\mathrm{MW} \bumpeq -\frac{\mathfrak{D}^3 y}{3\mathfrak{D}^2 y}(\mathrm{OA} + \mathfrak{D}y\,\mathrm{OB}) + \mathfrak{D}^2 y\,\mathrm{OB}.$$

183. Dans la spirale logarithmique

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\mathrm{M} &\bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \surd),\\
\mathfrak{D}^2\mathrm{M} &\bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \surd)^2, \ldots
\end{aligned}$$

Donc, d'après la relation (14),

$$3q\,(a + \surd)^2 + (a + \surd)^3 \bumpeq r(a + \surd),$$

c'est-à-dire

$$3q + 2a = 0,$$

et l'on aura

$$\mathrm{MW} \bumpeq \left(\frac{a}{3} + \surd\right)(a + \surd)\,e^{at}\,\varepsilon^t.$$

184. Problème. — *Trouver la section conique ayant un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée, en un de ses points* M. — Considérons l'ellipse qui, passant par le point M, a pour centre W, et dont le demi-diamètre, conjugué à WM, est équipollent à la droite MT, supposée tangente à la courbe donnée.

Cette ellipse aura pour équipollence (145)

$$WN \triangleq x\,WM + y\,MT,$$

$x^2 + y^2$ étant égal à 1; de là

$$MN \triangleq (1 - \sqrt{1 - y^2})\,MW + y\,MT.$$

L'hyperbole de centre C est

$$CN \triangleq \sqrt{1 - y^2}\,CM + y\,.\,MT,$$

et, posant $CM \triangleq MW$, on aura

$$MN \triangleq (\sqrt{1 + y^2} - 1)\,MW + y\,MT.$$

Ainsi, en tenant compte des seuls termes du quatrième ordre, nous pourrons établir, pour la conique osculatrice, l'équipollence

$$MN \triangleq (\tfrac{1}{2}y^2 \pm \tfrac{1}{8}y^4)\,MW + y\,MT \ (*),$$

le signe supérieur répondant au cas de l'ellipse, et le signe inférieur au cas de l'hyperbole. La même équipollence exprime la parabole (180), lorsqu'on y supprime le terme affecté du double signe.

Les conditions du contact du quatrième ordre, entre la courbe M et la conique (par rapport à laquelle les points M, W, T doivent être considérés comme fixes), s'obtiennent par dérivation, puis en faisant $y = 0$; si

(*) On obtient cette forme en développant les radicaux par la formule du binôme. (*Note du Traducteur.*)

bien que, en supposant, pour abréger, lorsque $y = 0$, qu'on ait

$$\textcircled{D} y = p,$$
$$\textcircled{D}^2 y = -pq,$$
$$\frac{\textcircled{D}^3 y}{p} - 3q^2 = r,$$

on a, pour la détermination des droites MT, MW, les équipollences

$$(16) \qquad p\,\mathrm{MT} \triangleq \textcircled{D}\mathrm{M},$$

$$(17) \qquad p^2\,\mathrm{MW} \triangleq \textcircled{D}^2\mathrm{M} + q\,\textcircled{D}\mathrm{M},$$

pourvu que les quantités réelles p, q, r satisfassent à la relation

$$(18) \qquad \textcircled{D}^3\mathrm{M} \triangleq -3q\,\textcircled{D}^2\mathrm{M} + r\,\textcircled{D}\mathrm{M},$$

et que la droite

$$(19) \qquad \textcircled{D}^4\mathrm{M} - (4r + 15q^2 \pm 3p^2)\,\textcircled{D}^2\mathrm{M}\ (^*)$$

soit parallèle à $\textcircled{D}\mathrm{M}$.

La valeur de q, donnée par la relation (18), est la même que celle donnée par la relation (14) du n° 179; et, par suite, la droite MW de la relation (17) a la même direction que celle de la relation (15), (179).

185. Pour la développante de cercle (178, 181), nous avons déjà trouvé

$$q = -\frac{2}{3\varphi},$$

si bien que l'équipollence (18) donne

$$\varepsilon^\varphi(2\surd - \varphi) - \frac{2}{\varphi}\varepsilon^\varphi(1 + \varphi\surd) \triangleq \varphi . r\varepsilon^\varphi,$$

(*) Ces résultats et ceux qui suivent proviennent de calculs de dérivées, un peu longs peut-être, mais sans difficultés sérieuses.

(*Note du Traducteur.*)

d'où

$$r = 1 - \frac{2}{\varphi^2},$$

$$4r + 15q^2 = -4 - \frac{4}{3\varphi^2},$$

et, d'après l'expression (19), nous devrons rendre réelle la suivante :

$$-3 - \varphi\sqrt{} + \left(4 + \frac{4}{3\varphi^2} \mp 3p^2\right)(1 + \varphi\sqrt{}),$$

ce qui ne peut s'obtenir qu'avec le signe supérieur et en posant

$$p^2 = 1 + \frac{4}{9\varphi^2},$$

d'après quoi les relations (16), (17) détermineront deux diamètres conjugués de l'ellipse osculatrice. Nous pourrons dire que la développante de cercle a, en tous ses points, une *courbure elliptique,* puisqu'elle a un contact du quatrième ordre avec une ellipse.

186. Dans le cas général où

$$\mathrm{OM} \bumpeq x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB},$$

y étant fonction de la variable indépendante x, nous avons déjà trouvé (182),

$$3q\,\mathcal{D}^2 y + \mathcal{D}^3 y = 0,$$

et la relation (18) donne $r = 0$; puis, d'après (19), on a

$$\pm p^2 = \frac{\mathcal{D}^4 y}{3\,\mathcal{D}^2 y} - \frac{5}{9}\left(\frac{\mathcal{D}^3 y}{\mathcal{D}^2 y}\right)^2.$$

Le signe de ce second membre montre si la courbure est *elliptique* ou *hyperbolique,* et, s'il s'annule, la courbure est *parabolique*.

187. Pour la spirale logarithmique (**183**)

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\,\varepsilon^{t},$$

on a

$$3q + 2a = 0,$$
$$r = 3qa + a^2 - 1 = -a^2 - 1,$$

et nous devrons rendre réelle l'expression

$$(a + \surd)^3 - (\tfrac{8}{3}a^2 - 4 \pm 3p^2)(a + \surd),$$

ce qui donne

$$\pm p^2 = \tfrac{1}{9}a^2 + 1.$$

On doit prendre le signe supérieur; la courbure est elliptique, et l'ellipse osculatrice a son centre déterminé par

$$(\tfrac{1}{3}a - \surd)\,\mathrm{MW} \bumpeq (a + \surd)\,\mathrm{OM}.$$

Par des calculs semblables, on trouve aussi que la cycloïde a en tous ses points la courbure elliptique; que la logarithmique et la sinusoïde ont, au contraire, la courbure hyperbolique; que la parabole ou hyperbole

$$\mathrm{OM} \bumpeq x\mathrm{OA} + x^n\mathrm{OB}$$

a une courbure toujours elliptique si n tombe entre $\frac{1}{2}$ et 2, et toujours hyperbolique si n est moindre que $\frac{1}{2}$ ou plus grand que 2. La lemniscate, exprimée par

$$\mathrm{OM} \bumpeq \sqrt{1 + \varepsilon^{t}},$$

a une courbure elliptique auprès des sommets, hyperbolique dans les environs des points d'inflexion; elle a donc quatre points où la courbure est parabolique. Ces points correspondent à

$$\cos\frac{t}{2} = 1 : 4,$$

et sont faciles à construire.

188. Problème. — *Trouver l'enveloppe d'un système de courbes exprimé par* $OM \bumpeq \Phi(t, \tau)$, *τ étant un paramètre dont les valeurs réelles donnent toutes les courbes du système.* — Comme chaque point de la courbe cherchée doit se trouver sur l'une des courbes données, il en résulte que cette même équipollence nous représentera aussi la courbe cherchée, pourvu qu'on y suppose que τ est une certaine fonction de t. Or, au point M, la tangente à la courbe correspondant à une valeur déterminée du paramètre τ est donnée en direction (163) par la dérivée $\mathfrak{D}_t M$ prise par rapport à la seule variable t; au lieu que la tangente à la courbe exprimée par

$$OM \bumpeq \Phi(t, \tau),$$

lorsqu'on y suppose que τ soit une fonction de t, est exprimée par la dérivée

$$\mathfrak{D}M \bumpeq \mathfrak{D}_t M + \mathfrak{D}_\tau M \, \mathfrak{D}\tau,$$

$\mathfrak{D}\tau$ étant la dérivée de τ par rapport à t.

Pour que la seconde courbe soit l'enveloppe des premières, il faut que ces deux tangentes aient une direction identique; par suite la droite $\mathfrak{D}_t M$ devra être parallèle à $\mathfrak{D}_t M + \mathfrak{D}_\tau M \, \mathfrak{D}\tau$, et aussi conséquemment à $\mathfrak{D}_\tau M$. La relation entre t et τ s'obtiendra donc au moyen de l'équipollence

$$\mathfrak{D}_t M \bumpeq p \, \mathfrak{D}_\tau M, \qquad (20)$$

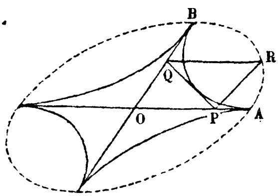
p étant un coefficient réel indéterminé.

189. Supposons que, dans l'équipollence $OM \bumpeq \Phi(t, \tau)$, t soit le paramètre variable de courbe à courbe, et que τ soit la variable qui, sur chaque courbe, distingue un point de l'autre; de cette manière, l'équipollence représentera un second système de courbes tout à fait différent du pre-

mier. Si l'on cherche leur enveloppe, on retombera sur la même relation (20); par suite, *les deux systèmes de courbes représentés par* $\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t, \tau)$ *ont la même enveloppe.*

190. Soient OA, OB (*fig.* 36) deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, de chaque point R de laquelle on

Fig. 36.



mène les parallèles RQ, RP à OA, OB; et supposons que l'on se propose de rechercher l'enveloppe de la droite PQ. Cette droite est spécifiée par un paramètre τ, qui satisfera (145) aux relations

$$\mathrm{OP} \bumpeq \cos\tau . \mathrm{OA},$$
$$\mathrm{OQ} \bumpeq \sin\tau . \mathrm{OB},$$

et un point quelconque M de cette droite est exprimé (44) par

$$\mathrm{OM} \bumpeq t\mathrm{OP} + (1 - t)\,\mathrm{OQ} \bumpeq t\cos\tau\mathrm{OA} + (1 - t)\sin\tau\mathrm{OB}.$$

La même équipollence, en y regardant t comme un paramètre et τ comme la variable de point à point, exprime un système d'ellipses, ayant les deux demi-diamètres conjugués t.OA, $(1 - t)$OB.

Ces ellipses (189) auront la même enveloppe que les droites PQ. Dans le cas actuel, la condition (22) devient

$$\cos\tau\mathrm{OA} - \sin\tau\mathrm{OB} \bumpeq p\,[-t\sin\tau\mathrm{OA} + (1 - t)\cos\tau\mathrm{OB}],$$

ce qui donne $t = \cos^2\tau$. Donc l'enveloppe ci-dessus est la courbe exprimée par l'équipollence

$$OM \triangleq \cos^3\tau . OA + \sin^3\tau . OB \quad (*).$$

191. Selon mes principes pour la classification des courbes (*voir* le *Mémoire sur la classification des courbes du troisième ordre*, Société italienne, t. XXV), la dernière équipollence exprime une *espèce* de courbe *algébrique rationnelle* (en appelant ainsi celles que j'avais d'abord appelées *courbes algébriques d'ordre barycentrique*). Cette courbe est du sixième ordre et de la quatrième classe; elle peut être dite *tétracuspide*, présentant quatre points de rebroussement, situés aux extrémités de deux *diamètres de symétrie*, conjugués entre eux.

Dans le cas où OA, OB sont perpendiculaires, on a cette *variété* particulière, dans laquelle les diamètres de symétrie sont perpendiculaires entre eux; ces courbes sont des développées d'ellipses.

Si les droites OA, OB, outre qu'elles sont perpendiculaires, sont de plus égales, la courbe est de cette *forme* particulière qu'on peut appeler *tétracuspide régulière*. Dans ce cas, elle est en même temps l'enveloppe de la droite PQ de longueur constante qui se meut à l'intérieur de l'angle droit AOB, et celle des ellipses concentriques dont la somme des axes est constante. Son équipollence (en posant gr. OA + gr. OB = 1) est

$$\begin{aligned} OM &\triangleq \cos^3\tau + \sin^3\tau . \surd \\ &\triangleq \tfrac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau})^3 - \tfrac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} - \varepsilon^{-\tau})^3 \\ &\triangleq \tfrac{3}{4}\varepsilon^{\tau} + \tfrac{1}{4}\varepsilon^{-3\tau}. \end{aligned}$$

(*) Si l'on voulait résoudre le même problème pour l'hyperbole, on trouverait l'équipollence analogue

$$OM \triangleq \mathrm{ch}^3\tau . OA - \mathrm{sh}^3\tau . OB.$$

(*Note du Traducteur.*)

Elle peut être conséquemment engendrée par la composition de deux mouvements de rotation, de rayons $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, et avec une égale vitesse absolue : c'est donc une *hypocycloïde ordinaire*.

192. Problème. — *Déterminer les trajectoires obliques des ellipses concentriques et confocales.* — D'après une propriété connue de l'ellipse (148), ce problème se réduit à cet autre : Trouver la courbe M dont la tangente a une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des deux rayons vecteurs OM, FM, plus un angle constant. Ce problème a peut-être été résolu, pour la première fois, dans mon *Essai* (1835), en donnant un plus grand caractère de généralité à un problème réputé difficile par Euler (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1826, t. X).

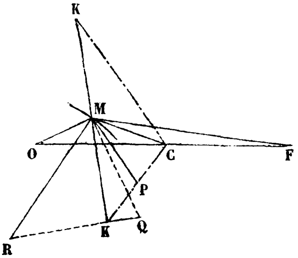
La condition du problème

$$\text{inc.}\,\mathrm{d}M = \tfrac{1}{2}(\text{inc.}\,OM + \text{inc.}\,FM) + \alpha$$

est exprimée par

$$\mathrm{d}M \simeq p\varepsilon^{\alpha}\sqrt{OM.FM}.$$

Fig. 37.



En raison de ce qu'il y a d'arbitraire dans la manière de faire entrer la variable t dans la fonction OM, nous pourrons donner à p une valeur réelle qui simplifie les formules. Posons

$$p = \text{Ⓛ}t : \sin\alpha,$$
$$\text{OF} \doteqdot 4,$$
$$\text{OC} \doteqdot 2 \quad (\textit{fig. } 37).$$

L'équipollence

$$d\text{M} \doteqdot (\cot\alpha + \surd)\sqrt{(\text{CM}+2)(\text{CM}-2)}\,dt,$$

intégrée selon les procédés connus (18), en se rappelant (163) que

$$\text{ⓁM} \doteqdot \text{ⓁCM},$$

donne

$$\text{CM} \doteqdot ce^{t(\cot\alpha+\surd)} + \frac{1}{c}e^{-t(\cot\alpha+\surd)}.$$

Posant

$$e^{\cot\alpha} = a,$$

l'équipollence de la courbe cherchée est

(1) $$\text{CM} \doteqdot ca^t\varepsilon^t + 1 : ca^t\varepsilon^t.$$

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 192.

I. *Trajectoires obliques d'un système de courbes planes.* — Soit $\text{OM} \doteqdot f(pt)$ l'équipollence d'un système de courbes, t étant la variable indépendante pour chacune d'elles, et p le paramètre variable de courbe à courbe. Nous nous proposons de déterminer une courbe qui rencontre les premières en chacun de ses points sous un angle α, soit constant, soit fonction du paramètre p.

On voit aisément que l'équipollence précédente représentera la trajectoire oblique cherchée, à la condition que p soit lié avec t par la relation suivante, où le signe $\doteqdot$ indique simplement le parallélisme

$$\frac{dt}{dp} + \frac{f'_p(pt)}{f'_t(pt)} \doteqdot \varepsilon^\alpha.$$

Comme exemple très-simple, proposons-nous de trouver la courbe qui coupe toutes les droites issues d'un même point sous un angle α fonction de l'inclinaison de chaque droite. L'équipollence du système des droites peut s'écrire

$$\text{OM} \doteqdot t\varepsilon^p.$$

Il vient alors

$$\frac{dt}{dp} + t\sqrt{\ } \triangleq \varepsilon^{\alpha},$$

$$\frac{t\,dp}{dt} = \operatorname{tang}\alpha = \varphi(p),$$

$$\frac{dt}{t} = \frac{dp}{\varphi(p)},$$

$$t = ce^{\int \frac{dp}{\varphi(p)}}.$$

II. *Développante d'une courbe plane.*— Soient M une courbe plane, N sa développante. L'équipollence de cette dernière sera $ON \triangleq OM + q\,\frac{dM}{dt}$, pourvu que la quantité réelle q satisfasse à la relation

$$\frac{dq + dt}{q} + \frac{d^2M}{dM} \triangleq \sqrt{\ }.$$

Par suite, si $\frac{d^2M}{dM} \triangleq du + \sqrt{\ }dv$, on aura, par intégration,

$$q = e^{-u}\int e^{u}\,dt.$$

193. Cherchons directement les trajectoires obliques des ellipses confocales. Nous exprimerons ces ellipses au moyen de l'équipollence (152)

$$(2) \qquad CM \triangleq e^{\tau}\varepsilon^{t} + e^{-\tau}\varepsilon^{-t},$$

e^{τ}, $e^{-\tau}$ étant deux quantités réelles constantes, dont on fait le produit égal à 1, parce que l'excentricité est $CF \triangleq 2$.

τ est donc un paramètre qui varie d'une ellipse à l'autre. On peut noter incidemment que, si l'on supposait inversement τ variable de point à point, et t paramètre constant pour chaque courbe, la même équipollence (2) exprimerait la série des hyperboles ayant pour foyers F, O.

La tangente à l'ellipse est donnée par

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_t M \triangleq (e^{\tau}\varepsilon^{t} - e^{-\tau}\varepsilon^{-t})\sqrt{\ },$$

et l'équipollence (2) exprimera aussi (188) la trajectoire cherchée, si l'on suppose que τ, au lieu d'un paramètre constant, soit une fonction convenable de t. Dans cette hypothèse, la tangente à la trajectoire sera donnée par

$$(4)\quad \mathfrak{D}_t \mathrm{M} + \mathfrak{D}_\tau \mathrm{M} \mathfrak{D}\tau \bumpeq (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}) \sqrt{} + (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}) \mathfrak{D}\tau .$$

D'après la condition des trajectoires obliques, la différence des inclinaisons de (3), (4) devant être constante, nous aurons, en enlevant le facteur commun $e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}$,

$$\sqrt{} + \mathfrak{D}\tau \bumpeq p\varepsilon^\alpha \bumpeq p \cos\alpha + p \sin\alpha . \sqrt{} .$$

Par suite

$$\mathfrak{D}\tau \bumpeq \cot\alpha ,$$

c'est-à-dire

$$\tau = t \cot\alpha + \log c .$$

Ainsi la relation (2) devient celle (1) du nº 192.

194. Indiquons quelques propriétés de la courbe trouvée. L'équipollence (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{CP} \bumpeq c a^t \varepsilon^t , \\ \mathrm{PM} \bumpeq c^{-1} a^{-t} \varepsilon^{-t} , \end{array} \right.$$

lesquelles expriment que M décrit autour du point P une spirale logarithmique, en même temps que P en décrit une autre autour de C, les deux mouvements étant liés entre eux par l'équipollence

$$(6)\quad \mathrm{CP} . \mathrm{PM} \bumpeq 1 .$$

Ainsi notre courbe est, par rapport à la spirale logarithmique, ce qu'est l'ellipse, considérée comme hypocycloïde (152) par rapport au cercle.

195. Si nous posons

$$\mathrm{CK} \bumpeq 2\mathrm{CP} \bumpeq 2 c a^t \varepsilon^t \bumpeq 2 e^\tau \varepsilon^t ,$$
$$\mathrm{CK}_1 \bumpeq 2\,\mathrm{PM} \bumpeq 4 : \mathrm{CK} ,$$

le point M est au milieu de la droite $\mathrm{K_1K}$. La tangente en M à notre courbe forme avec MK l'angle α. En effet, en prenant, pour abréger, les dérivées par rapport à la variable indépendante

$$x = t : \sin\alpha,$$

on a

$$(7)\qquad \begin{aligned} \mathcal{D}\mathrm{M} &\bumpeq (ca^t\varepsilon^t - c^{-1}a^{-t}\varepsilon^{-t})\,(\cot\alpha + \surd)\,\mathcal{D}t \\ &\bumpeq (ca^t\varepsilon^t - c^{-1}a^{-t}\varepsilon^{-t})\,\varepsilon^\alpha \\ &\bumpeq \varepsilon^\alpha\,\mathrm{MK}. \end{aligned}$$

En outre

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{D}^2\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{2\alpha}\,\mathrm{CM}, \\ &\mathcal{D}^3\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{3\alpha}\mathrm{MK}, \\ &\mathcal{D}^4\mathrm{M} \bumpeq \varepsilon^{4\alpha}\,\mathrm{CM}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Donc, d'après l'équipollence (4) du n° 164, nous poserons

$$\varepsilon^\alpha\mathrm{CM} \bumpeq (l + \lambda\surd)\,\mathrm{MK},$$

et le rayon de courbure sera donné par

$$\mathrm{MR} \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\,\varepsilon^\alpha\,\mathrm{MK}.$$

Nous pourrons construire ces deux équipollences en menant la droite MQ ayant sur MC l'inclinaison $\alpha + \frac{\pi}{2}$, puis en élevant KQ perpendiculaire à MK; de sorte que, en comparant la relation

$$\mathrm{MK} + \mathrm{KQ} \bumpeq \mathrm{MQ}$$

avec la précédente

$$\mathrm{MK} + \frac{l}{\lambda\surd}\,\mathrm{MK} \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\,\varepsilon^\alpha\,\mathrm{MC},$$

nous verrons que

$$\mathrm{MR} \bumpeq \mathrm{MQ}.\mathrm{MK} : \mathrm{MC}.$$

Il en résulte que le triangle MQR sera directement semblable à MCK.

Le rayon vecteur issu du foyer O est

$$OM \,\underline{\smile}\, e^{\tau}\varepsilon^{t} + 2 + e^{-\tau}\varepsilon^{-t};$$

sa racine

$$e^{\frac{\tau}{2}}\varepsilon^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{\tau}{2}}\varepsilon^{-\frac{t}{2}}$$

est donc de la même forme que CM; en outre (52) on a

$$\text{gr.}\,OM = e^{\tau} + e^{-\tau} + \varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t}$$

et semblablement

$$\text{gr.}\,FM = e^{\tau} + e^{-\tau} - \varepsilon^{t} - \varepsilon^{-t}.$$

Donc les deux variables τ et t, qui sont liées entre elles (193) par une équation du premier degré, dépendent, l'une de la somme, et l'autre de la différence des deux rayons vecteurs.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tome VI.

Mai 1873. — Notice sur les Tables logarithmiques hollandaises, par *D. Bierens de Haan*.

Juin. — Sur l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de *Platon*, par M. *L.-Am. Sedillot*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Juillet. — Les Mathématiques en Belgique en 1872, par le D[r] *P. Mansion*, professeur à l'Université de *Gand*.

Aout. — Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell'antichità e nel medio evo del D[r] *Sigismond Günther*. Traduzione dal tedesco del D[r] *Alfonso Sparagna*.

Intorno ad un passo della Geometria di *Boezio* relativo al pentagono stellato. *B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Ce cahier contient (p. 313-340) un Mémoire de M. Günther sur l'histoire des polygones étoilés, où M. Günther rapporte (p. 333-335) un passage inédit d'un Commentaire d'*Adélard de Bath*, sur les Éléments d'Euclide, tiré d'un manuscrit de la Bibliothèque de la ville de *Nuremberg*, coté VI.-13. On y trouve les propositions suivantes :

1. Dans un pentagone ordinaire de n angles, la somme des angles est donnée par $(n-2)2R$.

2. Pour tout pentagone de ce genre, la somme des angles extérieurs pris dans un seul sens est $4R$.

3. Dans les pentagones étoilés du premier ordre, les angles intérieurs donnent $2R$.

4. Pour tous les pentagones étoilés de second ordre, on a la formule $2nR - 2(n-1)R = 2R$.

5. Si un côté quelconque coupe les deux autres quatre ou six fois, la somme des angles correspondants est $2nR - 12R$, ou $2nR - 20R$.

M. Günther cite aussi (p. 324-325) un passage de la Géométrie de *Boèce* relatif aux pentagones étoilés, et loue beaucoup l'explication que M. Chasles en a donnée dans son *Aperçu historique*, etc. (p. 476 et 477), en disant que c'est seulement au moyen de cette explication qu'on peut tirer de ce passage un sens admissible.

M. Boncompagni rapporte ce passage de Boèce (p. 341-356) d'après les sept éditions suivantes :

1. Nec sunt opera boetii, etc. Venetiis, 1491-1492.
2. Nec sunt opera boetii, etc. Venetiis, 1497-1499.
3. Anitii | manlii seve | rini boethi, etc. opera, etc. basileæ, etc. M. D. XLVI.

4. ANITII | MANLII SEVE | RINI BOETHI, etc. OPERA, etc. BASILEÆ, etc. M. D. LXX.
5. GROMATICI VETERES | EX RECENSIONE | CAROLI LACHMANNI, etc. BEROLINI, etc. 1848.
6. PATROLOGIÆ | CURSUS, etc. SERIES PRIMA, etc. ACCURANTE J.-P. MIGNE, etc. TOMUS LXIII, etc., 1847.
7. A.-M.-T.-S. | BOETII | DE INSTITUTIONE ARITHMETICA, etc. EDIDIT | GODOFREDUS FRIEDLEIN | LIPSIÆ, etc., MDCCCLXVII.

Ensuite (p. 349-354), M. Boncompagni indique les titres de vingt-huit manuscrits qui contiennent le passage dont il s'agit, et les pages et les lignes de ces manuscrits où il se trouve.

Enfin (p. 356, lignes 21-27), M. Boncompagni fait remarquer que la leçon « *portionibus* » adoptée avec beaucoup de raison par M. Chasles, au lieu de la leçon « *proportionibus* », se trouve dans quatre des sept éditions et dans vingt-six des vingt-huit manuscrits mentionnés ci-dessus, et que la leçon « *proportionaliter* », adoptée aussi par M. Chasles, au lieu de « *proportionabiliter* », se trouve dans sept de ces vingt-huit manuscrits.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 37

(voir 1^re^ série; t. I, p. 395);

PAR M. H. BROCARD,

Capitaine du Génie à Biskra.

Démontrer que l'équation $\frac{9\sin x}{5+4\cos x} = x$ *n'a pas de racine réelle positive supérieure à* 3, *et n'a qu'une racine positive comprise entre* 2 *et* 3. (CAUCHY.)

On peut considérer l'équation proposée comme résultant de l'élimination de y entre les deux suivantes :

$$y = 5 + 4\cos x, \quad y = \frac{9\sin x}{x}.$$

La première représente une *sinusoïde* comprise entre les droites $y=1$, $y=9$, sur lesquelles se trouvent les sommets dont les abscisses ont pour valeurs $k\pi$.

La seconde représente une courbe qui coupe l'axe des x aux points $x=k\pi$, et dont l'ordonnée à partir de $x=3\pi$ est inférieure à 1.

Les deux courbes ont, au point $x=0$, $y=9$, un contact du second ordre, comme il est facile de s'en assurer.

Pour des valeurs croissantes de x à partir de zéro, $5+4\cos x$ est d'abord inférieur à $\frac{9\sin x}{x}$, et, pour $x=\pi$, on a

$$5+4\cos x=1 \quad \text{et} \quad \frac{9\sin x}{x}=0;$$

il existe donc certainement entre zéro et π une racine réelle positive de l'équation proposée. D'ailleurs la forme et la disposition des deux courbes ne permettent qu'un seul point d'intersection dans cet intervalle. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une seule racine positive entre zéro et π.

On peut resserrer ces limites ; car, pour $x=\frac{3\pi}{4}=2,35$, la fonction $u=9\sin x-(4\cos x+5)x$ est positive, et a pour valeur $u=+1,204\ldots$

Pour

$$x=2,70, \quad u=+0,148,\ldots.$$

Pour

$$x=2,80, \quad u=-0,416,\ldots.$$

Les substitutions $x=2,726$ et $x=2,72775$ donnent

$$u=+0,0201 \quad \text{et} \quad u=-0,0295.$$

On en déduit pour nouvelle approximation

$$x=2,7264,$$

correspondant à

$$x = 156^\circ 12' 40'', 4.$$

Examinons maintenant s'il existe une racine réelle positive supérieure à 3 (*). Il résulte de ce qui précède qu'il n'y a lieu à considérer que l'intervalle de $5\frac{\pi}{2}$ à 3π. La fonction $y = \frac{9\sin x}{x}$ est égale à $1,14,\ldots$ pour $x = \frac{5\pi}{2}$, et reste moindre que l'unité, à partir de $x = 8$; or, pour cette valeur, $5 + 4\cos x$ est égal à $4,45,\ldots$; donc la rencontre des deux courbes ne peut avoir lieu dans l'intervalle considéré; par conséquent, l'équation proposée n'admet qu'une seule racine réelle positive, comprise entre 2 et 3, et qui a pour valeur approchée $x = 2,7264$.

Question 855

(voir 2e série, t. VII, p. 189);

PAR M. LAUNOY,

Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Démontrer que la distance δ *d'un point* x, y, z *à une droite* $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ *est donnée dans un système de coordonnées obliques quelconque par la formule*

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = {} & (bz - cy)^2 \sin^2 yz + (cx - az)^2 \sin^2 xz + (ay - bx)^2 \sin^2 xy \\ & + 2(bz - cy)(cx - az)(\cos yz \cos zx - \cos xy) \\ & + 2(cx - az)(ay - bx)(\cos zx \cos xy - \cos yz) \\ & + 2(ay - bx)(bz - cy)(\cos xy \cos yz - \cos zx),\end{aligned}$$

(*) Le *maximum* de $\frac{9\sin x}{5 + 4\cos x}$ est 3; par conséquent l'équation proposée

$$\frac{9\sin x}{5 + 4\cos x} = x$$

n'a pas de racine réelle positive supérieure à 3.

(G.)

en posant

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos yz + 2ac\cos xz + 2ab\cos xy.$$

(HOUSEL.)

L'énoncé de la question donnait à ρ^2 la valeur

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Cette valeur est inexacte ; on doit poser

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos yz + 2ac\cos xz + 2ab\cos xy.$$

L'énoncé étant ainsi rectifié, voici la démonstration de cette formule.

L'équation d'un plan passant par le point x, y, z et perpendiculaire à la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (a + b\cos xy + c\cos xz)(X - x) \\ \quad + (a\cos xy + b + c\cos yz)(Y - y) \\ \quad + (a\cos xz + b\cos yz + c)(Z - z) = 0. \end{array}\right.$$

Les équations de la droite peuvent s'écrire

$$(2)\qquad a(Z - z) - c(X - x) = (cx - az),$$

$$(3)\qquad c(Y - y) - b(Z - z) = (bz - cy).$$

Si, entre ces deux équations, on élimine $(Z - z)$, il viendra

$$(4)\qquad b(X - x) - a(Y - y) = (ay - bx).$$

Je multiplie les équations (2), (3), (4) respectivement par

$$\sin xz,\quad \sin yz,\quad \sin xy,$$

et, après avoir élevé au carré les équations obtenues, je les ajoute à l'équation (1), il en résulte une nouvelle équation dans laquelle je considère d'abord le coefficient de $(X - x)^2$. Il peut s'écrire

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos xy + 2ac\cos xz + 2bc\cos yz$$
$$+ 2bc\cos xz\cos xy - 2bc\cos yz,$$

en remplaçant

$$\sin^2 xz \quad \text{et} \quad \sin^2 xy$$

respectivement par

$$1 - \cos^2 xz \quad \text{et} \quad 1 - \cos^2 xy,$$

et en ajoutant et retranchant la quantité

$$2bc\cos yz.$$

D'après cela, ce coefficient revient à

$$\rho^2 + 2bc(\cos xz\cos xy - \cos yz).$$

Opérant une transformation analogue sur les coefficients de $(Y - y)^2$ et $(Z - z)^2$, j'aurai, pour leurs valeurs réduites,

$$\rho^2 + 2ac(\cos xy\cos yz - \cos xz),$$
$$\rho^2 + 2ab(\cos xz\cos yz - \cos xy).$$

Le coefficient de $2(X - x)(Y - y)$ peut s'écrire

$$a^2\cos xy + b^2\cos xy + ac\cos yz + 2ab\cos^2 xy$$
$$+ 2bc\cos yz\cos xy - bc\cos yz\cos xy$$
$$+ 2ac\cos xz\cos xy - ac\cos xz\cos xy + bc\cos xz$$
$$+ c^2\cos xz\cos yz + c^2\cos xy - c^2\cos xy.$$

J'ai remplacé

$$ab - ab\sin^2 xy$$

par

$$ab\cos^2 xy,$$

et j'ai ajouté et retranché en même temps la même quantité

$$bc\cos yz\cos xy + ac\cos xz\cos xy + c^2\cos xy.$$

Le coefficient devient alors

$$\rho^2 \cos xy + c^2(\cos xz \cos yz - \cos xy) - ac(\cos xz \cos xy - \cos yz) \\ - bc(\cos yz \cos xy - \cos xz).$$

On aurait de même, pour les coefficients de

$$2(X-x)(Z-z) \quad \text{et} \quad 2(Y-y)(Z-z),$$

$$\rho^2 \cos yz + a^2(\cos xy \cos xz - \cos zy) - ab(\cos xy \cos yz - \cos xz) \\ - ac(\cos xz \cos yz - \cos xy),$$

$$\rho^2 \cos xz + b^2(\cos yz \cos xy - \cos xz) - bc(\cos zy \cos xz - \cos xy) \\ - ab(\cos xy \cos xz - \cos yz).$$

L'équation ainsi modifiée devient, en posant

$$\delta^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + 2(Y-y)(Z-z)\cos yz \\ + 2(X-x)(Z-z)\cos xz + 2(X-x)(Y-y)\cos xy,$$

$$(A)\left\{\begin{aligned} \rho^2\delta^2 = {} & (bz-cy)^2\sin^2 yz + (cx-az)^2\sin^2(zx) + (ay-bx)\sin^2 xy \\ & +2(\cos yz\cos xz - \cos xy)[ac(Y-y)(Z-z) \\ & \quad - c^2(X-x)(Y-y) - ab(Z-z)^2 + bc(Z-z)(X-x)] \\ & +2(\cos zx\cos xy - \cos yz)[ab(X-x)(Z-z) \\ & \quad - a^2(Y-y)(Z-z) - bc(X-x)^2 + ac(X-x)(Y-y)] \\ & +2(\cos xy\cos yz - \cos zx)[bc(X-x)(Y-y) \\ & \quad - b^2(X-x)(Z-z) - ac(Y-y)^2 + ab(Y-y)(Z-z)]. \end{aligned}\right.$$

Si, maintenant, je multiplie deux à deux les équations (2), (3) et (4), j'aurai

$$ac(Y-y)(Z-z) - c^2(X-x)(Y-y) - ab(Z-z)^2 + bc(Z-z)(X-x) \\ = (bz-cy)(cx-az),$$

$$ab(X-x)(Z-z) - a^2(Y-y)(Z-z) - bc(X-x)^2 + ac(X-x)(Y-y) \\ = (cx-az)(ay-bx),$$

$$bc(X-x)(Y-y) - b^2(X-x)(Z-z) - ac(Y-y)^2 + ab(Y-y)(Z-z) \\ = (ay-bx)(bz-cy).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (A), il viendra

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = (bz - cy)^2\sin^2 yz + (cx - az)^2\sin^2 zx + (ay - bx)\sin^2 xy\\ + 2(\cos yz\cos xz - \cos xy)(bz - cy)(cx - az)\\ + 2(\cos zx\cos xy - \cos yz)(cx - az)(ay - bx)\\ + 2(\cos xy\cos yz - \cos zx)(ay - bx)(bz - cy),\end{aligned}$$

qui est la formule demandée.

Note. — Solution de la question 965 par le même auteur.

Question 1012

(voir 2e série, t. IX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu d'un point M *tel que le triangle formé par les tangentes issues de ce point à une conique et par la corde de contact ait une aire constante.*

Supposons d'abord que la conique donnée soit un cercle, et soient M le sommet d'un triangle AMB satisfaisant à la question; O le centre du cercle; r son rayon; C le point où OM coupe la base AB, et m^2 la surface donnée du triangle.

Appelons ω l'angle AOM; on a

$$AM = r\tang\omega,\quad MC = r\tang\omega\sin\omega,\quad AC = r\sin\omega,$$

et par conséquent

$$\frac{r^2\sin^3\omega}{\cos\omega} = m^2,$$

d'où

$$r^4\sin^6\omega = m^4(1 - \sin^2\omega).$$

Posons

$$\sin^2\omega = z,$$

l'équation devient

$$r^4 z^3 + m^4 z^2 - m^4 = 0.$$

Cette équation n'aura qu'une seule racine réelle positive, qu'on obtiendra par la formule de *Cardan*.

On aura ensuite

$$\mathrm{OM} = \frac{r}{\cos\omega} = \frac{r}{\sqrt{1-z}}.$$

Le lieu cherché sera une circonférence décrite du centre O, avec un rayon égal à $\frac{r}{\sqrt{1-z}} = a'$.

Soit maintenant l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On peut la considérer comme la projection d'un cercle de rayon a, situé dans un plan faisant avec celui de l'ellipse un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$.

On déterminera, comme précédemment, le rayon a' du cercle, lieu des points tels, que les tangentes menées de chacun d'eux à ce cercle, de rayon a, forment avec la corde de contact un triangle dont l'aire soit égale à $\frac{a}{b}m^2$. Sa projection sur le plan de l'ellipse sera une ellipse concentrique et homothétique à la première, dont les demi-axes seront a' et $\frac{b}{a}a'$, et qui sera le lieu géométrique des points tels, que les tangentes menées de chacun d'eux à l'ellipse donnée forment avec la corde de contact un triangle d'aire m^2; son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a'^2b^2.$$

Si, au lieu de l'ellipse, on a l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

il suffira, dans l'équation du lieu, de changer b^2 en $-b^2$, ce qui donnera une autre hyperbole homothétique et concentrique

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a'^2 b^2.$$

Si le grand axe de l'ellipse donnée s'allonge jusqu'à devenir infini, l'ellipse devient à la limite une parabole, et le lieu des points M, qui est toujours une ellipse homothétique et concentrique, devient à la limite une parabole de même axe.

Considérons d'abord le point M situé sur l'axe, et soit α sa distance au sommet de la parabole donnée. La surface du triangle correspondant sera

$$2\alpha\beta = m^2,$$

et l'on aura

$$\beta^2 = 2p\alpha, \quad \text{d'où} \quad \beta = (2p)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$2\alpha\beta = (2\alpha)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} = m^2,$$

$$2\alpha = \sqrt[3]{\frac{m^4}{p}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^4}{p}}.$$

Soit un autre point M′ non situé sur l'axe. Menons de ce point les deux tangentes, et une parallèle à l'axe qui rencontre la parabole en A′. Soient α' et β' les coordonnées de l'un des points de contact rapportées à ce diamètre et à la tangente en A′. On aura, en appelant θ l'angle que la corde de contact fait avec l'axe et p' le nouveau paramètre,

$$2\alpha'\beta' \sin\theta = m^2 \quad \text{et} \quad \beta'^2 = 2p'\alpha';$$

d'où

$$p'^{\frac{1}{2}} (2\alpha')^{\frac{3}{2}} \sin\theta = m^2 = p^{\frac{1}{2}} (2\alpha)^{\frac{3}{2}};$$

mais on sait que $p' \sin^2\theta = p$, et par suite $p'^{\frac{1}{2}} \sin\theta = p^{\frac{1}{2}}$; donc

$$2\alpha' = 2\alpha \quad \text{et} \quad \alpha' = \alpha.$$

La parabole, lieu des points M, n'est donc que la parabole primitive que l'on ferait glisser parallèlement à l'axe, et en sens inverse de cet axe, d'une quantité $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^4}{p}}$, et son équation sera

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^4}{p}}\right).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Linger, élève de l'École Polytechnique de Bude, Lez et Brocard.

Question 1101

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 527);

PAR M. POUJADE,

Professeur au lycée de Nice.

a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe ayant respectivement pour rayons a + b et a — b. Si, d'un point quelconque de l'un d'eux, on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle.

(JOSEPH BRUNO.)

Deux tangentes à l'ellipse rapportée à ses axes ont pour équations

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{x\cos\varphi'}{a} + \frac{y\sin\varphi'}{b} - 1 = 0.$$

en désignant par φ et φ' les paramètres angulaires des points de contact. Elles se coupent en un point dont les coordonnées sont

$$x = a\,\frac{\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}},\quad y = b\,\frac{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}},$$

et, pour que ce point soit sur le cercle qui a pour rayon $a+b$ par exemple, il faut que

$$(1)\qquad a^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}+b^2\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}=(a+b)^2\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}.$$

Les normales correspondantes sont représentées par

$$\frac{by}{\sin\varphi}-\frac{ax}{\cos\varphi}+c^2=0 \quad \text{et} \quad \frac{by}{\sin\varphi'}+\frac{ax}{\cos\varphi'}+c^2=0.$$

Leur point d'intersection a pour coordonnées

$$x'=\frac{c^2}{a}\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}},$$

$$y'=\frac{c^2}{b}\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}-\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}=z,\quad \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}=u,\quad \cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}=v.$$

Les relations

$$(1)\qquad a^2v^2+b^2u^2=(a+b)^2z^2 \quad \text{et} \quad u^2+v^2=1$$

donnent u^2 et v^2 en fonctions de z^2, et, par suite, les valeurs de x', y' deviennent

$$x'=\frac{[2z^2(a+b)-a]\sqrt{(a+b)^2z^2-b^2}}{cz},$$

$$y'=\frac{[b-2z^2(a+b)]\sqrt{a^2-(a+b)^2z^2}}{cz}.$$

Élevant au carré et ajoutant, z disparaît, ainsi qu'un facteur $(a+b)$, et l'on a

$$x'^2+y'^2=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}=(a-b)^2, \quad \text{C. Q. F. D. } (*).$$

Solution de la même question;

PAR M. CHARLES BRISSE.

On trouve dans Salmon, p. 244, pour les coordonnées de l'intersection des normales menées aux points (x', y'), (x'', y''),

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^4}\alpha x' x'', \quad y=\frac{b^2-a^2}{b^4}\beta y' y'',$$

α et β étant les coordonnées de l'intersection des tangentes aux points (x', y'), (x'', y'').

Des équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1,$$

on déduit

$$\frac{x' x''}{a^4}=\frac{b^2-\beta^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}, \quad \frac{y' y''}{b^4}=\frac{a^2-\alpha^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},$$

(*) La construction qui détermine les axes $2a$, $2b$ d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués conduit assez directement à la proposition énoncée. Supposez, en effet, que d'un point M situé à la distance $(a+b)$ du centre O de l'ellipse on mène à cette courbe deux tangentes, et aux points de contact des normales qui se coupent en un point N. Soient $OB=b'$ le rayon de l'ellipse dirigé suivant OM, et $OA=a'$ le rayon conjugué de OB; en menant du point B une perpendiculaire à OA, et prenant sur cette perpendiculaire de chaque côté du point B des distances BM', BN' égales à a', on déterminera un triangle OM'N' dans lequel $OM'=a+b$, $ON'=a-b$, $M'N'=2a'$. Or il n'est pas difficile de démontrer, sans calculs, que le triangle OM'N' est égal au triangle OMN, d'où $ON=ON'=a-b$.

Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé des deux tangentes et de la corde des contacts est égal à a', et la distance du centre de ce cercle au centre de l'ellipse est égale à b'. (G.)

et par suite, pour les coordonnées cherchées,

$$x = (a^2 - b^2)\frac{b^2 - \beta^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}\alpha, \quad y = (b^2 - a^2)\frac{a^2 - \alpha^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}\beta,$$

d'où, pour l'équation du lieu,

$$(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2(x^2 + y^2) = (a^2 - b^2)^2[\alpha^2(b^2 - \beta^2)^2 + \beta^2(a^2 - \alpha^2)^2],$$

ou, en multipliant le second membre par $\alpha^2 + \beta^2$, et le divisant par son égal $a^2 + b^2$,

$$(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2(x^2 + y^2) = (a - b)^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2.$$

Omettant le facteur $(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2$, on a donc

$$x^2 + y^2 = (a - b)^2.$$

Note. — La question 1101 a été résolue par MM. Androwski, étudiant à l'Université de Varsovie; Kruschwitz, à Berlin; Chervet, élève au lycée de Moulins; Ch. Combes, élève au lycée de Clermont-Ferrand; L. M. T., élève à Paris; Moret-Blanc, Bourguet, Gambey, Lez, Brocard, Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1117

(voir 2e série, t. XII, p. 335);

PAR M. FRÉDÉRIC DUBOST,
Élève du lycée de Moulins.

Supposons qu'un polygone régulier de n côtés soit circonscrit à un cercle et qu'on fasse tourner la moitié de ce polygone autour d'un axe passant par l'un des points de contact et par le centre, on trouvera sans grandes difficultés que la mesure V_n du volume engendré par le demi-polygone, en prenant pour unité le volume de la sphère inscrite, est donnée par la formule

(1) $$V_n = \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2, \text{ lorsque } n \text{ est impair,}$$

et par

(2) $$V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\frac{\pi}{n}\right), \text{ lorsque } n \text{ est pair.}$$

D'ailleurs, en faisant tourner un demi-polygone d'un nombre pair n de côtés autour d'un diamètre du cercle circonscrit, la mesure V'_n *du volume engendré, en prenant toujours pour unité le volume de la sphère inscrite, est donnée par la formule*

$$(3) \qquad V'_n = \text{séc}\,\frac{\pi}{n}.$$

Déduire des formules (1) *et* (2) *qu'on a les égalités*

$$V_3 - V_5 = \textit{le volume de la sphère},$$

$$V_3 + V_4 + V_5 = 5 \textit{ fois le volume de la sphère};$$

et des formules (1), (2) *et* (3) *qu'on a la suite décroissante*

$$V_3,\ V_4,\ V'_4,\ V_5,\ V_6,\ V'_6,\ldots$$

(COMPAGNON, professeur au collége Stanislas.)

1. Soient r le rayon de la sphère et O son centre. Je suppose d'abord n impair.

Le demi-polygone régulier étant ABC...LM, l'axe de rotation passe par le sommet A et par le point de contact M (*). Le volume V_n est la somme des volumes engendrés par le secteur polygonal OABC...L et par le triangle rectangle OML, dans lequel l'angle MOL $= \frac{\pi}{n}$.

Le premier a pour mesure

$$\frac{2}{3}\pi r^2 \times \text{AM} = \frac{2}{3}\pi r^2(r + \text{OL}) = \frac{2}{3}\pi r^3\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right).$$

La mesure du second est

$$\frac{1}{3} r \times \pi \text{ML}^2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \text{tang}^2\,\frac{\pi}{n};$$

d'où

$$V_n = \frac{\pi r^3}{3}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et, en prenant pour unité le volume de la sphère, on a

$$(1)\qquad V_n = \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

2. Si n est pair, l'axe de rotation passe par deux points de contact M et A. Le volume décrit par le demi-polygone ABC...LM se compose des volumes engendrés par les deux triangles rectangles OML, OAB, et par le secteur polygonal OBC...L. Il en résulte

$$V_n = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{tang}^2\frac{\pi}{n} + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}\left(1 + \text{séc}^2\frac{\pi}{n}\right),$$

et, en posant

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 1,$$

on a

$$(2)\qquad V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\frac{\pi}{n}\right).$$

3. Le rayon OL du cercle circonscrit au polygone considéré est égal à $r\,\text{séc}\frac{\pi}{n}$; par conséquent

$$V'_n = \frac{4}{3}\pi r^2 \times r\,\text{séc}\,\frac{\pi}{n} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{séc}\,\frac{\pi}{n},$$

et, en posant

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,$$

il vient

$$(3)\qquad V'_n = \text{séc}\,\frac{\pi}{n}.$$

4. La formule (1) donne

$$V_3 - V_5 = \frac{1}{4}\left[\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{5}\right)^2\right].$$

Or

$$\text{séc}\,\frac{\pi}{3}=2,\quad \text{séc}\,\frac{\pi}{5}=\sqrt{5}-1,$$

d'où

$$1+\text{séc}\,\frac{\pi}{3}=3,\quad 1+\text{séc}\,\frac{\pi}{5}=\sqrt{5},$$

et par suite

$$V_3-V_5=1.$$

Des formules (1) et (2), on déduit

$$V_3+V_4+V_5=\frac{1}{4}\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(1+\text{séc}^2\,\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{5}\right)^2,$$

ou

$$V_3+V_4+V_5=\frac{1}{4}\,9+\frac{1}{2}\,3+\frac{1}{4}\,5=5.$$

5. La suite V_3, V_4, V'_4, V_5, V'_6,... est décroissante, car

$$V_3=\frac{9}{4},\ V_4=\frac{3}{2},\ V'_4=\sqrt{2},\ V_5=\frac{5}{4},\ V'_6=\frac{2}{3}\sqrt{3},\ldots.$$

On voit facilement que, dans le cas de n pair, on a

$$V_n>V'_n\quad\text{ou}\quad \frac{1}{2}\left(1+\text{séc}^2\,\frac{\pi}{n}\right)>\text{séc}\,\frac{\pi}{n};$$

en effet, cette dernière inégalité revient à la suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\text{séc}\,\frac{\pi}{n}-1\right)^2>0,$$

qui est évidente.

Note du Rédacteur. — Il ne résulte pas, de ce que les cinq premiers termes de la suite indéfinie V_3, V_4, V'_4, V_5, V'_6,... ont des valeurs décroissantes, qu'il en soit de même de tous les termes suivants. Il faut démontrer que, si n représente un nombre impair égal à 3 ou plus grand que 3, on a

$$V_n>V_{n+1},\quad V_{n+1}>V'_{n+1},\quad V'_{n+1}>V_{n+2}.$$

Voici comment M. Compagnon établit ces trois inégalités.

1° Je dis que, n étant un nombre impair égal à 3 ou plus grand que 3, on a

$$\frac{1}{4}\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2>\frac{1}{2}\left(1+\text{séc}^2\,\frac{\pi}{n+1}\right),$$

ou

$$\left(1+\text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > 2+2\,\text{séc}^2\,\frac{\pi}{n+1}.$$

D'abord on peut remplacer cette inégalité par celle-ci :

$$(1)\qquad \text{tang}^2\frac{\pi}{n}+2\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}} > 2+2\,\text{tang}^2\frac{\pi}{n+1};$$

mais

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}=\frac{-1+\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}},$$

donc

$$\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{\pi}{n}}=1+\text{tang}\,\frac{\pi}{n}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n},$$

et l'inégalité (1) devient

$$\text{tang}^2\frac{\pi}{n}+2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{n}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n} > 2\,\text{tang}^2\,\frac{\pi}{n+1},$$

ou

$$1+2\,\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}} > 2\left(\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\right)^2.$$

D'ailleurs

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{n}=\frac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{1-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n}};$$

d'où

$$\frac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}=1-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n},$$

donc l'inégalité précédente revient à

$$(2)\qquad 2-\text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n} > 2\left(\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}\right)^2.$$

Maintenant on sait qu'on a

$$\frac{\text{tang}\,(a+b)}{\text{tang}\,a} > \frac{a+b}{a},$$

en supposant les arcs a et b positifs et $a+b<\frac{\pi}{2}$ (voir *Éléments de Trigonométrie* de MM. Delisle et Gérono, 6e édition, p. 170); donc

$$\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{4}} < \frac{n}{2};\quad \text{d'où}\quad \text{tang}^2\,\frac{\pi}{2n} < \frac{4}{n^2},$$

et de même

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}} < \frac{n}{n+1};$$

par conséquent, si l'on démontre qu'on a

(3) $$2 - \frac{4}{n^2} > \frac{2n^2}{(n+1)^2} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{2}{n^2} > \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

l'égalité (2) aura lieu *a fortiori*.

Or l'inégalité (3) se réduit à celle-ci :

$$n^2(n-1) + n(n^2 - 4) - 2 > 0,$$

qui est évidemment satisfaite, d'après l'hypothèse faite sur n.

Remarque. — L'inégalité $\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > 2 + 2\,\text{séc}^2\,\frac{\pi}{n+1}$ est satisfaite pour $n = 2$.

De plus, si l'on suppose qu'un arc $a = \pi$ ou qu'il soit plus petit que π, et si l'on a $n = 2$ ou $n > 2$ (n n'étant pas nécessairement un nombre entier), on démontrerait, comme ci-dessus, qu'on a encore

$$\left(1 + \text{séc}\,\frac{a}{n}\right)^2 > 2 + 2\,\text{séc}^2\,\frac{a}{n+1}.$$

2° Il s'agit de démontrer que, n étant un nombre pair égal à 4 ou plus grand que 4, on a

$$\frac{1}{2}\left(1 + \text{séc}^2\,\frac{\pi}{n}\right) > \text{séc}\,\frac{\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \left(1 - \text{séc}\,\frac{\pi}{n}\right)^2 > 0,$$

ce qui a évidemment lieu.

Remarque. — Cette inégalité est toujours vraie, si l'on remplace $\frac{\pi}{n}$ par un arc quelconque a.

3° Il faut démontrer que, n étant égal à 4 ou un nombre pair plus grand que 4, on a

(1) $$\text{séc}\,\frac{\pi}{n} > \frac{1}{4}\left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n+1}\right)^2 \quad \text{ou} \quad 4\,\text{séc}\,\frac{\pi}{n} > \left(1 + \text{séc}\,\frac{\pi}{n+1}\right)^2.$$

D'abord on peut remplacer cette inégalité par celle-ci :

$$4\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n}} > 2 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n+1} + 2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n+1}},$$

ou

$$4\left(1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}\right) > 2 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n+1}$$
$$+ 2\left(1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{n+1}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2(n+1)}\right),$$

ou

$$4\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n} > \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n+1} + 2\operatorname{tang}\frac{\pi}{n+1}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2(n+1)},$$

ou

$$(2)\qquad 2\times\frac{2\tan\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{n}}>\left(\frac{\tan\frac{\pi}{n+1}}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)^2+2\,\frac{\tan\frac{\pi}{n+1}}{\tan\frac{\pi}{n}}\,\tan\frac{\frac{\pi}{2(n+1)}}{\tan\frac{\pi}{n}};$$

mais on a vu plus haut que $\dfrac{2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{2n}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}=1-\text{tang}^2\,\dfrac{\pi}{2n}$; d'ailleurs on a aussi les inégalités

$$\text{tang}^2\frac{\pi}{n}<\frac{4}{n^2},\quad \text{tang}\,\frac{\frac{\pi}{n+1}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}<\frac{n}{n+1},\quad \text{tang}\,\frac{\frac{\pi}{2(n+1)}}{\text{tang}\,\frac{\pi}{n}}<\frac{n}{2(n+1)};$$

donc on aura démontré l'inégalité (2) si l'on fait voir qu'on a

$$2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)>\frac{2n^2}{(n+1)^2}\quad\text{ou}\quad 1-\frac{4}{n^2}>\frac{n^2}{(n+1)^2},$$

ou enfin

$$(3)\qquad n^2(n-3)+n(n^2-8)-4>0.$$

Or cette inégalité est évidemment satisfaite, d'après l'hypothèse faite sur n.

Remarque. — Il est facile de vérifier que l'inégalité (1) est satisfaite pour $n=2$ et pour $n=3$.

D'ailleurs l'inégalité (3) l'est aussi pour tout nombre entier égal à 4 ou plus grand que 4.

Note du Rédacteur. — La question 1117 a été résolue par MM. P. Vannetelle, élève au Lycée de Reims; E. Kruschwitz, à Berlin; Moret-Blanc, Lez.

RECTIFICATIONS.

Page 139, ligne 3, lire *semblables*, au lieu de *homothétiques*.

Même page, ligne 4, *lire* NMN', *au lieu de* NMM'.

Même page, ligne 14, *lire* $cx - dy$, *au lieu de* $cy - dy$.

Page 143, ligne 2, en remontant, *au lieu de*

$$\text{B cj}.\text{B}=\text{cj}.\text{AB},$$

lire

$$\text{AX cj}.\text{B}=\text{cj}.\text{A}\times\text{B}.$$

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(fin, voir même tome, p. 220);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

APPENDICE.

EXERCICES DIVERS.

Trouver la courbe dont la tangente en un point quelconque M *a une inclinaison égale aux* $\frac{2}{3}$ *de celle du rayon vecteur* OM.

La condition du problème est immédiatement exprimée par la relation

$$d\mathrm{M} \bumpeq (\mathrm{OM})^{\frac{2}{3}},$$

le signe $\bumpeq$ indiquant seulement le parallélisme; et, pour en déduire une équipollence, il faut donner à l'un des membres un multiplicateur convenable.

En raison de la possibilité de changer la variable d'une manière quelconque, nous pouvons supposer

$$(\mathrm{OM})^{-\frac{2}{3}} d\mathrm{M} \bumpeq 3\,dt,$$

et, intégrant cette équipollence de la même manière qu'une équation, nous aurons

$$\mathrm{OM} \bumpeq (c + t)^3.$$

Si à la constante c nous donnons une valeur réelle, notre équipollence exprimera seulement une série infinie de points en ligne droite. Supposons, au contraire, $c \bumpeq a + b\sqrt{}$. Faisant l'observation ordinaire sur le changement arbitraire de la variable, nous verrons que l'équipollence la plus générale est

$$\mathrm{OM} \bumpeq b^3(t + \sqrt{})^3 \bumpeq (t^3 - 3t)\,\mathrm{OA} + (3t^2 - 1)\,\mathrm{OB},$$

OA et OB étant respectivement équipollents à b^3 et $b^3\sqrt{}$.

Elle représente une courbe du troisième ordre, comprise dans la quatorzième espèce d'Euler.

Si, pour résoudre ce problème, on avait employé les formules connues relatives aux coordonnées parallèles, l'intégration n'eût pas été aussi facile ; et, par les coordonnées polaires, le passage aux coordonnées parallèles aurait été incommode. Du reste, notre équipollence

$$\mathrm{OM} \triangleq (t + \surd)^3$$

nous donne, en posant $t = \cot u$,

$$\mathrm{OM} \triangleq \frac{1}{\sin^3 u}\, \varepsilon^{3u},$$

ce qui nous montre qu'à l'azimut $3u$ correspond le rayon vecteur $\dfrac{1}{\sin^3 u}$.

Pareillement

$$d\mathrm{M} \triangleq 3(t + \surd)^2 dt$$

nous donne

$$\mathrm{OM} \triangleq -\, 3 \int \frac{du}{\sin^4 u}\, \varepsilon^{2u},$$

et, par suite, changeant $2u$ en φ, le rayon de courbure sera proportionnel à $\left(\sin \dfrac{\varphi}{2}\right)^{-4}$, φ étant l'inclinaison de la tangente.

(Saggio, *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, 1835, § 21.)

Trouver le centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique supposé homogène.

En raison de la relation intime qui existe entre la composition des droites et celle des forces, on reconnaît facilement qu'en appelant ds la différentielle de la masse correspondant au point M, le centre de gravité G d'une ligne est donné par

$$\mathrm{OG} \triangleq \frac{1}{s} \int \mathrm{OM}\, ds,$$

s étant la masse de la ligne entre les deux extrémités que comprend l'intégrale.

Soient AMB l'arc donné de spirale logarithmique et O le pôle. Posons

$$\mathrm{OA} \bumpeq 1, \quad \mathrm{OB} \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}, \quad \mathrm{OM}\, r^t \bumpeq \varepsilon^{\alpha t},$$

d'où

$$d\mathrm{M} \bumpeq r^t \varepsilon^{\alpha t} (\log r + \alpha\sqrt{}\,)\, dt;$$

la valeur absolue de cette différentielle est

$$ds = r^t \sqrt{\log^2 r + \alpha^2}\, dt,$$

et, les calculs effectués, on trouve

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{r\mathrm{OB} - \mathrm{OA}}{(r-1)\left(2 + \dfrac{\alpha}{\log r}\sqrt{}\right)}.$$

Pour construire cette équipollence, on prendra, sur une droite choisie arbitrairement, les deux longueurs

$$\mathrm{PQ} = 2, \quad \mathrm{PR} = \frac{1}{r-1};$$

par Q on élèvera sur PQ la perpendiculaire

$$\mathrm{QS} = \frac{\alpha}{\log r},$$

α étant l'angle AOB rapporté au rayon pris pour unité, et $\log r$ le logarithme hyperbolique du rapport OB : OA.

Dans la spirale donnée, on prolongera OB jusqu'en C, de manière que $\mathrm{OC} \bumpeq r\,\mathrm{OB}$; on formera le triangle ACD, directement semblable à PSR, et l'on aura

$$\mathrm{OG} \bumpeq \mathrm{AD}.$$

(*Ibid.*, § 23.)

Trouver les formules fondamentales du mouvement d'un point M *soumis à une force accélératrice f de direction* OM.

Posons

$$\mathrm{OM} \bumpeq z\,\varepsilon^{u},$$

relation où l'angle u et le rayon vecteur z sont fonctions du temps.

Les différentielles étant prises dans l'hypothèse $\mathfrak{D}t = 1$, $\mathfrak{D}$M représente la vitesse du mobile, et $\mathfrak{D}^2$M la force accélératrice. Donc

$$\mathfrak{D}^2 M \bumpeq \varepsilon^u(\mathfrak{D}^2 z - z\mathfrak{D}u^2 + 2\surd\,\mathfrak{D}u\mathfrak{D}z + \surd z\mathfrak{D}^2 u) \bumpeq f\varepsilon^u.$$

Par suite,

$$\mathfrak{D}^2 z - z\mathfrak{D}u^2 = f,$$

et

$$2\mathfrak{D}u\mathfrak{D}z + z\mathfrak{D}^2 u = 0.$$

(*Ibid.*, § 26).

Trouver les formules du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant.

$\mathfrak{D}^2$M doit être la somme géométrique de la gravité g de direction constante et de la résistance r, dirigée suivant la tangente à la trajectoire. Prenant l'équipollence

$$OM \bumpeq \int \varepsilon^\varphi ds,$$

où φ est l'inclinaison de la tangente, $\frac{ds}{dt}$ la vitesse et $\frac{ds}{d\varphi}$ le rayon de courbure, nous avons

$$\mathfrak{D}^2 M \bumpeq \varepsilon^\varphi \mathfrak{D}^2 s + \surd\,\varepsilon^\varphi \mathfrak{D}s\mathfrak{D}\varphi \bumpeq g - r\varepsilon^\varphi,$$

équipollence qui, divisée par ε^φ, se décompose dans les deux équations

$$\mathfrak{D}^2 s = g\cos\varphi - r, \quad \mathfrak{D}s\mathfrak{D}\varphi = -g\sin\varphi.$$

(*Ibid.*, § 27.)

Trouver la chaînette homogène.

Prenons l'équipollence

$$OM \bumpeq \int \varepsilon^\varphi ds,$$

et soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'horizon.

La tension tangentielle au point M peut se représenter par

$f\varepsilon^{\varphi}$, et la force sollicitant l'élément d'arc MM′ par $g\,ds\sqrt{}$. La première devant être l'intégrale de la seconde, on aura

$$f\varepsilon^{\varphi} \triangleq gs\sqrt{} + a,$$

a étant la tension horizontale.

Cette équipollence donne

$$o = gs\cos\varphi - a\sin\varphi,$$

d'où

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{g\cos^2\varphi},$$

et la chaînette a pour équipollence

$$\mathrm{OM} \triangleq \frac{a}{g}\int\frac{\varepsilon^{\varphi}\,d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

On reconnaît que le rayon de courbure est proportionnel à $\frac{1}{\cos^2\varphi}$, et l'on déduirait aussi de là les autres propriétés de la courbe.

(*Ibid.*, § 28.)

Des points fictifs.

Nous avons déjà vu la manière de représenter les courbes au moyen d'une équipollence contenant une variable susceptible de recevoir toutes les valeurs réelles possibles, ou deux variables dont les valeurs doivent satisfaire à une relation donnée. Supposons maintenant que la variable reçoive une valeur imaginaire : les principes établis pour la représentation géométrique des quantités imaginaires, nous permettront aussi dans ce cas de construire le point exprimé par l'équipollence point qui aurait appartenu à la courbe, si la valeur de la variable avait été réelle au lieu d'être imaginaire; à un point construit de cette manière nous donnerons le nom de *point fictif* de la courbe.

On remarquera qu'en posant la variable $t \triangleq u + v\sqrt{}$, et en attribuant aux deux variables u, v toutes les valeurs réelles possibles, on obtient, par cette double indétermination de t, une équipollence qui donne, non plus une seule série de points, mais une infinité de séries. Donc un point quelconque du plan peut, généralement parlant, être considéré comme un point *fictif* de la courbe. Mais, si à la variable t on attribue successivement les deux valeurs $u + v\surd$, $u - v\surd$, qui diffèrent seulement par le signe de la portion purement imaginaire $v\surd$, nous aurons deux points différents que nous appellerons *points fictifs conjugués;* et la connaissance simultanée de ceux-ci fera connaître les portions, l'une purement réelle, l'autre purement imaginaire, de la valeur de la variable, qu'on ne pourrait jamais obtenir avec un seul point fictif.

Je crois que de l'étude des points fictifs des courbes peuvent résulter quelques applications utiles, exactement comme, en Algèbre, l'emploi des quantités imaginaires offre beaucoup d'avantages; et, entre les deux cas, il y a cette différence, qu'en Algèbre on ne peut attribuer aucune idée précise aux quantités imaginaires, tandis que les points fictifs des courbes sont pleinement déterminés comme paires de points réels. Je me limiterai à quelques brèves remarques sur ce sujet, qui n'a encore été considéré par personne à ma connaissance, et auquel je n'ai pu moi-même m'appliquer que fort peu.

Lorsque deux courbes sont rapportées au même système de coordonnées parallèles (représentées par les lettres x, y), et que les deux courbes sont conséquemment exprimées par deux équations entre x, y, on sait que les intersections réelles des deux courbes donnent les valeurs réelles de x et de y qui satisfont en même temps à l'une et l'autre des deux équations. Pareillement, les intersections fictives conjuguées des courbes nous donneront les valeurs imaginaires de x et de y ou les racines imaginaires des deux précédentes équations. Les intersections fictives conjuguées sont deux points fictifs conjugués, aussi bien de l'une que de l'autre courbe. Soit

$$\mathrm{OM} \triangleq x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB}$$

l'équipollence qui représente les deux courbes lorsqu'on suppose les variables x, y soumises à l'une ou à l'autre des deux équations. Nous avons les points fictifs conjugués M′, M″ correspondant, le premier à

$$x = a + b\surd, \quad y = c + d\surd,$$

et le second à

$$x = a - b\surd, \quad y = c - d\surd.$$

Nous aurons, par suite,

$$\mathrm{OM}' \bumpeq (a + b\surd)\,\mathrm{OA} + (c + a\surd)\,\mathrm{OB},$$
$$\mathrm{OM}'' \bumpeq (a - b\surd)\,\mathrm{OA} + (c - d\surd)\,\mathrm{OB},$$

et si, L est le point milieu de la droite M′M″ (*), il en résulte

$$\mathrm{OL} \bumpeq \frac{\mathrm{OM}' + \mathrm{OM}''}{2} \bumpeq a\mathrm{OA} + c\mathrm{OB},$$
$$\frac{\mathrm{LM}'}{\surd} \bumpeq \frac{\mathrm{OM}' - \mathrm{OM}''}{2} \bumpeq b\mathrm{OA} + d\mathrm{OB}.$$

Donc, menant OI égale et perpendiculaire à LM′, il suffira de rapporter, comme d'usage, les points L, I aux axes coordonnés OA, OB, pour avoir, par les coordonnées a, c du premier, les parties réelles des valeurs cherchées de x et de y, et, par les coordonnées b, d du second, les parties imaginaires des mêmes valeurs.

Les points fictifs conjugués d'une droite quelconque DL sont en dehors de cette droite et à égale distance de part et d'autre, de telle sorte que la droite M′M″ qui les unit est coupée perpendiculairement en son milieu par la droite DL. En effet, un point quelconque de la droite DL est exprimé par $\mathrm{DM} \bumpeq t.\mathrm{DL}$, et si à la variable t on attribue les deux valeurs imaginaires $a + b\surd$, $a - b\surd$, on obtient les deux points fictifs conjugués M′, M″, et l'on a

$$\mathrm{M}''\mathrm{M}' \bumpeq 2b\surd\mathrm{DL},$$

c'est-à-dire que M″M′ est perpendiculaire à DL.

Une droite et une conique ont toujours, d'après ce qui pré-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

cède, deux points communs, soit réels, soit fictifs conjugués; dans ce dernier cas, on dit que la droite est une sécante idéale de la conique. Quand on connaît le diamètre conjugué à la direction de la sécante, il est toujours facile de déterminer l'ordonnée imaginaire qui appartient à cette sécante idéale; et cette ordonnée, prise perpendiculairement à la sécante, donne les deux intersections fictives de la conique et de la sécante idéale.

Dans un autre Mémoire, j'ai démontré qu'en prenant une de ces intersections fictives pour centre d'homologie et en établissant l'homologie de manière que la sécante idéale ait son homologique à distance infinie, on trouve que la courbe homologique de la conique est une circonférence.

Les points fictifs ont des propriétés communes avec les points réels; mais leur considération m'entraînerait trop en dehors de mon sujet.

(*Metodo delle equipollenze*, *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, 1837, art. 37).

Étant donnée la relation (1) $\mathrm{F}(\mathrm{MX}, \mathrm{NX}) = 0$, *entre les distances du point* X (*) *aux courbes* M, N, *lesquelles distances sont prises sur les normales* MX, NX *à ces courbes, on propose de déterminer la tangente en* X *à la courbe* X.

Pour réduire l'équation (1) à une équipollence, nous y substituerons $\sqrt{(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj.MX})}$, $\sqrt{(\mathrm{NX}\,\mathrm{cj.NX})}$ à la place de MX, NX. Puis, la différentiant, nous aurons une équipollence de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(\mathrm{MX}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{MX} + \mathrm{cj.MX}\,\textcircled{d}\mathrm{MX}) \\ &\quad + \Psi(\mathrm{NX}\,\mathrm{cj}.\textcircled{d}\mathrm{NX} + \mathrm{cj.NX}\,\textcircled{d}\mathrm{NX}) \bumpeq 0. \end{aligned}\right.$$

Or, MX étant perpendiculaire à la tangente à la courbe M, on a

$$\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq p\surd\,\mathrm{MX}$$

et

$$\mathrm{cj.MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq p\surd\,\mathrm{MX}\,\mathrm{cj.MX},$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$\mathrm{MX\,cj.}\textcircled{d}\mathrm{OM} \bumpeq -p\surd\,\mathrm{cj.\,MX.MX} \bumpeq -\,\mathrm{cj.\,MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OM},$$

et, substituant dans le premier terme de (2), il se réduira à

$$\Phi\,(\mathrm{MX\,cj.}\textcircled{d}\mathrm{OX} + \mathrm{cj.\,MX}\,\textcircled{d}\mathrm{OX}).$$

On fait subir une semblable réduction au second terme de (2), et l'on obtient

$$\frac{\textcircled{d}\mathrm{OX}}{\mathrm{cj.}\,\textcircled{d}\mathrm{OX}} \bumpeq -\frac{\Phi\,\mathrm{MX} + \Psi\,\mathrm{NX}}{\Phi\,\mathrm{cj.MX} + \Psi\,\mathrm{cj.NX}},$$

équipollence qui, en observant que Φ, Ψ sont équipollentes à leurs conjuguées, nous montre que

$$(3) \qquad \textcircled{d}\mathrm{OX} \bumpeq r\surd(\Phi\,\mathrm{MX} + \Psi\,\mathrm{NX}).$$

Donc la direction de la tangente cherchée au point X dépend d'une manière donnée de MX, NX.

Si, par exemple, la relation (1) est

$$a\,\mathrm{MX} + b\,\mathrm{NX} = c,$$

nous trouverons

$$\Phi \bumpeq a\,(\mathrm{MX\,cj.MX})^{-\frac{1}{2}},$$

et une valeur analogue pour Ψ; puis la relation (3) nous montre que la tangente en X à la courbe X est parallèle à la somme géométrique

$$a\,\mathrm{MX}\,(\mathrm{MX\,cj.MX})^{-\frac{1}{2}} + b\,\mathrm{NX}\,(\mathrm{NX\,cj.NX})^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire à la somme de deux droites proportionnelles aux nombres a, b, et ayant les directions MX, NX.

Quand les points M, N sont fixes, le précédent théorème est celui déjà donné par Poinsot, en remplacement d'une règle inexacte de Roberval.

(*Ibid.*, art. 18, § 150.)

FOYERS ET DIRECTRICES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. CROSNIER,

Professeur au lycée d'Auch.

Un foyer d'une surface du second ordre est le centre d'une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface : la directrice est la droite qui joint les points de contact.

Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ & + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation de la surface. Je suppose que les axes coordonnés sont rectangulaires, mais quelconques; il n'y aurait pas plus de difficulté à considérer des axes obliques.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point, l'équation d'une sphère, de rayon nul, ayant ce point pour centre, est

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0,$$

et, pour que cette sphère soit doublement tangente à la surface (1), il faut que l'on puisse déterminer K de telle sorte que l'équation

$$(2)\qquad f(x, y, z) - KS = 0$$

représente un système de deux plans.

Or, pour qu'une équation du second ordre représente un système de deux plans, il faut : 1° que le déterminant des équations du centre soit nul; 2° que les plans du centre aient un point commun; 3° que ce point se trouve sur la surface elle-même.

Les équations du centre de la surface (2) sont

$$\begin{aligned}
&(A - K)x + B''y + B'z + C + K\alpha = 0,\\
&B''x + (A' - K)y + Bz + C' + K\beta = 0,\\
&B'x + By + (A'' - K)z + C'' + K\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Annulons le déterminant de ces équations, nous avons

$$(3)\quad \begin{vmatrix} A - K & B'' & B' \\ B'' & A' - K & B \\ B' & B & A'' - K \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation nous montre que K n'est autre chose que l'une des racines de l'équation en S; alors les plans du centre sont parallèles à une même droite, qui n'est autre chose que l'une des directions de cordes principales.

Passons à la seconde condition : elle sera satisfaite si nous exprimons que les plans du centre rencontrent un plan quelconque en un même point; nous prendrons l'un des plans coordonnés, par exemple $z = 0$, et nous trouverons la condition

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A - K & B'' & C + K\alpha \\ B'' & A' - K & C' + K\beta \\ B' & B & C'' + K\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

La valeur K étant connue, cette équation est du premier degré en α, β, γ, et, par suite, le foyer se trouve dans un plan.

Les équations (3) et (4) expriment que la surface (2) a une infinité de centres en ligne droite et, par suite, qu'elle est du genre cylindre. Au lieu d'une sphère de rayon nul, on pourrait, sans changer les équations (3) et (4), prendre une sphère quelconque; d'où il résulte que le lieu des centres des sphères, qui coupent une surface du second ordre de telle sorte que l'on puisse faire passer un cylindre du deuxième degré par l'intersection, se compose de trois plans.

Ces plans ne dépendent pas des axes coordonnés ; si donc on prend les axes de la surface pour axes coordonnés, l'équation (4) se simplifiera ; si, de plus, on prend $K = A''$, l'équation se réduira à $y = 0$; par conséquent, les trois plans principaux que nous venons de trouver ne sont autre chose que les plans principaux de la surface.

Si l'on avait pris $K = A$ ou A', l'équation (4) aurait été identique, et il aurait fallu prendre l'une des deux autres équations analogues obtenues en exprimant que les plans du centre de la surface (2) se coupent sur l'un des autres plans coordonnés.

Si l'une des racines de l'équation en S était nulle, le plan correspondant serait rejeté à l'i fini.

Avant d'aller plus loin, nous remarquons que, l'équation (4) étant celle d'un plan principal lorsqu'on prend pour K l'une des racines de l'équation (3), si l'on élimine K entre elles, on aura l'ensemble des plans principaux.

Tout ce qui précède peut facilement s'appliquer dans le cas des axes obliques.

Arrivons à la troisième condition, c'est-à-dire à la condition nécessaire pour que la surface (2) passe par le point commun aux plans du centre.

L'équation (2), en tenant compte des équations du centre, se réduit à

$$(C+K\alpha)x+(C'+K\beta)y+(C''+K\gamma)z+F-K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0;$$

pour $z = 0$ les équations du centre se réduisent à deux, et nous devons satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}(A-K)x+B''y+C+K\alpha&=0,\\ B''x+(A'-K)y+C'+K\beta&=0,\\ (C+K\alpha)x+(C'+K\beta)y+F-K(\alpha^2+\beta'^2+\gamma'^2)&=0;\end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$(5)\quad \begin{vmatrix} A - K & B'' & C + K\alpha \\ B'' & A' - K & C' + K\beta \\ C + K\alpha & C' + K\beta & F - K(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré; elle ne contient que γ^2; par suite, elle représente une surface du second ordre ayant son centre dans le plan des xy; elle coupe le plan (4) suivant une conique, et le lieu des foyers se compose de trois coniques respectivement situées dans les plans principaux de la surface proposée.

On pourrait remplacer les équations (4) et (5) par une infinité d'autres équivalentes : si l'on prend pour K, α, β, γ des valeurs satisfaisant aux équations (3), (4) et (5), deux des équations du centre de la surface (2) représenteront la directrice correspondant au foyer considéré; la surface (2) représentera elle-même les deux plans qui passent par l'intersection de la surface (1) et de la sphère. Pour que ces plans soient réels, il faut que leur trace sur l'un des plans coordonnés soit du genre hyperbole; il est facile de voir que cela exige que K soit la racine moyenne de l'équation en S; il est évident que ces plans ne peuvent couper la surface.

On traiterait absolument de la même manière le cas où l'on demanderait le lieu des centres des sphères de rayon donné, doublement tangentes à la surface. Les équations (3) et (4) ne changeraient pas; mais, dans l'équation (5), on aurait à remplacer γ^2 par $\gamma^2 - r^2$: le lieu se composerait donc encore d'un système de trois coniques.

Le lieu des directrices s'obtient en éliminant α, β, γ entre les équations du centre et l'équation (2); on trouve

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 - Kf(x, y, z) = 0,$$

qui représente un cylindre.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉOREME DE TAYLOR;

PAR M. LE D^r JULES KOENIG,
à l'Université de Pesth.

Dans les *Mathematische Annalen* de MM. Clebsch et Neumann, j'ai traité d'une manière générale les séries ordonnées suivant des fonctions quelconques d'une variable. La méthode employée là donne de même une démonstration nouvelle du théorème de Taylor pour des variables complexes, qui ne suppose connues que les notions les plus élémentaires de la théorie des séries. On sait bien que la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

a une valeur déterminée et finie pour toutes les valeurs finies de la variable. Employons encore le théorème connu, qu'une série convergente reste telle, si les termes de la série sont multipliés par une série de quantités, dont chacune conserve une valeur finie. Supposons telles les quantités

$$\varphi_0(h),\ \varphi_1(h),\ \varphi_2(h), \ldots.$$

La série

$$\varphi_0(h) + \varphi_1(h)\frac{z}{1!} + \varphi_2(h)\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

sera donc convergente aussi longtemps que les quantités h satisferont à la condition mentionnée. On a ainsi une série, qui sera, entre certaines limites, une fonction finie et continue des deux variables z et h. Quelles sont, à présent, les conditions nécessaires pour que cette fonction de deux variables en apparence ne dépende en réalité que d'une variable $z + h$? Cette question sera exprimée par l'équation suivante :

$$\Phi(z+p,\ h)=\Phi(z,\ h+p),$$

où p représente une quantité quelconque.

En conséquence de cette équation, on aura immédiatement, en posant

$$z=0$$

et écrivant ensuite z pour p,

$$\Phi(z,\ h)=\Phi(0,z+h),$$

ce qui n'est autre chose que la proposition énoncée ci-dessus.

En écrivant à présent pour le symbole Φ la série qu'il représente, on aura

$$\varphi_0(h)+\varphi_1(h)(z+p)+\varphi_2(h)\frac{(z+p)^2}{2!}+\ldots$$
$$=\varphi_0(h+p)+\varphi_1(h+p)z+\varphi_2(h+p)\frac{z^2}{2!}+\ldots.$$

La valeur de la première de ces séries ne changera pas si l'on ordonne suivant les puissances de la variable z, et, une fonction ne pouvant être développée de deux manières différentes suivant les puissances de la variable, les coefficients des mêmes puissances de z doivent être égaux.

On aura ainsi la suite des équations

$$\varphi_0(h+p)=\varphi_0(h)+\varphi_1(h)\frac{p}{1}+\varphi_2(h)\frac{p^2}{2!}+\ldots,$$
$$\varphi_1(h+p)=\varphi_1(h)+\varphi_2(h)\frac{p}{1}+\varphi_3(h)\frac{p^2}{2!}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

auxquelles on joindra encore la suivante, obtenue en égalant z à zéro,

$$\varphi_0(h)=\Phi(0,h)=\Phi(h).$$

p étant une quantité quelconque, on pourra la prendre infiniment petite, et l'on aura

$$\varphi_1(h) = \frac{\Phi(h+p) - \Phi(h)}{p},$$

$$\varphi_2(h) = \frac{\varphi_1(h+p) - \varphi_1(h)}{p},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui donne la définition des coefficients de la série de Taylor comme dérivées successives de la fonction.

Nous avons donc obtenu le développement suivant :

$$\Phi(z+h) = \Phi(h) + \Phi'(h)\frac{z}{1!} + \Phi''(h)\frac{z^2}{2!} + \dots,$$

ou, en mettant $z - h$ pour z,

$$\Phi(z) = \Phi(h) + \Phi'(h)\frac{z-h}{1} + \Phi''(h)\frac{(z-h)^2}{2!} + \dots,$$

formule de Taylor, que nous voulions démontrer.

On sait bien que chaque série ordonnée d'après les puissances de $z - h$ sera convergente dans un cercle décrit avec un certain rayon, autour du centre $z = h$. Pour déterminer ce rayon, nous remarquons que, au lieu de faire croître z, on pourra, après les développements précédents, faire varier h; mais alors on sait que la série reste convergente aussi longtemps que tous les φ, ou ce qui est la même chose, toutes les dérivées de Φ possèdent une valeur finie, c'est-à-dire si la fonction Φ est synectique.

On a donc ainsi ce théorème, que la série de Taylor n'est convergente que dans le cercle le plus grand qui puisse être décrit autour de $z = h$, dans l'intérieur duquel la fonction à développer reste synectique.

La méthode donnée dans cette Note est remarquable par sa simplicité, en n'ayant besoin ni d'un examen du reste de la série, ni des moyens du Calcul intégral ou de celui des résidus.

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA THÉORIE DES ENVELOPPES

PAR M. H. LAURENT.

Supposons que p_1, p_2, p_3,... désignent les distances normales d'un plan P à des surfaces fixes S_1, S_2, S_3,... et que l'on ait, entre les quantités p_1, p_2,... la relation

$$(1) \qquad f(p_1, p_2, p_3, \ldots) = 0;$$

en vertu de cette relation, le plan P enveloppera généralement une surface. Proposons-nous de trouver le point M où le plan P touche son enveloppe.

Soit

$$(2) \quad P = ax + by + cz - \delta = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

l'équation du plan P. Soient, en général, x_i, y_i, z_i les coordonnées du point où la normale commune au plan P et à la surface S_i rencontre le plan P, et ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées du point où la même droite rencontre la surface S_i, on aura

$$(3) \qquad p_i = a\xi_i + b\eta_i + c\zeta_i - \delta;$$

ξ_i, η_i, ζ_i doivent être considérés comme fonctions de a, b, c, δ, ainsi que p_i, et, par suite, la fonction $f(p_1, p_2, \ldots)$ pourra être considérée comme fonction des variables a, b, c, δ.

Pour trouver l'enveloppe du plan P, nous observerons que ce plan ne dépend en définitive que de deux variables s et t par exemple, dont a, b, c, δ sont fonctions. Nous pourrions supposer que a et b sont variables indépendantes; mais, pour la symétrie des calculs, nous aimons mieux laisser les variables indépendantes indéterminées ; il est clair alors que les formules

$$\mathrm{P} = 0, \quad \frac{d\mathrm{P}}{ds} = 0, \quad \frac{d\mathrm{P}}{dt} = 0$$

feront connaître le point où le plan P touche son enveloppe. Toute la question se réduit alors à former ces deux dernières équations. Les formules (2) et (3) donnent, en les différentiant,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{P}}{ds} = x\dfrac{da}{ds} + y\dfrac{db}{ds} + z\dfrac{dc}{ds} - \dfrac{d\delta}{ds} = 0, \\ a\dfrac{da}{ds} + b\dfrac{db}{ds} + c\dfrac{dc}{ds} = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{ds} = a\dfrac{d\xi_i}{ds} + \xi_i\dfrac{da}{ds} + b\dfrac{d\eta_i}{ds} + \eta_i\dfrac{db}{ds} \\ \qquad + c\dfrac{d\zeta_i}{ds} + \zeta_i\dfrac{dc}{ds} - \dfrac{d\delta}{ds}. \end{cases}$$

Or la direction a, b, c est normale à la direction $\frac{d\xi_i}{ds}$, $\frac{d\eta_i}{ds}$, $\frac{d\zeta_i}{ds}$, qui est celle d'une tangente à la surface S_i ; donc l'équation (5) se simplifiera et donnera

$$(6)\qquad \frac{dp_i}{ds} = \xi_i\frac{da}{ds} + \eta_i\frac{db}{ds} + \zeta_i\frac{dc}{ds} - \frac{d\delta}{ds}.$$

Enfin l'équation (1), différentiée à son tour, deviendra

$$\frac{df}{dp_1}\frac{dp_1}{ds} + \frac{df}{dp_2}\frac{dp_2}{ds} + \ldots = 0,$$

ou, en vertu de (6),

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{ds}\left(\xi_1\dfrac{df}{dp_1} + \xi_2\dfrac{df}{dp_2}\ldots\right) \\ \quad + \dfrac{db}{ds}\left(\eta_1\dfrac{df}{dp_1} + \ldots\right) \\ \quad + \dfrac{dc}{ds}\left(\zeta_1\dfrac{df}{dp_1} + \ldots\right) = \dfrac{d\delta}{ds}\left(\dfrac{df}{dp_1} + \dfrac{df}{dp_2}\ldots\right). \end{cases}$$

On aurait des formules analogues en différentiant par rapport à t, et $\frac{dP}{ds}$ sera connu dès que l'on se sera donné les relations qui expriment a, b, c, δ en fonction de s.

Cela posé, prenons le plan P pour plan des xy, nous aurons

$$x_i = \xi_i, \quad y_i = \eta_i, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad z_i = 0,$$

et, par suite, les formules (4) et (7) donneront

$$x\frac{da}{ds} + y\frac{db}{ds} - \frac{d\delta}{ds} = 0, \quad \frac{dc}{ds} = 0,$$

$$\left(x_1\frac{df}{dp_1} + x_2\frac{df}{dp_2}\cdots\right)\frac{da}{ds} + \left(y_1\frac{df}{dp_1} + y_2\frac{df}{dp_2}\cdots\right)\frac{db}{ds} - \left(\frac{df}{dp_1} + \frac{df}{dp_2}\cdots\right)\frac{d\delta}{ds} = 0.$$

Supposons maintenant que les variables a et b aient été choisies comme variables indépendantes ; ces équations donneront tour à tour

$$x - \frac{d\delta}{da} = 0, \quad y - \frac{d\delta}{db} = 0,$$

$$\sum x_i\frac{df}{dp_i} - x\sum\frac{df}{dp_i} = 0, \quad \sum y_i\frac{df}{dp_i} - y\sum\frac{df}{dp_i} = 0.$$

Les dernières équations expriment que le point (x, y), qui est le point de contact du point P avec son enveloppe, est le centre de gravité des masses $\frac{df}{dp_1}, \frac{df}{dp_2}, \frac{df}{dp_3}, \ldots$ appliquées en (x_1, y_1), en (x_2, y_2), ... respectivement; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si $p_1, p_2, \ldots$ désignent les distances normales d'un plan mobile* P *à des surfaces fixes* $S_1, S_2, \ldots$ *et si ces distances sont liées entre elles par une relation telle que*

$$f(p_1, p_2, \ldots) = 0,$$

le plan P *enveloppe une certaine surface, qu'il touche* *en un point qui est le centre de gravité des masses* $\frac{df}{dp_1}$, $\frac{df}{dp_2}, \ldots$ *appliquées aux points où les droites* p_1, $p_2, \ldots$ *rencontrent le plan mobile.*

Corollaire I. — Les surfaces S_1, $S_2, \ldots$ peuvent se réduire à des courbes ou à des points, et le théorème est encore vrai.

Corollaire II. — Les surfaces S_1, $S_2, \ldots$ peuvent se réduire à des cylindres à génératrices parallèles et, dans ce cas, on obtient un théorème de Géométrie plane, que l'on peut énoncer ainsi :

Si p_1, $p_2, \ldots$ *désignent les distances normales d'une droite mobile à des courbes fixes* S_1, $S_2, \ldots$, *et s'il existe une relation*

$$f(p_1, p_2, \ldots) = 0,$$

la droite mobile enveloppe une courbe, qui la touche au centre de gravité des masses $\frac{df}{dp_1}$, $\frac{df}{dp_2}, \ldots$ *appliquées aux points où les droites* p_1, $p_2, \ldots$ *rencontrent la droite mobile.*

Corollaire III. — Si l'équation

$$f(p_1, p_2, \ldots) = 0$$

était une identité, ou, pour parler plus exactement, avait lieu pour tous les plans de l'espace, des forces $\frac{df}{dp_1}$, $\frac{df}{dp_2}, \ldots$ parallèles, appliquées suivant les droites p_1, $p_2, \ldots$, se feraient équilibre; elles se réduiraient à un couple, dans le cas où il n'y aurait pas d'enveloppe.

Pour montrer l'importance des théorèmes précédents, je vais en présenter quelques applications :

Problème I. — Quelle est la courbe telle que le produit des distances de deux points fixes P_1 P_2 à ses tangentes soit constant?

En appelant p_1, p_2 les distances en question, on a

$$p_1 p_2 = \text{const.} = k^2.$$

Soient Q_1, Q_2 les pieds des perpendiculaires abaissées de P_1, P_2 sur la tangente $Q_1 Q_2$; le point M, où cette droite touche son enveloppe, est le centre de gravité de deux masses p_2 et p_1, respectivement appliquées en Q_1 et Q_2; donc

$$\frac{MQ_1}{p_1} = \frac{MQ_2}{p_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{MQ_1}{P_1Q_1} = \frac{MQ_2}{P_2Q_2}.$$

Ces rapports sont les cotangentes des angles P_1MQ_1 et P_2MQ_2, qui sont, par suite, égaux ou supplémentaires. Prolongeons P_1M jusqu'au point R, où elle rencontre P_2Q_2, on a évidemment

$$\overline{P_1R}^2 = (P_1M + MP_2)^2 = \overline{P_1P_2}^2 + 4p_2^2 - 4p_2 \cos P_1P_2R,$$

$$(P_1M + MP_2)^2 = \overline{P_1P_2}^2 + 4p_1^2 + 4p_1 \cos P_1P_2R,$$

et, par suite, en ajoutant ces formules respectivement multipliées par p_1 et p_2,

$$(P_1M + MP_2)^2 (p_1 + p_2) = \overline{P_1P_2}^2 (p_1 + p_2) + 4k^2 (p_1 + p_2),$$

d'où l'on tire

$$P_1M + MP_2 = \text{const.},$$

et le point M décrit une ellipse. Il est clair que, si l'on avait raisonné sur une figure dans laquelle les angles Q_1MP_1 et Q_2MP_2 auraient été supplémentaires, on aurait trouvé une hyperbole.

Problème II. — Quelle est la courbe dont la tangente est à des distances p_1 et p_2 de deux points fixes P_1 et P_2, telles qu'on ait

$$ap_1 + bp_2 = \text{const.}$$

Il est facile de voir que la normale à la courbe rencontre la droite $P_1 P_2$ en un point fixe, qui est le centre de gravité de deux masses a et b placées en P_1 et P_2, d'où l'on peut conclure que la courbe cherchée est un cercle.

Nous ne ferons pas d'autres applications de notre théorème; nous ferons simplement observer en terminant que les coordonnées tangentielles homogènes fourniront souvent l'occasion d'en faire usage. Nous ferons encore observer que le théorème en question est en quelque sorte un corrélatif de ce beau théorème de Poinsot :

Quand p_1, p_2,... *désignent les distances d'un point mobile à des surfaces fixes, la normale à la surface représentée par l'équation*

$$f(p_1, p_2, \ldots) = 0$$

est la résultante des longueurs $\dfrac{df}{dp_1}$, $\dfrac{df}{dp_2}$, ... *appliquées suivant les rayons* p_1, p_2,....

L'importance de ce théorème est telle, qu'à lui seul il embrasse toute la théorie des tangentes des plans tangents et en quelque sorte toute la Statique. On sait, en effet, que Poinsot en a déduit le principe des vitesses virtuelles.

NOTE SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE BEZOUT;

Par M. L. PAINVIN.

Le principe de la méthode d'élimination de Bezout (*) conduit, dans le cas de deux équations, à une règle simple qu'on peut énoncer ainsi :

« Soient d'abord deux équations du même degré

$$(1)\qquad A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2)\qquad B = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0;$$

(*) *Théorie générale des équations algébriques,* par Bezout, p. 300. La méthode indiquée par Bezout à l'endroit cité est identique avec la méthode d'Euler; mais il est facile de voir que la règle énoncée peut se ramener à la règle qu'on donne habituellement.

on forme les combinaisons suivantes des deux équations données :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} b_0 A - a_0 B = 0, \\ (b_0 x + b_1) A - (a_0 x + a_1) B = 0, \\ (b_0 x^2 + b_1 x + b_2) A - (a_0 x^2 + a_1 x + a_2) B = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}) A \\ \quad - (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) B = 0; \end{array}\right.$$

on a ainsi m équations du $(m-1)^{ième}$ degré ; le *résultant* des équations (1) et (2) s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant du système formé par ces m équations.

» Si les équations proposées sont de degrés différents, soit, par exemple,

$$(1') \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2') \qquad b_n x^{m-n} + b_{n+1} x^{m-n-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0,$$

on complétera la seconde équation par l'adjonction des termes

$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n+1},$$

en supposant

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0,$$

et l'on appliquera la règle précédente. Seulement il faudra supprimer, dans le résultat obtenu, le facteur étranger a_0^n qui se présente à cause de l'introduction de n racines infinies par la modification apportée à l'équation (2'). »

2. Cette règle donne l'équation finale sous la forme d'un déterminant ; on a fait peu de remarques sur la loi de formation de ses différents termes, et ces remarques, déduites d'ailleurs par analogie, ne conduisent pas à l'expression explicite d'un élément quelconque de ce déterminant.

Habituellement on établit deux règles différentes, suivant que les équations proposées sont ou ne sont pas du même degré; l'énoncé que j'ai donné ramène la méthode d'élimination à une règle unique.

Je me propose de faire connaître l'expression explicite d'un quelconque des éléments du déterminant-résultant; on aura alors une formule générale qui permettra d'écrire le résultant sans avoir à refaire, pour chaque cas, les calculs indiqués dans les combinaisons (3).

3. La règle énoncée en commençant conduit à m équations du degré $(m-1)$; les éléments du déterminant-résultant seront les coefficients des diverses puissances de x dans ces équations ordonnées.

Les éléments de la ligne de rang p seront les coefficients de la $p^{ième}$ des équations (3), savoir :

$$\begin{aligned}&(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\mathrm{A}\\ -&(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\mathrm{B}=0.\end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned}&(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})[(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})x^{m-p+1}\\ &\qquad\qquad+a_px^{m-p}+\ldots+a_m]\\ -&(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})[(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})x^{m-p+1}\\ &\qquad\qquad+b_px^{m-p}+\ldots+b_m]\end{aligned}\right\}=0;$$

elle se réduit visiblement à

$$(4)\ \left\{\begin{aligned}&(a_px^{m-p}+a_{p+1}x^{m-p-1}+\ldots+a_m)(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\\ -&(b_px^{m-p}+b_{p+1}x^{m-p-1}+\ldots+b_m)(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})\end{aligned}\right\}=0.$$

Le terme de rang q, dans la ligne de rang p, sera le coefficient de x^{m-q} dans l'équation (4). Pour obtenir ce terme, considérons, dans l'équation (4), le premier produit; renversons l'ordre des termes du multiplicande, et écrivons le premier terme $b_0 x^{p-1}$ du multiplicateur au-dessous du terme de degré $(m - p - q + 1)$ dans le multiplicande, ce qui donne la disposition

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_m + \ldots + a_{p+q-1} x^{m-p-q+1} + \ldots + a_q x^{m-q} + \ldots + a_p x^{m-p}, \\ \qquad\qquad b_0 x^{p-1} \qquad\qquad\quad + \ldots + b_{p-1}. \end{array} \right.$$

Le coefficient de x^{m-q} sera la somme des coefficients des termes qui se correspondent verticalement.

Or, si l'on pose

$$(6)\qquad A_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

et si l'on désigne par α_{pq} le coefficient du terme de rang q dans la $p^{\text{ième}}$ des équations (3), on aura évidemment, d'après ce qui vient d'être dit,

$$(7)\quad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + A_{p+q-3,2} + \ldots + A_{q,p-1}.$$

On voit que, si $p + q - 1 > m$, il n'y aura pas de termes du multiplicande placés au-dessus des termes $b_0 x^{p-1}$, $b_1 x^{p-2}$,... du multiplicateur, puisque le premier terme à gauche du multiplicande est a_m; le premier terme de la somme α_{pq} sera donc celui pour lequel le premier indice est au plus égal à m.

On remarque encore que le second indice du dernier terme de α_{pq} n'est jamais supérieur à $(p - 1)$; si p est inférieur à q, ce dernier terme existera dans α_{pq}; si p est supérieur à q, les derniers termes de α_{pq} seront nuls; le premier des termes non nuls, en s'avançant vers la gauche, sera $A_{p,q-1}$. D'ailleurs on peut ne pas se préoccuper des derniers termes de α_{pq}, car, lorsque p est supérieur à q, les termes écrits d'après la loi de formation indiquée dans la formule (7) et se trouvant au delà de

$A_{p,q-1}$ se détruiront identiquement; ils sont, en effet,

$A_{p-1,q}+A_{p-2,q+1}+A_{p-3,q+2}+\ldots+A_{q+2,p-3}+A_{q+1,p-2}+A_{q,p-1}$;

or il est visible que $A_{ij}=-A_{ji}$; donc....

4. Il résulte de ce qui précède la formule générale suivante :

Étant données les deux équations

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0, \\ b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0, \end{cases}$$

si l'on pose

$$(\mathrm{II}) \qquad A_{ij}=a_ib_j-a_jb_i=\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

puis

$$(\mathrm{III}) \quad \alpha_{pq}=A_{p+q-1,0}+A_{p+q-2,1}+A_{p+q-3,2}+\ldots+A_{q,p-1},$$

le résultat de l'élimination de x entre les deux équations (I) *sera*

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}=0.$$

Remarque I. — Dans la formule (III), les premiers indices ne doivent jamais être supérieurs à m : on devra donc omettre les termes dans lesquels le premier indice est plus grand que m. Le deuxième indice n'est jamais supérieur à $p-1$. La somme des deux indices est égale à $(p+q-1)$.

Remarque II. — Lorsque les équations (I) ne sont pas du même degré, si la seconde, par exemple, est

$$b_nx^{m-n}+b_{n+1}x^{m-n-1}+\ldots+b_m=0,$$

on peut toujours appliquer la formule générale qui précède en introduisant les hypothèses ·

$$b_0=b_1=b_2=\ldots=b_{n-1}=0;$$

seulement il faudra supprimer le facteur a_0^n qui se présentera dans l'équation (IV) et qui est étranger à la question.

Remarque III. — Le déterminant (IV) est un déterminant symétrique, c'est-à-dire que

$$\text{(V)} \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

On a, effet,

$$(1^\circ) \qquad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + \ldots + A_{q,p-1};$$

$$(2^\circ) \qquad \alpha_{qp} = A_{q+p-1,0} + A_{q+p-2,1} + \ldots + A_{p,q-1}.$$

Supposons, par exemple, $p > q$; les premiers termes des expressions (1°) et (2°) sont évidemment égaux jusqu'au terme $A_{p,q-1}$, inclusivement, qui est le dernier terme de α_{qp}; à partir de là, les termes restants dans α_{pq} sont

$$A_{p-1,q} + A_{p-2,q+1} + A_{p-3,q+2} + \ldots + A_{q+2,p-3} + A_{q+1,p-2} + A_{q,p-1};$$

Or cette somme est évidemment nulle, puisque $A_{ij} = -A_{ij}$; donc $\alpha_{qp} = \alpha_{qp}$.

5. Appliquons cette règle au système des deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_0x^6 + b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{cases}$$

La formule (III) donne, immédiatement et sans calcul,

$$\begin{array}{llll}
\alpha_{11} = A_{10}, & & & \\
\alpha_{12} = A_{20}, & \alpha_{22} = A_{30} + A_{21}, & & \\
\alpha_{13} = A_{30}, & \alpha_{23} = A_{40} + A_{31}, & \alpha_{33} = A_{50} + A_{41} + A_{32}, & \\
\alpha_{14} = A_{40}, & \alpha_{24} = A_{50} + A_{41}, & \alpha_{34} = A_{60} + A_{51} + A_{42}, & \\
\alpha_{15} = A_{50}, & \alpha_{25} = A_{60} + A_{51}, & \alpha_{35} = \quad + A_{61} + A_{52}, & \\
\alpha_{16} = A_{60}; & \alpha_{26} = \quad + A_{61}; & \alpha_{36} = \quad\quad + A_{62}; & \\
\alpha_{44} = A_{61} + A_{52} + A_{43}, & & & \\
\alpha_{45} = \quad + A_{62} + A_{53}, & \alpha_{55} = A_{63} + A_{54}, & & \\
\alpha_{46} = \quad\quad + A_{63}; & \alpha_{56} = \quad + A_{64}, & \alpha_{66} = A_{65}. &
\end{array}$$

Le résultat de l'élimination est donc

$$
(2)\quad \begin{vmatrix}
A_{10} & A_{20} & A_{30} & A_{40} & A_{50} & A_{60} \\
A_{20} & A_{30}+A_{21} & A_{40}+A_{31} & A_{50}+A_{41} & A_{60}+A_{51} & A_{61} \\
A_{30} & A_{40}+A_{31} & A_{50}+A_{41}+A_{32} & A_{60}+A_{51}+A_{42} & A_{61}+A_{52} & A_{62} \\
A_{40} & A_{50}+A_{41} & A_{60}+A_{51}+A_{42} & A_{61}+A_{52}+A_{43} & A_{62}+A_{53} & A_{63} \\
A_{50} & A_{60}+A_{51} & A_{61}+A_{52} & A_{62}+A_{53} & A_{63}+A_{54} & A_{64} \\
A_{60} & +A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65}
\end{vmatrix} = 0.
$$

6. Maintenant supposons, par exemple,

$$
(3)\qquad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0,
$$

on a, dans ce cas,

$$
(4)\quad \left\{ \begin{array}{lll}
A_{10} = 0, & A_{20} = 0, & A_{12} = 0, \\
A_{k0} = -a_0 b_k, & A_{k1} = -a_1 b_k, & A_{k2} = -a_2 b_k, \quad \text{où } k > 2.
\end{array} \right.
$$

Introduisons ces hypothèses dans le résultant (2); on peut d'abord diviser la première ligne et la première colonne par $-a_0$; après cette suppression, ajoutons à la seconde ligne la première multipliée par a_1, on pourra encore diviser la seconde ligne par $-a_0$, et l'on obtiendra comme résultat définitif, après avoir ajouté à la seconde colonne la première multipliée par a_1 :

$$
(5)\begin{vmatrix}
0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\
b_3 & -a_0 b_4 & -a_0 b_5 - a_1 b_4 - a_2 b_3 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 \\
b_4 & -a_0 b_5 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 + A_{43} & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} \\
b_5 & -a_0 b_6 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} + A_{54} & A_{64} \\
b_6 & 0 & -a_2 b_6 & A_{63} & A_{64} & A_{65}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ce déterminant, qu'on pourrait encore simplifier en combinant les lignes et les colonnes, est le résultant des deux équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on suppose $b_3 = 0$, on pourra diviser de nouveau par $-a_0$, et le déterminant (5), simplifié par l'addition convenable des lignes et des colonnes, se réduit à

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & b_4 & -a_0b_5+a_1b_4 & -a_0b_6+a_2b_4 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & -a_0b_6+a_2b_4 & -a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 & 0 & -a_3b_6+A_{54} & A_{64} \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (7) est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{array}\right.$$

COMBINAISONS COMPLÈTES;

PAR M. G.-H. NIEWENGLOWSKI,
Professeur de Mathématiques à Paris.

Les combinaisons complètes (*), ou combinaisons avec répétition, de m lettres prises deux à deux, trois à trois,..., sont les produits dans lesquels les mêmes lettres peuvent se trouver répétées plusieurs fois comme facteurs. L'ordre de ces facteurs étant indifférent dans les

---

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 1[re] série, t. I, article de M. LEVRET, et 2[e] série, t. IX, p. 168.

combinaisons, on peut, au lieu de *aaba*, écrire *aaab*, ou plus simplement a^3b. Ainsi, les combinaisons complètes des trois a, b, c, prises trois à trois, sont

$$a^3,\quad a^2b,\quad a^2c,\quad ab^2,\quad ac^2,\quad abc,\quad b^3,\quad b^2c,\quad bc^2,\quad c^3.$$

Pour trouver le nombre des combinaisons complètes, remarquons que, d'après un théorème des combinaisons simples, on a

$$\begin{aligned} C_m^{n+1} + C_m^n &= C_{m+1}^{n+1}, \\ C_{m-1}^{n+1} + C_{m-1}^n &= C_m^{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ C_n^n &= C_{n+1}^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$C_m^n + C_{m-1}^n + C_{m-2}^n + \ldots + C_n^n = C_{m+1}^{n+1}. \tag{1}$$

Cela posé, rien de plus facile que de former les combinaisons complètes de différents ordres les unes après les autres, et d'en avoir le nombre.

En effet, soient m lettres placées en ligne droite dans l'ordre alphabétique

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Les combinaisons complètes de ces m lettres, prises deux à deux, forment le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc} a^2, & ab, & ac, & ad,\ldots, & ak, & al, \\ & b^2, & bc, & bd,\ldots, & bk, & bl, \\ & & c^2, & cd,\ldots, & ck, & cl, \\ & & & d^2,\ldots, & dk, & dl, \\ & & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & & k^2, & kl, \\ & & & & & l^2. \end{array}$$

Il est évident que le nombre des combinaisons complètes, qui forment la première ligne du tableau, est exprimé par C_m^1;

Celui de la seconde ligne est exprimé par C_{m-1}^1;

Les autres sont donnés par C_{m-2}^1, $C_{m-3}^1, \ldots, C_1^1$.

Par conséquent, le nombre de toutes ces combinaisons est égal à la somme

$$C_m^1 + C_{m-1}^1 + C_{m-2}^1 + \ldots + C_1^1 = C_{m+1}^2.$$

Si donc on désigne par K_m^2 le nombre des combinaisons complètes des m lettres, prises deux à deux, on aura

$$K_m^2 = C_{m+1}^2.$$

Maintenant, pour former les combinaisons complètes des m lettres prises trois à trois, il suffit d'écrire la lettre a dans toutes les combinaisons déjà obtenues; la lettre b dans toutes celles où la lettre a n'entre pas; la lettre c dans toutes celles où les deux lettres a et b n'entrent pas, et ainsi de suite, ce qui donne

$$\begin{array}{rrrrrr}
a^3, & a^2b, & a^2c, & a^2d, \ldots, & a^2k, & a^2l, \\
 & ab^2, & abc, & abd, \ldots, & abk, & abl, \\
 & & ac^2, & acd, \ldots, & ack, & acl, \\
 & & & \multicolumn{3}{r}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
 & & & & ak^2, & akl, \\
 & & & & & al^2, \\
 & b^3, & b^2c, & b^2d, \ldots, & b^2k, & b^2l, \\
 & & bc^2, & bcd, \ldots, & bck, & bcl, \\
 & & & \multicolumn{3}{r}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
 & & & & bk^2, & bkl, \\
 & & & & & bl^2, \\
 & & & & k^3, & k^2l, \\
 & & & & & kl^2, \\
 & & & & & l^3.
\end{array}$$

Le nombre des combinaisons complètes formées avec la lettre a, d'après ce qui précède, est exprimé par $K^2_m = C^2_{m+1}$.

De même, le nombre des combinaisons complètes formées avec la lettre b, dans lesquelles la lettre a n'entre pas, est donné par $K^2_{m-1} = C^2_m$; les combinaisons complètes formées avec la lettre c, dans lesquelles les deux lettres a, b n'entrent pas, sont au nombre représenté par $K^2_{m-2} = C^2_{m+1}$, et ainsi de suite. Le dernier groupe n'a qu'une combinaison, et est représenté, pour uniformité, par C^2_2; par conséquent, le nombre de toutes ces combinaisons est égal à la somme

$$C^2_{m+1} + C^2_m + C^2_{m-1} + \ldots + C^2_2 = C^3_{m+2},$$

ce qui donne

$$K^3_m = C^3_{m+2}.$$

Nous en concluons, par analogie, la formule générale

$$K^n_m = C^n_{m+n-1}. \tag{2}$$

Or, si cette formule est vraie pour les combinaisons complètes des m lettres, n à n, elle sera aussi vraie pour celles des m lettres, $n+1$ à $n+1$. En effet, formons ces dernières : il suffit pour cela d'écrire la lettre a dans toutes les combinaisons déjà obtenues, dont le nombre est C^n_{m+n-1}; de mettre la lettre b dans toutes celles dans lesquelles la lettre a n'entre pas, et qui sont au nombre de C^n_{m+n-2}; d'écrire la lettre c dans toutes les combinaisons déjà obtenues, dans lesquelles les deux lettres a, b n'entrent pas, et qui sont au nombre de C^n_{m+n-3}, et ainsi de suite. On voit que le nombre des combinaisons complètes des m lettres, prises $n+1$ à $n+1$, est égal à la somme

$$C^n_{m+n-1} + C^n_{m+n-2} + C^n_{m+n-3} + \ldots + C^n_n = C^{n+1}_{m+n};$$

par conséquent,

$$K_m^{n+1} = C_{m+n}^{n+1};$$

donc la formule (2) est générale.

Nous avons ainsi montré comment on peut former les combinaisons complètes, et quel en est le nombre.

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE RELATIF AU TÉTRAÈDRE ;

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Trouver un tétraèdre ayant parmi ses angles solides un trièdre trirectangle, et dont les six arêtes soient mesurées par des nombres entiers.

Soient a, b, c les arêtes dont le point de concours est au sommet du trièdre trirectangle, et p, q, r les côtés de la face opposée à ce sommet. On a

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = p^2,$$

$$(2) \qquad b^2 + c^2 = q^2,$$

$$(3) \qquad c^2 + a^2 = r^2.$$

Il s'agit donc de trouver, en nombres entiers, trois carrés tels, que la somme de deux quelconques d'entre eux soit un carré. L'*Arithmétique* de Diophante donne la solution numérique d'un problème analogue : je me servirai ici des artifices qui conduisent à cette solution.

Je pose

$$c^2 = 4 \times 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)^2,$$

$$\gamma = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \delta = 2\alpha\beta,$$

$$\gamma' = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad \delta' = (\alpha^2 - b^2)^2,$$

d'où

$$c^2 = 4\gamma\gamma' = 4\delta\delta'.$$

Si je donne aux arêtes a, b les valeurs suivantes :

$$a = \frac{\gamma}{t} - \gamma' t,$$

$$b = \frac{\delta}{t} - \delta' t,$$

t étant une indéterminée, j'aurai

$$a^2 + c^2 = \left(\frac{\gamma}{t} + \gamma' t\right)^2,$$

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{\delta}{t} + \delta' t\right)^2,$$

c'est-à-dire que les équations (2) et (3) seront vérifiées par des valeurs rationnelles, quelle que soit la valeur rationnelle de t.

Reste à considérer l'équation (1), qui devient

$$\left(\frac{\gamma}{t} - \gamma' t\right)^2 + \left(\frac{\delta}{t} - \delta' t\right)^2 = p^2,$$

ou, en ayant égard à ce que $c^2 = 4\gamma\gamma' = 4\delta\delta'$,

$$(4) \qquad \frac{\gamma^2 + \delta^2}{t^2} + (\gamma'^2 + \delta'^2)\, t^2 - c^2 = p^2.$$

On peut satisfaire à l'équation précédente en posant

$$\frac{\gamma^2 + \delta^2}{t^2} = p^2$$

et

$$(\gamma'^2 + \delta'^2)\, t^2 - c^2 = 0.$$

On déduit de cette dernière équation

$$t = \frac{c}{\sqrt{\gamma'^2 + \delta'^2}};$$

mais

$$\gamma'^2 + \delta'^2 = (\alpha^2 - 6^2)^2 [(\alpha^2 - 6^2)^2 + 4\alpha^2 6^2] = (\alpha^4 - 6^4)^2;$$

donc

$$t = \frac{c}{\alpha^4 - 6^4} = \frac{2(\alpha^2 - 6^2)\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^4 - 6^4} = \frac{2\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2}.$$

Cette valeur de l'indéterminée t donne, pour les arêtes a, b, c, les expressions ci-après :

$$a = \frac{\alpha^4 - 6^4}{2\sqrt{2\alpha 6}} - \frac{4\alpha 6(\alpha^2 - 6^2)\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2},$$

$$b = \frac{\alpha 6(\alpha^2 + 6^2)}{\sqrt{2\alpha 6}} - \frac{2(\alpha^2 - 6^2)^2\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2},$$

$$c = 2\sqrt{2\alpha 6}(\alpha^2 - 6^2).$$

On fera disparaître le radical et les dénominateurs qui figurent dans ces expressions en les multipliant par $2(\alpha^2 + 6^2)\sqrt{2\alpha 6}$.

Désignant par A, B, C les arêtes dont le point de concours est au sommet du trièdre trirectangle, et qui sont mesurées par des nombres entiers et vérifiant les équations (1), (2), (3), on a

$$A = (\alpha^2 - 6^2)[(\alpha^2 + 6^2)^2 - 16\alpha^2 6^2],$$
$$B = 2\alpha 6[(\alpha^2 + 6^2)^2 - 4(\alpha^2 - 6^2)^2],$$
$$C = 8\alpha 6(\alpha^4 - 6^4).$$

On trouvera, pour les trois autres arêtes,

$$P = (\alpha^2 + 6^2)^3,$$
$$Q = (\alpha^2 - 6^2)[(\alpha^2 + 6^2)^2 + 16\alpha^2 6^2],$$
$$R = 2\alpha 6[(\alpha^2 + 6^2)^2 + 4(\alpha^2 - 6^2)^2].$$

Les nombres α, 6 sont indéterminés, mais ils ne peuvent être égaux. Si l'on fait $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, on a la solution

$$\begin{aligned} A &= 117, \\ B &= 44, \\ C &= 240, \\ P &= 125, \\ Q &= 267, \\ R &= 244. \end{aligned}$$

Note du rédacteur. — Cette solution numérique $A = 117$, $B = 44$, $C = 240$ se trouve aussi dans l'*Algèbre* d'Euler, t. II, p. 234; mais elle n'est pas, comme ici, comprise dans des formules qui donnent une infinité d'autres solutions de la question proposée.

Il ne serait pas sans intérêt de savoir si les nombres 117, 44, 240 représentent les plus petites valeurs entières que l'on puisse attribuer aux arêtes A, B, C, sous la condition que les trois autres arêtes P, Q, R soient, de même, mesurées par des nombres entiers. (G).

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une Lettre de M. Moret-Blanc.* — La solution géométrique de la question de Mathématiques spéciales du Concours d'agrégation (1873), insérée dans le numéro de janvier, contient une erreur, facile du reste à rectifier.

L'auteur dit :

« La normale en P à l'hyperboloïde étant dans le plan de l'ellipse de gorge, le centre de la sphère considérée dans l'énoncé décrit cette normale. »

Cette dernière assertion est inexacte : les normales menées le long d'une génératrice G, étant des génératrices d'un même système d'un paraboloïde hyperbolique, ne se rencontrent pas, mais le plan de l'ellipse de gorge, qui coupe le paraboloïde suivant une génératrice de ce premier système, la normale en P à l'hyperboloïde, le coupe aussi suivant une génératrice du second système, rencontrée par toutes celles du premier, et qui est par conséquent le lieu des points d'incidence ou des centres des sphères considérées dans l'énoncé. La conclusion reste la même, ou plutôt elle devient légitime; car, si la normale en P était l'axe de la surface de révolution, celle-ci serait un cône et non un hyperboloïde.

2. M. Harkema nous écrit, de Saint-Pétersbourg, que la question 949 a été résolue d'une manière incomplète (2e série, t. X, p. 42), en ce que l'équation d'une conique a été seulement obtenue en supposant le pôle situé sur la droite donnée, et qu'en outre cette équation ne résulte pas d'une valeur particulière attribuée à la constante de l'intégrale considérée. M. Harkema joint à ses observations une solution *complète* qui sera insérée dans un de nos prochains numéros.

3. M. Bourguet, qui a, plus d'une fois, bien voulu nous faire part de ses remarques sur la résolution de questions proposées dans les *Nouvelles Annales*, nous adresse aujourd'hui une solution *simplifiée* de la question 1018, déjà résolue. (Même tome, p. 201.) Voici la solution de M. Bourguet :

« *Nous avons*

$$x = a\cos\alpha = a'\cos\alpha',$$

$$y = b\sin\alpha = b'\sin\alpha',$$

d'où

$$\cos\alpha\sin\alpha = \cos\alpha'\sin\alpha',$$

ou

$$\sin 2\alpha = \sin 2\alpha',$$

qui prouve que les deux angles sont égaux ou complémentaires.

» *De là on tire*

$$\tang\alpha = \cot\alpha' = \frac{a}{a'},$$

et

$$x = \frac{aa'}{\sqrt{a^2 + a'^2}}, \quad y = \frac{bb'}{\sqrt{b^2 + b'^2}},$$

et, si l'on suppose $a = a'$, $b = b'$,

$$x^2 = \frac{a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{b^2}{2}$$

et le lieu, en supposant $ab = k$, *est* $xy = \pm \frac{1}{2}k$. »

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1033

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. A. PELLISSIER.

On donne un cylindre droit et une hélice tracée sur ce cylindre : trouver la longueur d'un arc de l'hélice tel, que les tangentes menées à ses extrémités se rencontrent.

Soient

AB un arc d'hélice tel, que les tangentes AC, BC menées à ses extrémités A, B se rencontrent en un point C;

R le rayon de la base du cylindre sur lequel l'hélice est tracée;

O le centre de cette base;

ac, *bc* les projections de AC, BC sur le plan de la base du cylindre, et tangentes en *a*, *b*, à la circonférence dont O est le centre;

h le pas de l'hélice;

α l'angle constant que les tangentes à l'hélice forment avec les génératrices du cylindre;

x l'arc ab de la circonférence O terminé aux points de contact a, b.

On voit facilement que $Cc - Aa = ca.\cot\alpha$, et $Bb - Cc = cb.\cot\alpha$, d'où

$$Cc - Aa = Bb - Cc = \tfrac{1}{2}(Bb - Aa);$$

le point C est donc également distant des deux plans menés par les points A, B parallèlement au plan de la base du cylindre.

Le triangle aOc donne

$$ac = \mathrm{R} \tang aOc = \mathrm{R} \tang \frac{x}{2\mathrm{R}},$$

d'où

$$Cc - Aa = \mathrm{R} \tang \frac{x}{2\mathrm{R}} \cot\alpha.$$

D'autre part, $Bb - Aa = \dfrac{hx}{2\pi \mathrm{R}}$; il s'ensuit

$$\mathrm{R} \tang \frac{x}{2\mathrm{R}} \cot\alpha = \frac{1}{2} \frac{hx}{2\pi\mathrm{R}},$$

et, parce que $\cot\alpha = \dfrac{h}{2\pi\mathrm{R}}$, on a

$$\tang \frac{x}{2\mathrm{R}} = \frac{x}{2\mathrm{R}}.$$

Par conséquent, la question se ramène à trouver un angle $\dfrac{x}{2\mathrm{R}}$ qui soit mesuré par le même nombre que sa tangente, ce qui est une question dont la solution se trouve dans la plupart des Traités d'Algèbre.

Connaissant x, on en conclura immédiatement la longueur de l'arc AB de l'hélice.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1119

(voir 2^e série, t. XII, p. 527);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Parmi tous les triangles ayant un même angle dont le cosinus est supposé commensurable, il en est une infinité dont les côtés sont en nombres entiers.

(ABEL TRANSON.)

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, et $\cos A = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers premiers entre eux : on a

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{p}{q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a+b-c)(a+c-b)} = \frac{q+p}{q-p}.$$

Posons $(b+c-a) = X$, et $(a+c-b) = Y$, et remarquons que

$$a+b+c = (b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c),$$

il viendra

$$\frac{X+Y+(a+b-c)}{(a+b-c)} = \frac{(q+p)Y}{(q-p)Y},$$

d'où

$$a+b-c = \frac{(q-p)X(X+Y)}{(q+p)Y-(q-p)X}.$$

Afin de n'avoir que des valeurs entières, nous prendrons

$$X = (b+c-a) = 2x[(q+p)y-(q-p)x],$$
$$Y = (a+c-b) = 2y[(q+p)y-(q-p)x],$$

d'où

$$(a+b-c) = 2[(q-p)x(x+y)],$$

ce qui donne

$$a = (q+p)y^2+(q-p)x^2,$$
$$b = 2qxy,$$
$$c = (x+y)[(q+p)y-(q-p)x].$$

Quels que soient les entiers x et y, pourvu que c soit positif, ces formules donnent, en nombres entiers positifs, les trois côtés d'un triangle, dans lequel l'angle A a pour cosinus $\frac{p}{q}$.

Si le cosinus de A était donné négatif, il suffirait de changer dans ce qui précède le signe de p.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1121

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. ALFRED ROUSSET.

Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes en un point donné à une droite donnée, et ayant une extrémité de l'axe focal en un point donné.

(A. DE SAINT-GERMAIN.)

Soient F un des points du lieu (*); A l'extrémité donnée de l'axe focal; B le point de contact de la tangente donnée; C le point de rencontre de cette tangente et d'une perpendiculaire élevée à l'axe focal au point A; ω et α les angles BAF, ABF, et V l'angle CBA.

La droite FC est, comme on sait, bissectrice de l'angle AFB des rayons vecteurs FA, FB, menés aux points de contact A, B des tangentes CA, CB. Or les triangles CAF, CBF donnent

$$\sin \mathrm{CFA} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CF}}, \text{ et } \sin \mathrm{CFB} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}} \sin(\mathrm{V} + \alpha);$$

donc

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \sin(\mathrm{V} + \alpha).$$

Mais, dans le triangle CAB, on a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\sin \mathrm{CBA}}{\sin \mathrm{CAB}} = \frac{\sin \mathrm{V}}{\cos \omega};$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

par conséquent,

$$(1)\qquad \sin V = \cos\omega \sin(V + \alpha).$$

C'est, en coordonnées ω, α, l'équation du lieu.

Pour l'obtenir en coordonnées rectilignes, prenons pour axe des x la droite BA, et la perpendiculaire en B pour axe des y. En posant $BA = a$, nous aurons

$$\cos\omega = \frac{a-x}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}},\ \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}},\ \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}},$$

et en remplaçant $\cos\omega$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ par ces valeurs dans l'équation

$$(1)\quad \sin V = \cos\omega \sin(V+\alpha) = \cos\omega(\cos\alpha \sin V + \sin\alpha \cos V),$$

il viendra

$$\sin V = \frac{a-x}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}}\left(\frac{x\sin V + y\cos V}{\sqrt{y^2+x^2}}\right),$$

et, par suite,

$$\sin^2 V(x^2+y^2)[y^2+(a-x)^2] = (a-x)^2(x\sin V + y\cos V)^2.$$

Cette équation du quatrième degré se ramène au troisième en supprimant le facteur y; et en réduisant on trouve

$$(2)\quad \sin^2 V(x^2+y^2)y - (a-x)^2(y\cos 2V + x\sin 2V) = 0.$$

La tangente, à l'origine, a pour équation

$$y\cos 2V + x\sin 2V = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$c^3\sin^2 V + c(\sin^2 V - \cos 2V) - \sin 2V = 0,$$

qui a pour racines

$$\cot V \quad \text{et} \quad \frac{-\cos V \pm \sqrt{1 - 9\sin^2 V}}{2 \sin V};$$

ces trois racines sont réelles lorsqu'on a, en valeur absolue, $\sin V < \frac{1}{3}$.

Le moyen le plus commode pour construire la courbe est de se servir de l'équation

(1) $$\sin V = \cos\omega \sin(V + \alpha) \text{ (*)},$$

(*) En prenant pour centre d'une circonférence un point quelconque C de la droite donnée BC (tel qu'on ait CB > CA), et pour rayon CA, les points F, F′ auxquels les tangentes menées du point B à cette circonférence rencontrent sa tangente en A appartiennent au lieu cherché. En faisant varier la position du point C sur la droite donnée, on obtiendra autant de points qu'on voudra du lieu géométrique en question.

Lorsque le point C, pris pour centre, se trouve à l'intersection de la droite BC et de la perpendiculaire élevée à la droite AB au point A, la tangente en A à la circonférence décrite est dirigée suivant AB; l'une des tangentes menées de B coïncide avec BA, et l'autre BA′ est symétrique de BA par rapport à la droite BC; on en peut conclure que le lieu cherché passe par les points A, B, et qu'il est tangent à la droite BA′ au point B.

Quand la distance CB devient infinie, la tangente en A et les tangentes issues du point B prennent des directions perpendiculaires à CB, et par conséquent parallèles; les points F, F′ passent alors à l'infini : donc la direction perpendiculaire à BC est asymptotique au lieu dont il s'agit.

Toute autre direction asymptotique correspond au cas particulier où la tangente en A à la circonférence considérée serait parallèle à une tangente menée du point B; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que ces deux tangentes soient perpendiculaires aux extrémités A, D d'un même diamètre ACD. Dans ce cas, la perpendiculaire élevée au diamètre AD, en son milieu C, ira nécessairement passer par le milieu M de AB; et, parce que l'angle ACM est droit, il faudra que le point C appartienne à une circonférence décrite sur AM comme diamètre, ce qui exige que la distance du centre de cette circonférence à la droite BC, ne surpasse pas son rayon, c'est-à-dire qu'on ait, en nommant V l'angle ABC,

$$\frac{3}{4}\text{AB} \sin V \leq \frac{1}{4}\text{AB}, \quad \text{d'où} \quad \sin V \leq \frac{1}{3}.$$

Quand la condition $\sin V < \frac{1}{3}$ sera remplie, la circonférence décrite sur AM comme diamètre coupera la droite BC en deux points C, C′, et les directions MC, MC′ seront asymptotiques. (G.)

qui devient

$$\sin V = \cos\omega \sin\lambda,$$

en posant $V + \alpha = \lambda$. Les valeurs entre lesquelles on doit faire varier λ sont telles que $\sin V < \sin\lambda$. On en déduit les valeurs entre lesquelles ω peut varier.

On voit facilement comment les directions asymptotiques s'obtiennent par la Géométrie. La direction correspondant à $c = \cot V$ est perpendiculaire à la tangente donnée BC. Les deux autres résultent de la construction suivante.

Soit M le milieu AB : la circonférence décrite sur AM comme diamètre rencontre généralement la droite BC en deux points C, C'; les droites MC, MC' sont les directions asymptotiques.

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par M. Gambey. Nous avons reçu deux autres solutions analytiques de cette question. Dans chacune de ces solutions, on a conclu, de ce que le calcul avait conduit à une équation du quatrième degré, que le lieu cherché était une *courbe du quatrième ordre*. C'est, dans le cas actuel, une conclusion mal fondée, parce que l'équation du quatrième degré qui a été obtenue se décompose en deux autres, dont l'une, du premier degré, représente la droite qui passe par le sommet et le point de contact donnés. Ainsi, par exemple, en prenant pour origine le sommet donné et pour axes des x et des y une perpendiculaire et une parallèle à la tangente donnée, on a trouvé l'équation du quatrième degré

$$(fy^2 + dxy + dfx - d^2y)^2 - (x^2 + y^2)[(f^2 - d^2)y^2 + 2dfxy] = 0,$$

où d représente la perpendiculaire abaissée du sommet sur la tangente, et f la distance du pied de cette perpendiculaire au point de contact donné. Or cette équation se décompose en les deux suivantes :

$$dy - fx = 0$$

et

$$2dyx^2 + (fy^2 - 2d^2y - d^2f)x + dy^3 - 2dfy^2 + d^3y = 0.$$

La première, $dy - fx = 0$, est l'équation de la droite menée de l'origine au point de contact désigné. (G.)

Question 1127

(voir 2ᵉ série, t. XII, p. 335);

PAR M. E. GIVELET,

Élève du lycée de Reims (classe de M. Niewenglowski).

Lorsqu'un cercle, passant par un point fixe F est vu sous un angle constant d'un autre point F', ce cercle enveloppe un limaçon de Pascal qui a pour foyer double le point F et pour foyer simple le point F'.

Le lieu des centres des cercles satisfaisant à la question est une circonférence. En effet, soit C (*) l'un des centres. Menons du point F' une tangente F'T au cercle et joignons F'C. L'angle CF'T est constant, et égal à la moitié de l'angle donné; donc on a

$$\frac{CT}{CF'} = \text{const.},$$

ou, puisque $CT = CF$,

$$\frac{CF}{CF'} = \text{const.};$$

donc le lieu du point C est une circonférence dont le centre O est sur la droite FF', et l'on sait que, OA étant le rayon de ce cercle, on a

$$\overline{OA}^2 = OF \times OF'.$$

Cela posé, je considère deux points très-voisins C et C' de cette circonférence. Le second point d'intersection des cercles décrits des points C et C' comme centres, et passant en F, s'obtiendra en abaissant du point F une perpendiculaire FP sur la droite CC', et la prolongeant d'une longueur $PQ = FP$. Si le point C' tend vers le

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

point C, la droite CC′ tend vers la tangente en C. Donc le point M, obtenu en abaissant une perpendiculaire FR sur la tangente en C, et la prolongeant d'une longueur RM = FR, est un point du lieu.

Du point O comme centre, décrivons un cercle avec OF comme rayon; abaissons du point O la perpendiculaire OI sur FM et menons OC. Soit N le second point d'intersection du cercle OF avec FM. On a

$$\mathrm{NM} = \mathrm{FM} - \mathrm{FN} = 2\,\mathrm{FR} - 2\,\mathrm{FI} = 2\,\mathrm{OC} = 2\,\mathrm{OA};$$

donc NM est constant et, par conséquent, le point M décrit un limaçon de Pascal dont F est le point double.

Je dis que le point F′ est le foyer simple. En effet, on a la relation

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \mathrm{OF} \times \mathrm{OF}' = \mathrm{OF}\,(\mathrm{OF} + \mathrm{FF}'),$$

d'où

$$\mathrm{FF}' = \frac{\overline{\mathrm{OA}}^2 - \overline{\mathrm{OF}}^2}{\mathrm{OF}},$$

ce qui est bien l'expression de la distance du point double au foyer simple.

Note du rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Pellissier, Bourguet, Demartres, Moret-Blanc, Launoy, Gambey, Émile Picard, V. H., à Saint-Étienne, Robaglia, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin), Charles Combes, élève en Mathématiques spéciales, à Clermont-Ferrand, Ch. Semeny et E. Momy, élèves du lycée de Bordeaux, et Quellenec, élève en Mathématiques spéciales à Brest.

M. Robaglia, élève du lycée Louis-le-Grand, en a donné une solution entièrement analytique, suivie de recherches assez étendues, ayant pour objet de déterminer la *classe* du limaçon de Pascal, et les foyers tant imaginaires que réels de cette courbe. Nous regrettons de devoir nous borner, faute d'espace, à faire seulement connaître les principaux résultats de ce travail consciencieux, où l'on trouve à la fois de l'érudition et une assez grande habitude du calcul. M. Robaglia a démontré que le limaçon est une courbe de la quatrième classe, qui a deux foyers réels, dont l'un est *triple* et coïncide avec le centre du cercle directeur; le second foyer réel est *simple*, et se trouve sur l'axe de la courbe, à une distance du point double égale à $\frac{b^2 - a^2}{2b}$, en nommant b le diamètre du cercle directeur, et a la longueur dont on prolonge les rayons vecteurs.

Nous devons aussi faire mention d'une *Étude de quelques propriétés des foyers du limaçon de Pascal*, par M. *de Rufz de Lavison*, élève du lycée Louis-le-Grand, classe de M. Painvin.

Ces propriétés consistent dans des relations entre les distances d'un point quelconque M, de la courbe aux deux foyers, et au point double, ces distances étant considérées deux à deux. En désignant par F, F' et O le foyer triple, le foyer simple et le point double, on a

$$\frac{MF^2}{b} - MF'^2 = \frac{2a^2 - b^2}{4b}, \quad \frac{\overline{MF}^2}{a} \mp MO = \frac{b^2}{4a}, \quad MF' \pm \frac{a}{b} MO = OF'.$$

Ces formules ont été établies par M. de Rufz de Lavison, au moyen d'un calcul assez simple; la dernière est surtout remarquable.

(G.)

QUESTIONS.

1142. Étant données deux droites non situées dans un même plan, les paraboloïdes hyperboliques qui passent par ces deux droites ont tous un plan directeur commun; trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs passent par une troisième droite donnée non parallèle au plan des deux premières. Trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs forment avec le premier un angle donné.

(DEWULF.)

1143. Construire une parabole connaissant le sommet, une tangente et un point. (LAISANT.)

1144. Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme

$$(6\mu \mp 1)^2,$$

et le troisième la forme

$$4(6\mu \mp 1)^2$$

(CATALAN.)

1145. On donne une surface du second degré et deux points e, e' : par le point e, on mène une transversale quelconque rencontrant la surface aux points a et b ; par le point e', on mène une parallèle à la transversale ; cette parallèle rencontre aux points a' et b' les plans tangents aux points a et b.

Si D est le diamètre parallèle à la transversale, l'expression

$$\frac{ea \, . \, e'b' + eb \, . \, e'a'}{D^2}$$

a une valeur constante, quelle que soit la direction de la transversale. (Faure.)

1146. On donne une surface du second degré et deux droites L, M. Sur la première L on prend deux points arbitraires a, b, et l'on trace les plans polaires de ces points. Désignons par c et d les points d'intersection de ces plans avec la seconde M ; par e et f les points d'intersection de ces mêmes plans avec le diamètre parallèle à la droite M : l'expression

$$Oe \, . \, Of \, \frac{ab}{cd},$$

dans laquelle O est le centre de la surface, a une valeur constante. (Faure.)

1147. On donne, sur un même plan, deux cercles fixes A, B et le rayon d'un troisième cercle C, mobile et tangent extérieurement au cercle A. Trouver l'enveloppe de l'axe radical des circonférences B et C.

(Harkema.)

LOI DES SÉRIES DE WRONSKI; SA PHORONOMIE (*);

PAR M. ABEL TRANSON.

La démonstration que Wronski a donnée, en 1812, de sa *loi des séries*, dans la troisième Note annexée au Mémoire sur la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques*, est, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire (**), extrêmement simple. Mais parce que les premiers ouvrages de l'auteur ne se trouvent plus dans le commerce, je crois faire une chose utile en publiant ici cette démonstration.

Je donnerai ensuite l'application de la loi au développement d'une fonction suivant les *facultés*, et aussi suivant les *puissances* de la variable indépendante.

Je donnerai aussi l'énoncé d'un théorème dont la démonstration implique une théorie spéciale des déterminants, et qui constitue « le principe fondamental de la déduction algorithmique de la Loi suprême. »

Enfin, je ferai voir que Wronski, bien avant que M. Ampère eût produit son idée de la *Cinématique*, avait établi la nécessité d'une science qu'il appelle *phoronomie*, ayant pour objet l'étude des lois du mouvement, abstraction faite des forces qui le produisent.

I. L'auteur avait démontré dans sa *Philosophie des Mathématiques*, publiée en 1811, que la forme générale des séries est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1|\xi} + A_2\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

(*) *Phoronomie*, science du mouvement.

(**) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, p. 161.

dans laquelle le symbole $\varphi(x)^{m|\xi}$ représente le produit de m termes, savoir :

$$\varphi(x)^{m|\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

Et il s'agissait, dans la Note de 1812, de donner la formule du coefficient général A_μ. Ici je citerai textuellement l'auteur.

. . . .

« A cet effet, rappelons que la différence régressive d'une fonction $f(x)$ est l'excès de cette fonction sur celle qui la précède dans l'ordre de l'accroissement ξ de la variable, savoir :

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-\xi).$$

» L'expression d'un ordre quelconque de ces différences, toujours dans l'ordre régressif, est

$$\Delta^\mu f(x) = f(x) - \frac{\mu}{1} f(x-\xi) + \frac{\mu.\mu-1}{1.2.} f(x-2\xi) - \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3} f(x-3\xi) + \ldots;$$

appliquant cette formule à une fonction de la forme $f(x) = \varphi(x)^{\omega|\xi}$, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta^\mu \varphi(x)^{\omega|\xi} = \varphi(x)^{\omega|\xi} - \frac{\mu}{1}\varphi(x-\xi)^{\omega|\xi} \\ &\quad + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\varphi(x-2\xi)^{\omega|\xi}\ldots + (-1)^\mu \varphi(x-\mu\xi)^{\omega|\xi}. \end{aligned}\right.$$

» D'ailleurs, puisqu'on a en général

$$\begin{aligned} &\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi} \\ &\quad = \varphi(x-\lambda\xi)\varphi(x-\lambda\xi+\xi)\varphi(x-\lambda\xi+2\xi)\ldots\varphi(x-\lambda\xi+(\omega-1)\xi), \end{aligned}$$

λ étant un nombre quelconque, le facteur $\varphi(x)$ se trouvera contenu dans la faculté $\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi}$ lorsque ω sera plus grand que λ, et que d'ailleurs ω et λ seront des nombres entiers, ainsi que nous le supposerons ici. Donc le même facteur $\varphi(x)$ sera contenu dans tous les termes de l'expression (1) de la différence $\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi}$, lorsque ω sera plus grand que μ; et par conséquent, en donnant à x la valeur qui réduit à zéro le facteur $\varphi(x)$, on aura, dans le cas en question, la valeur

$$\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi} = 0. \tag{2}$$

» Or la forme générale des séries est

$$F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x)^{1|\xi} + A_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots \tag{3}$$

» Prenant donc des deux membres de cette expression (3) les différences des ordres régressifs 1, 2, 3, 4,..., et donnant ensuite à x la valeur qui réduit à zéro le facteur $\varphi(x)$, nous aurons, en vertu de l'équation (2), la suite des équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\, F(x) = A_1\Delta\,\varphi(x) \\ \Delta^2 F(x) = A_1\Delta^2\varphi(x) + A_2\Delta^2\varphi(x)^{2|\xi} \\ \Delta^3 F(x) = A_1\Delta^3\varphi(x) + A_2\Delta^3\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\Delta^3\varphi(x)^{3|\xi} \\ \Delta^4 F(x) = A_1\Delta^4\varphi(x) + A_2\Delta^4\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\Delta^4\varphi(x)^{3|\xi} + A_4\,\Delta^4\varphi(x)^{4|\xi} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

» La première de ces équations donne immédiatement

$$A_1 = \frac{\Delta\,F(x)}{\Delta\,\varphi(x)}.$$

» En second lieu, puisqu'en vertu de l'équation (2) on a $\Delta\varphi(x)^{2|\xi} = 0$, les deux premières des équations précédentes (4) sont identiques avec celles-ci :

$$\begin{array}{l} \Delta\, F(x) = A_1\,\Delta\,\varphi(x) + A_2\,\Delta\,\varphi(x)^{2|\xi} \\ \Delta^2 F(x) = A_1\,\Delta^2\varphi(x) + A_2\,\Delta^2\varphi(x)^{2|\xi}, \end{array}$$

équations qui donnent immédiatement (*)

$$A_2 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}]}.$$

» En troisième lieu, observant qu'en vertu de la valeur générale (2), on a

$$\Delta \varphi(x)^{2|\xi} = 0, \quad \Delta \varphi(x)^{3|\xi} = 0, \quad \Delta^2 \varphi(x)^{3|\xi} = 0,$$

on verra que les trois premières des équations (4) sont identiques avec celles-ci :

$$\begin{aligned}
\Delta\, F(x) &= A_1 \Delta\, \varphi(x) + A_2 \Delta\, \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta\, \varphi(x)^{3|\xi},\\
\Delta^2 F(x) &= A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{3|\xi},\\
\Delta^3 F(x) &= A_1 \Delta^3 \varphi(x) + A_2 \Delta^3 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi},
\end{aligned}$$

équations qui donnent encore immédiatement

$$A_3 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi}]}.$$

» Et procédant de la même manière, on verra, non par induction, mais par le principe même de la formation de ces quantités, qu'on aura en général

$$A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}]},$$

μ étant un indice quelconque.

» De plus, ayant égard à la valeur de x dans cette ex-

(*) Les produits entre crochets, au numérateur et au dénominateur de A_2, et plus loin aux numérateurs et dénominateurs de A_3, $A_4, \ldots, A_\mu$, sont les termes principaux des *déterminants* qui donnent les valeurs de ces coefficients. L'auteur donne à ces déterminants le nom de fonctions *schinn,* d'après la lettre hébraïque qu'il leur attribue pour caractéristique. Je me conforme à la notation actuellement usitée ; mais je constate en passant l'avance que Wronski prenait sur les géomètres contemporains en faisant dès sa première publication (1810-1811) un continuel usage de ces fonctions, devenues depuis un si précieux instrument dans toute l'Algorithmie.

pression du coefficient général de A_μ, et par suite à la valeur (2), on verra que la somme combinatoire (*le déterminant*) formant le dénominateur de A_μ que nous venons de déterminer, se réduit à son premier terme, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned}&[\Delta^1 \varphi x\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}] \\ &\quad = \Delta^1 \varphi x\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi},\end{aligned}$$

» Et c'est là l'expression algorithmique de la *loi générale des séries.* »

Avant d'en venir à l'application ci-dessus annoncée, j'appelle l'attention du lecteur sur l'avertissement dont l'auteur fait suivre la démonstration précédente :

« ... Nous devons prévenir que, dans un système de Philosophie des Mathématiques, cette démonstration, quelque rigoureuse et simple qu'elle soit, n'est pas encore suffisante. La loi dont il s'agit, qui est la *loi générale des séries*, se trouve être un cas particulier de la loi algorithmique absolue, dont la forme est la suivante :

$$F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + A_3 \Omega_3 + \ldots;$$

les quantités Ω_0, Ω_1, Ω_2,... étant des fonctions quelconques de la variable, liées ou non par une loi ;... il faut donc, pour démontrer la loi dont il est question, la déduire immédiatement comme cas particulier de la loi absolue que nous venons d'indiquer, et c'est cette déduction qui donnera la démonstration philosophique de la *loi générale des séries* dont nous parlons. »

L'auteur, qui, dans la première section de la *Philosophie de la technie*, a donné en 1815 la démonstration de la *loi suprême*, en a effectivement déduit comme cas particulier la *Loi des séries* dans la seconde section du même Ouvrage (1816-1817).

II. Dans le cas de $\varphi(x)$ quelconque, la circonstance de $\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi}=0$, toutes les fois qu'on a $\omega>\mu$, donne lieu à ce que, dans le déterminant qui est au numérateur de A_{μ}, tous les termes au-dessus de la diagonale qui sert à former le terme principal sont nuls, excepté ceux de la dernière colonne, qui sont les différences successives de $F(x)$, savoir : $\Delta F(x), \Delta^2 F(x),\ldots, \Delta^{\mu-1} F(x), \Delta^{\mu} F(x)$.

En outre, dans le cas de $\varphi(x)=x$, tous les termes de cette diagonale sont des constantes, à l'exception du dernier qui est égal à $\Delta^{\mu} F(x)$. Car on a

$$\Delta(x)=1.\xi;\quad \Delta^2 x^{2|\xi}=1.2.\xi^2;\quad \Delta^3 x^{3|\xi}=1.2.3.\xi^3;\ldots,$$

et, vu que les termes qui leur sont inférieurs dans chaque colonne sont les différences successives de ces termes constants, ces termes inférieurs sont tous nuls ; ainsi, pour le cas de $\varphi x=x$, le déterminant qui est au numérateur de A_{μ} se réduit à son terme principal. Au numérateur et au dénominateur il y a donc deux produits d'un égal nombre de facteurs, et ces deux produits ne diffèrent que par le dernier facteur de chacun d'eux. Ainsi l'on a

$$A_{\mu}=\frac{\Delta^{\mu}F(0)}{1.2.3\ldots\mu\xi^{\mu}}.$$

Il faut mettre $\Delta^{\mu}F(0)$, puisque dans le cas général on doit substituer à x dans A_{μ} la valeur particulière de x qui donne lieu à $\varphi(x)=0$, et ici cette valeur est $x=0$.

Finalement, on a pour le développement de $F(x)$, selon les facultés successives de x :

$$F(x)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{\xi}.x^{1|\xi}+\frac{\Delta^2 F(0)}{\xi^2}.\frac{x^{2|\xi}}{1.2}+\frac{\Delta^3 F(0)}{\xi^3}.\frac{x^{3|\xi}}{1.2.3}+\ldots.$$

Supposons maintenant ξ infiniment petit, égal à dx ;

les différences finies représentées par les Δ deviennent des différentielles, et l'on a pour le développement, selon les puissances successives de la variable

$$F(x) = F(0) + \left(\frac{dF(0)}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1.2.3} \ldots$$

C'est le développement de Maclaurin, lequel, appliqué à la fonction $F(x) = f(x+h)$, donne le développement de Taylor après qu'on y a changé h en x.

Dans l'enseignement actuel, le développement de Taylor s'introduit dans la science par l'essai d'étendre à une fonction algorithmique quelconque une certaine propriété des fonctions algébriques entières. C'est prendre la question d'aussi bas que possible. En déduisant ce développement de la loi des séries, on y arrive par une voie plus large, plus éclairée, et qui, ce me semble, fait mieux comprendre l'importance du résultat et sa place dans la science. — D'ailleurs, comme, en arrêtant un développement quelconque à l'un de ses termes, on peut toujours concevoir l'existence d'un terme complémentaire, il est manifeste qu'en adoptant la déduction ci-dessus on pourra ensuite établir comme à l'ordinaire la *forme du reste*.

III. Comment les résultats de Wronski ont-ils pu rester si longtemps en oubli ? Personne ne croira que les conclusions si peu motivées du Rapport de 1811 aient pu balancer dans l'esprit des géomètres le témoignage imposant de Lagrange, déclarant en 1810 que « *l'auteur tire de sa formule* (de la loi suprême) *toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions et qu'elles n'en sont que des cas très-particuliers.* » Mais, sans m'arrêter à chercher l'explication de ce fait étrange qu'il faut bien admettre, savoir : que les savants en général ont ignoré les travaux de Wronski, j'irai au-devant d'une difficulté derrière laquelle certaines personnes pourraient aujourd'hui encore abriter leur refus d'examiner ces travaux.

En présentant sa *loi des séries* et la loi beaucoup plus générale qu'il appelle la *loi suprême*; celle aussi qu'il appelle le *problème universel*, dont M. Cayley vient de simplifier la démonstration ; en présentant de nombreuses applications de ces lois, Wronski ne se préoccupe pas de savoir si les développements qu'il en déduit sont convergents, ou divergents, ou stationnaires. Ce n'est pas qu'il méconnaisse la nécessité de la convergence lorsqu'il s'agit de l'évaluation numérique des fonctions; il a fait une large place à cette question dans sa *Philosophie de la Technie* (seconde section); mais il croit que les séries qu'il appelle *régulières*, exprimant par l'ensemble infini de leurs termes une relation précise entre la fonction développée et la fonction arbitraire prise pour mesure algorithmique de la première, ont par cela même une signification très-déterminée, et cela indépendamment de la circonstance contingente de convergence ou de non-convergence. Cependant les géomètres, ne reconnaissant aux séries aucun autre emploi que d'offrir la valeur approchée des fonctions, se croient fondés à n'admettre que des séries convergentes, et certainement on serait mal avisé de vouloir présenter aujourd'hui une série, quelque élégante qu'elle soit, si l'on n'apportait pas en même temps une discussion de sa convergence. Sans prendre parti dans cette question, je me borne à l'humble observation suivante :

Refuser de prendre tel ou tel développement en considération, parce que l'auteur n'a pas donné les conditions de convergence de ce développement, c'est se placer dans la situation d'un géomètre qui aurait dédaigné les séries de Taylor, de Maclaurin, de Burmann, de Lagrange, jusqu'à l'époque encore récente où l'on a connu avec précision les conditions de convergence de ces séries; oui! c'est se placer exactement dans la même situation. — On n'y a pas pensé!

IV. Lorsque Wronski présenta, en 1810, à l'Académie des Sciences, sa *loi suprême,* la théorie des déterminants était encore très-peu avancée. Plus tard, les recherches de Binet et de Cauchy étendirent et généralisèrent les résultats précédemment obtenus (*Journal de l'École Polytechnique,* 1813 et 1815); mais, même à ces dernières époques et longtemps encore après, ces fonctions étaient considérées par les géomètres comme formées essentiellement de quantités constantes. Cependant, dès 1810, Wronski faisait dépendre la démonstration de la *loi suprême* d'une théorie spéciale de ces mêmes fonctions, en les considérant comme formées, non plus avec des quantités constantes, mais avec des quantités variables liées entre elles par certaines relations. Il réduisait cette théorie à un théorème unique dont je crois devoir donner l'énoncé, premièrement à cause de son importance puisqu'il conduit à la *loi suprême,* et secondement parce que, après les développements considérables que la théorie des déterminants a reçus de nos jours, la démonstration de ce théorème n'offrira peut-être pas au lecteur des difficultés sérieuses.

Théorème. — Soient $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\omega$ des fonctions d'une variable x, et soit Δ la caractéristique des différences prises à volonté suivant la loi progressive ou la loi régressive, par rapport à un accroissement quelconque de la variable x. Si avec ces fonctions on construit, d'une part, les quantités

$$X_1 = [\Delta_0^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1],$$
$$X_2 = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_2],$$
$$X_3 = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_3],$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$X_\omega = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_\omega] \; (*),$$

et, d'une autre part, les quantités

$$T_1 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\Delta^{\delta_1} Y^0,$$
$$T_2 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 2i\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\Delta^{\delta_2} Y_0,$$
$$T_3 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 3i\Delta^{\delta_1} Y_0 + 3i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + i^3\Delta^{\delta_3} Y_0;$$

et généralement, pour un indice quelconque ρ,

$$T_\rho = \Delta^{\delta_0} Y_0 + \frac{\rho}{1} i\Delta^{\delta_1} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)}{1.2} i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)}{1.2.3} i^3\Delta^{\delta_3} Y_0 + \dots,$$

en faisant $i = +1$, lorsque les différences Δ sont prises suivant la voie progressive et $i = -1$ lorsque ces différences sont prises suivant la voie régressive, on aura la relation d'égalité ci-dessous, qui constitue le théorème dont il s'agit :

$$[\Delta^0 X_1 \Delta^1 X_2 \Delta^2 X_3 \dots \Delta^{\omega-1} X_\omega]$$
$$= (T_1 T_2 T_3 \dots T_{\omega-1}) [\Delta^{\delta_0} Y_{\Delta 1} \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_2 \dots \Delta^{\delta_{10}} Y_{10}],$$

où l'on donne aux indices des différences des fonctions Y les valeurs suivantes :

$$\delta_0 = \delta, \quad \delta_1 = 1 + \delta, \quad \delta_2 = 2 + \delta, \dots, \quad \delta_\omega = \omega + \delta,$$

(*) Chaque produit entre crochets représente le terme principal d'un déterminant à quatre éléments, de sorte, par exemple, que

$$X_n = \Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_n - \Delta^{\delta_0} Y_n \Delta^{\delta_1} Y_0.$$

δ étant un nombre entier quelconque, ainsi que ω (*Philosophie de la Technie,* Section I^re^, p. 193).

Dans l'égalité ci-dessus, les deux produits entre crochets représentent encore, dans le premier membre, le terme principal d'un déterminant à ω^2 éléments, et dans le second membre le terme principal d'un déterminant à $(\omega+1)^2$ éléments. Il va sans dire qu'on a $\Delta^0 X_1 = X_1$ et $\Delta^0 Y_0 = Y_0$. D'ailleurs, pour bien fixer le sens du théorème, je vais en faire la vérification dans le cas le plus simple possible, savoir dans le cas de $\delta = 0$ et de $\omega = 2$ (*).

L'égalité proposée se réduit alors à

$$[\Delta^0 X_1\, \Delta^1 X_2] = T_1\, [\Delta^0 Y_0\, \Delta^1 Y_1\, \Delta^2 Y_2].$$

Supposant les différences prises dans le sens progressif, la fonction $T_1 = Y_0 + \Delta Y_0$ est la même chose que Y_1, et le second membre de l'égalité ci-dessus est égal à

$$\begin{aligned}
&+ Y_1 Y_0 (\Delta Y_1\, \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2\, \Delta^2 Y_1),\\
&- Y_1 \Delta Y_0 (Y_1\, \Delta^2 Y_2 - Y_2\, \Delta^2 Y_1),\\
&+ Y_1\, \Delta^2 Y_0 (Y_1\, \Delta Y_2 - Y_2\, \Delta Y_1).
\end{aligned}$$

Or, si l'on a égard aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta X_1 &= Y_0 \Delta^2 Y_1 - Y_1 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0\, \Delta^2 Y_1 - \Delta Y_1\, \Delta^2 Y_0,\\
\Delta X_2 &= Y_0 \Delta^2 Y_2 - Y_2 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0\, \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2\, \Delta^2 Y_0,
\end{aligned}$$

on verra aisément que le premier membre, savoir :

$$X_1 \Delta X_2 - X_2 \Delta X_1,$$

est précisément identique au second.

V. Dans son *Essai sur la Philosophie des Sciences,* ou *Exposition d'une classification des connaissances hu-*

(*) D'après l'indice le plus élevé des fonctions T, on voit que la moindre valeur que puisse avoir l'indice ω, c'est d'être égal à 2.

maines, essai publié en 1834, M. Ampère faisait ressortir tous les avantages d'une science où l'on s'occuperait des propriétés géométriques du mouvement, abstraction faite des forces qui le produisent et des masses qui en sont animées. Il lui donne le nom de *cinématique* (du grec κινημα, mouvement) et son heureuse conception, accueillie par tous les savants, a été développée ultérieurement par le général Poncelet et par plusieurs géomètres de son école. La Cinématique est donc aujourd'hui une science constituée et l'honneur de sa création remonte à Ampère, puisqu'il est avéré que les publications de Wronski sont passées inaperçues des savants.

Toutefois, si l'on accorde que la propriété d'une idée appartient à celui qui l'a publiée le premier, il faudra revendiquer en faveur de Wronski l'invention de la science du mouvement sans les forces.

Effectivement, en 1818, seize ans avant l'apparition de l'*Essai sur la Philosophie des Sciences* de M. Ampère, Wronski avait publié, dans le premier numéro du *Sphinx* (*), un tableau général des sciences intitulé : *Système architectonique absolu de l'Encyclopédie du savoir humain ;* et dans ce tableau on trouve classée, sous le nom de *Phoronomie*, une science du mouvement, avec cet avertissement : *ne pas confondre avec la Mécanique dans laquelle entre de plus la considération des forces.*

La priorité de l'idée est donc bien à Wronski. Après cela il est curieux d'examiner, à un point de vue philosophique, la place qu'Ampère donne à la Cinématique dans sa *Classification naturelle des sciences*, et de la comparer à la situation donnée à la Phoronomie dans le *Système architectonique du savoir humain*.

(*) Le *Sphinx*, recueil périodique dont il a paru seulement deux numéros; leur publication avait été précédée de l'*Introduction au Sphinx*.

Ampère, après avoir rangé la Mécanique parmi les sciences du *premier ordre,* la subdivise comme il suit :

$$\text{MÉCANIQUE}\left\{\begin{array}{ll}\textit{élémentaire :} & \left\{\begin{array}{l}\text{Cinématique,}\\ \text{Statique;}\end{array}\right.\\ \textit{transcendante :} & \left\{\begin{array}{l}\text{Dynamique,}\\ \text{Mécanique moléculaire.}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ce n'est pas le lieu d'expliquer les quatre points de vue d'après lesquels l'auteur décompose chaque science du *premier ordre,* et particulièrement la Mécanique, en quatre sciences du *troisième ordre.* Jean Reynaud a consacré une partie de sa remarquable dissertation sur l'*Encyclopédie* à montrer combien précaires et insuffisantes sont les bases de la classification d'Ampère (*). Mais il faut s'étonner qu'un esprit si judicieux ait classé, comme une branche de la Mécanique, cette même science dont il excluait la force et la masse pour n'y considérer que le mouvement. Sans doute l'enseignement de la Cinématique doit précéder immédiatement l'enseignement de la Mécanique ; mais autres sont les convenances de l'enseignement, autres les nécessités d'une classification philosophique.

Dans tous les ouvrages de Wronski, Traités de Mathématiques, de Philosophie, de Religion, de Politique, d'Histoire,..., partout se trouvent des résumés offrant, comme gages d'une doctrine fixe et vraiment générale, les mêmes formes de classification. Ces formes caractérisent le *Système architectonique* publié en 1818. J'y constate particulièrement la reproduction constante d'un ternaire résultant de deux idées hétérogènes qui s'opposent comme *pôles*, et d'une troisième idée où les deux premières se confondent et se *neutralisent.* Voici, par

(*) *Voir* l'article *Encyclopédie* dans la 41e livraison (1843) de l'*Encyclopédie pittoresque.*

exemple, la partie du *Système architectonique* qui se rapporte aux Mathématiques :

MATHÉMATIQUES PURES :

a_1) Pôles opposés.

a_2) Conjonction de l'espace; étendue : GÉOMÉTRIE.

b_2) Succession du temps. — Nombre : ALGORITHMIE.

b_1) Neutralisation du temps et de l'espace :

Mouvement : PHORONOMIE.

(Qu'il ne faut pas confondre avec la Mécanique dans laquelle entre de plus la considération des forces.)

Ainsi, selon Wronski, le ternaire des Mathématiques pures se compose de ces trois termes : Géométrie, Algorithmie, Phoronomie. Quant à la *Mécanique*, il la place dans les SCIENCES DE LA NATURE ; c'est une branche de la *Physique*.

Post scriptum. — Je m'estimerai heureux si j'ai pu, dans un sujet purement mathématique, faire au moins pressentir la valeur de Wronski comme philosophe, d'autant plus que lui-même déclare n'attacher de prix à ses travaux mathématiques que comme offrant la garantie scientifique de sa Philosophie.

NOTE

sur la détermination des foyers dans les lignes du second degré et dans les surfaces de révolution;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

I.

1. Supposons les axes rectangulaires. Soit

$$f(xy) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique. Si x_1 et y_1 sont les coordonnées d'un foyer, on aura

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (mx + ny + p)^2,$$

d'où l'on conclut identiquement

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (mx + ny + p)^2 = \lambda f,$$

ou bien

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \lambda f = (mx + ny + p)^2.$$

Il s'agit donc d'avoir, en

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F),$$

le carré d'une fonction u du premier degré en x et y; or, en rendant la fonction homogène en x, y et $z = 1$, cela aura lieu si les trois dérivées u'_x, u'_y, u'_z ont leurs coefficients proportionnels. Les demi-dérivées sont

$$\begin{gathered} x - x_1 - \lambda\,(Ax + By + D), \\ y - y_1 - \lambda\,(Bx + Cy + E), \\ -x_1(x - x_1) - y_1(y - y_1) - \lambda(Dx + Ey + F); \end{gathered}$$

d'où

$$\begin{gathered} \frac{1 - \lambda A}{-\lambda B} = \frac{-\lambda B}{1 - \lambda C} = \frac{-x_1 - \lambda D}{-y_1 - \lambda E}, \\ \frac{1 - \lambda A}{-x_1 - \lambda D} = \frac{-\lambda B}{-y_1 - \lambda E} = \frac{-x_1 - \lambda D}{x_1^2 + y_1^2 - \lambda F}, \\ \frac{-\lambda B}{-x_1 - \lambda D} = \frac{1 - \lambda C}{-y_1 - \lambda E} = \frac{-y_1 - \lambda E}{x_1^2 + y_1^2 - \lambda F}; \end{gathered}$$

puis on a

$$mx + ny + p = \frac{x - x_1 - \lambda(Ax + By + D)}{\sqrt{1 - \lambda A}},$$

Les équations de condition donnent d'abord

$$(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0.$$

Posons $\lambda = \frac{1}{S}$: c'est

$$(A-S)(C-S)-B^2=0;$$

et il vient

$$\frac{A-S}{B}=\frac{B}{C-S}=\frac{Sx_1+D}{Sy_1+E},$$

$$\frac{A-S}{Sx_1+D}=\frac{B}{Sy_1+E}=\frac{Sx_1+D}{-(x_1^2+y_1^2)S+F},$$

$$\frac{B}{Sx_1+D}=\frac{C-S}{Sy_1+E}=\frac{Sy_1+E}{-(x_1^2+y_1^2)S+F};$$

on déduit de la première ligne

$$\frac{A-S}{B}=\frac{B}{C-S}=\frac{Sx_1+D}{Sy_1+E}=\frac{Ax_1+By_1+D}{Bx_1+Cy_1+E},$$

de sorte que $\frac{f'_{x_1}}{A-S}=\frac{f'_{y_1}}{B}$.

L'équation $(A-S)(C-S)-B^2=0$ est connue; elle a ses racines réelles. Pour chacune, il y a un axe donné par l'équation $\frac{f'_x}{A-S}=\frac{f'_y}{B}$ ou par $\frac{f'_x}{B}=\frac{f'_y}{C-S}$, qui passe à l'infini, quand S est nul.

Pour chaque valeur de $S \gtrless 0$, on aura deux foyers donnés par

$$\frac{A-S}{B}=\frac{B}{C-S}=\frac{Ax_1+By_1+D}{Bx_1+Cy_1+E},$$

et

$$(x_1^2+y_1^2)S-F=-\frac{(Sx_1-D)^2}{A-S},$$

ou

$$(x_1^2+y_1^2)S-F=-\frac{(Sy_1+E)^2}{C-S},$$

ou

$$(x_1^2+y_1^2)S-F=-\frac{(Sx_1+D)(Sy_1+E)}{B},$$

de sorte que l'on a

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2}{A - S} = -\frac{(Sy_1 + E)^2}{C - S}$$
$$= -\frac{(Sx_1 + D)(Sy_1 + E)}{B},$$

d'où l'équation d'un cercle par

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2 + (Sy_1 + E)^2}{A + C - 2S},$$

ou par

$$S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2) + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)F = 0.$$

Au cas de la parabole, la racine $S = 0$ donne un axe à l'infini, ainsi que le centre; il n'y correspond aucun foyer. L'autre racine $S = A + C$ donne un seul foyer par la rencontre de l'axe et de la droite qui a pour équation

$$2(A + C)(Dx_1 + Ey_1 + F) + D^2 + E^2 - (A + C)F = 0,$$

2. Quand les coordonnées sont obliques, on doit avoir

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\theta$$
$$-\frac{1}{S}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = (mx + ny + p)^2.$$

Les demi-dérivées à rendre proportionnelles entre elles sont

$$x - x_1 + (y - y_1)\cos\theta - \frac{1}{S}(Ax + By + D),$$

$$y - y_1 + (x - x_1)\cos\theta - \frac{1}{S}(Bx + Cy + E),$$

$$-x_1(x - x_1) - y_1(y - y_1) - x_1(y - y_1)\cos\theta - y_1(x - x_1)\cos\theta$$
$$-\frac{1}{S}(Dx + Ey + F).$$

Il s'ensuit

$$\frac{A - S}{B - S\cos\theta} = \frac{B - S\cos\theta}{C - S} = \frac{(x_1 + y_1\cos\theta)S + D}{x_1\cos\theta + y_1 + E},$$

$$\frac{A - S}{(x_1+y_1\cos\theta)S+D} = \frac{B - S\cos\theta}{(y_1+x_1\cos\theta)S+E} = \frac{(x_1 + y_1\cos\theta)S + D}{-(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S+F},$$

$$\frac{B - S\cos\theta}{(x_1+y_1\cos\theta)S+D} = \frac{C - S}{(y_1+x_1\cos\theta)S+E} = \frac{(x_1\cos\theta + y_1)S + E}{-(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S+F},$$

de sorte que l'on a

$$(A - S)(C - S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0,$$

$$\frac{A - S}{B - S\cos\theta} = \frac{B - S\cos\theta}{C - S} = \frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E},$$

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta)S - F \\
&= -\frac{[(x_1 + y_1\cos\theta)S + D]^2}{A - S} = -\frac{[(x_1\cos\theta + y_1)S + E]^2}{C - S} \\
&= -\frac{[(x_1 + y_1\cos\theta)S + D][(y_1 + x_1\cos\theta)S + E]}{B - S\cos\theta} \\
&= -\frac{[(x_1 + y_1\cos\theta)S + D]^2 + [(x_1\cos\theta + y_1)S + E]^2 - 2\cos\theta[(x_1+y_1\cos\theta)S+D][(y_1+x_1\cos\theta)S+E]}{(A - S) + (C - S) - 2\cos\theta(B - S\cos\theta)} \\
&= -\frac{\sin^2\theta[(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta)S + 2Dx_1 + 2Ey_1]S + D^2 + E^2 - 2DE\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta - 2S\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&S(A + C - 2B\cos\theta - S\sin^2\theta)(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta) \\
&\quad + 2S\sin^2\theta(Dx_1 + Ey_1 + F) + D^2 + E^2 - 2DE\cos\theta \\
&\quad\quad - (A + C - 2B\cos\theta)F = 0.
\end{aligned}$$

Nota. On aura, au lieu d'un foyer, un cercle doublement tangent à la conique, par l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r^2 = 0$$

si les coordonnées sont rectangulaires, et par l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\theta - r^2 = 0$$

s'il en est autrement, en mettant $F + r^2 S$ à la place de F, ce qui donne dans un cas

$$(x_1^2 + y_1^2 - r^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2}{A - S} = -\frac{(Sy_1 + E)^2}{C - S}$$
$$= -\frac{(Sx_1 + D)(Sy_1 + E)}{B},$$

ou

$$S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2) + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F + r^2 S)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)(F + r^2 S) = 0,$$
$$= S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + r^2 S^2 + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)F = 0,$$

et, dans l'autre cas,

$$(x_1^2 + y_1^2)2x_1 y_1 \cos\theta - r^2) S - F$$
$$= -\frac{[(x_1 + y_1\cos\theta)S + D]^2}{A - S} = -\frac{[(x_1\cos\theta + y_1)S + E]^2}{C - S}$$
$$= -\frac{[(x_1 + y_1\cos\theta)S + D][(y_1 + x_1\cos\theta)S + E]}{B - S\cos\theta},$$

ou

$$S(A + C - 2B\cos\theta - S\sin^2\theta)(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1\cos\theta - r^2)$$
$$+ S^2 r^2 \sin^2\theta + 2S\sin^2\theta(Dx_1 + Ey_1 + F) + D^2 + E^2$$
$$-(A + C - 2B\cos\theta)F = 0.$$

II.

Autre détermination des foyers.

Prenons pour déterminer les foyers cette propriété bien connue, que la droite qui joint tout point (xy) d'une directrice à un foyer $(x_1 y_1)$ correspondant est perpendiculaire à sa polaire, passant par ce foyer. On a immédiatement par cette propriété, si les coordonnées sont rectangulaires,

$$xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + f'_{1z_1} = 0$$

et

$$\frac{x_1 - x}{f'_x} = \frac{y_1 - y}{f'_y} = -\frac{1}{2S},$$

de là

$$Ax + By + D + S(x_1 - x) = 0,$$
$$Bx + Cy + E + S(y_1 - y) = 0,$$
$$xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + zf'_{1z_1} = 0.$$

Il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} A - S & B & D + Sx_1 \\ B & C - S & E + Sy_1 \\ f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui apprend que S ne varie pas avec (x et y).

Par conséquent, la polaire du foyer $x_1\ y_1$ est donnée par chacune des équations

$$(A - S)x + By + D + Sx_1 = 0,$$
$$Bx + (C - S)y + E + Sy_1 = 0,$$
$$f'_{1x_1}x + f'_{1y_1}y + f'_{1z_1} = 0;$$

de sorte que les coefficients y sont proportionnels entre eux. On a ainsi

$$\frac{A - S}{B} = \frac{B}{C - S} = \frac{D + Sx_1}{E + Sy_1},$$

$$\frac{A - S}{f'_{1x_1}} = \frac{B}{f'_{1y_1}} = \frac{D + Sx_1}{f'_{1z_1}},$$

$$\frac{B}{f'_{1x_1}} = \frac{C - S}{f'_{1y_1}} = \frac{E + Sy_1}{f'_{1z_1}}.$$

D'après quoi

$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0,$$

même équation que ci-dessus.

Pour une valeur de S, on a, si elle est différente de zéro, un axe par

$$\frac{A-S}{B}=\frac{B}{C-S}=\frac{D+Sx_1}{E+Sy_1}=\frac{f'_{1x_1}}{f'_{1y_1}}.$$

Les foyers correspondants sont déterminés par cette équation et par

$$(A-S)f'_{1z_1}=(D+Sy_1)f'_{1x_1}, \text{ ou } (C-S)f'_{1z_1}=(E+Sy_1)f'_{1y_1}$$

ou

$$Bf'_{1z_1}=(D+Sy_1)f'_{1y_1}=(E+Sy_1)f'_{1x_1},$$

résultats qui peuvent du reste se déduire de ceux du § I.

2. Quand les coordonnées sont obliques, les équations du problème sont

$$xf'_{1x_1}+yf'_{1y_1}+f'_{1z_1}=0,$$

$$\frac{x_1-x+(y_1-y)\cos\theta}{f'_x}=\frac{y_1-y+(x_1-x)\cos\theta}{f'_y}=-\frac{1}{2S},$$

d'où

$$Ax+By+D+[x_1-x+(y_1-y)\cos\theta]S=0,$$
$$Bx+Cy+E+[(x_1-x)\cos\theta+y_1-y]S=0,$$
$$f'_{1x_1}x+f'_{1y_1}y+f'_{1z_1}z=0;$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A-S & B-S\cos\theta & D+(x_1+y_1\cos\theta)S \\ B-S\cos\theta & C-S & E+(x_1\cos\theta+y_1)S \\ f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} \end{vmatrix}=0,$$

de sorte que S est indépendant de x et y sur la directrice.

Il s'ensuit

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{(x_1\cos\theta+y_1)S+E},$$

$$\frac{A-S}{f'_{1x_1}}=\frac{B-S\cos\theta}{f'_{1y_1}}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{f'_{1z_1}},$$

$$\frac{B-S\cos\theta}{f'_{1x_1}}=\frac{C-S}{f'_{1y_1}}=\frac{(x_1\cos\theta+y_1)S+E}{f'_{1z_1}}.$$

On a ainsi

$$(A-S)(C-S)-(B-S\cos\theta)^2=0,$$

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{(x_1\cos\theta+y_1)S+E}=\frac{f'_{1x_1}}{f'_{1y_1}},$$

équation d'un axe, et

$$(A-S)f'_{1z_1}=[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]f'_{1x_1},$$

ou

$$(C-S)f'_{1z_1}=[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]f'_{1y_1},$$

ou

$$(B-S\cos\theta)f'_{1z_1}=[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]f'_{1y_1}$$
$$=[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]f'_{1x_1}.$$

III.

I. En étendant la dernière méthode aux surfaces du second degré, on obtient aisément, avec les conditions requises pour que la surface soit de révolution, les équations de l'axe de révolution et celles des foyers situés sur cet axe.

Quand une surface du second degré est de révolution, il y a, pour un foyer F situé sur l'axe de révolution, un plan P tel que tout point $p(xy)$ de ce plan a son plan polaire perpendiculaire à la droite qui le joint au foyer.

De là, si les axes de coordonnées sont perpendiculaires entre eux, $f(xyz)=0$ étant l'équation de la surface, et $t=1$,

$$xf'_{1x_1}+yf'_{1y_1}+zf'_{1z_1}+tf'_{1t_1}=0,$$

$$\frac{x_1-x}{f'_x}=\frac{y_1-y}{f'_y}=\frac{z_1-z}{f'_z}=-\frac{1}{2S},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&A\ x+B''y+B'z+C+S(x_1-x)=0,\\
&B''x+A'y+B\ z+C'+S(y_1-y)=0,\\
&B'x+B\ y+A''z+C''+S(z_1-z)=0,\\
&f'_{1x_1}x+f'_{1y_1}y+f'_{1z_1}z+f'_{1t_1}=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix}
A-S & B'' & B' & C+Sx_1\\
B'' & A'-S & B & C'+Sy_1\\
B' & B & A''-S & C''+Sz_1\\
f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} & f'_{1t_1}
\end{vmatrix}=0,$$

ce qui apprend que S ne varie pas avec le point p sur le plan P.

Les équations qui précèdent représentent donc séparément ce plan P. Il en résulte

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B}=\frac{C+Sx_1}{C'+Sy_1},$$

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S}=\frac{C+Sx_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{A-S}{f'_{1x_1}}=\frac{B''}{f'_{1y_1}}=\frac{B'}{f'_{1z_1}}=\frac{C+Sx_1}{f'_{1t_1}};$$

$$\frac{B''}{B'}=\frac{A'-S}{B}=\frac{B}{A''-S}=\frac{C'+Sy_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{B''}{f'_{1x_1}}=\frac{A'-S}{f'_{1y_1}}=\frac{B}{f'_{1z_1}}=\frac{C'+Sy_1}{f'_{1t_1}},$$

$$\frac{B'}{f'_{1x_1}}=\frac{B}{f'_{1y_1}}=\frac{A''-S}{f'_{1z_1}}=\frac{C''+Sz_1}{f'_{1t_1}}.$$

Soit d'abord $BB'B'' \gtrless o$: on aura

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

puis

$$Bf'_{x_1} = B'f'_{y_1} = B''f'_{z_1},$$

ou

$$B(C + Sx_1) = B'(C' + Sy_1) = B''(C'' + Sz_1),$$

équations qui déterminent l'axe de révolution, et en outre pour les foyers

$$(C + Sx_1)f'_{1x_1} = \frac{B'B''}{B} f'_{1t},$$

ou

$$(C' + Sy_1) f'_{1y_1} = \frac{B''B}{B'} f'_{1t},$$

ou

$$(C'' + Sz_1) f'_{1z_1} = \frac{BB'}{B''} f'_{1t},$$

ou

$$f'_{1t} = (C + Sx_1) \frac{f'_{1y_1}}{B''} = (C + Sx_1) \frac{f'_{1z_1}}{B'},$$

$$f'_{1t} = (C' + Sy_1) \frac{f'_{1x_1}}{B''} = (C' + Sy_1) \frac{f'_{1y_1}}{B},$$

$$f'_{1t} = (C'' + Sz_1) \frac{f'_{1x_1}}{B'} = (C'' + Sz_1) \frac{f'_{1y_1}}{B}.$$

Dans le cas où B est nul, il faut avoir $B' = o$, $A'' - S = o$, ou bien $B'' = o$, $A' - S = o$.

Supposons $B = o$ et $B' = o$, $A'' - S = o$. On aura le plan P par les équations

$$(A - S)x + B''y + C + Sx_1 = o,$$
$$B''x + (A' - S)y + C' + Sy_1 = o,$$
$$C'' + Sz_1 = o,$$
$$xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + zf'_{1z_1} + tf'_{1t_1} = o;$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A-A''}{B''}=\dfrac{B''}{A'-A''}=\dfrac{C+A''x_1}{C'+A''y_1}\\[2ex] \dfrac{A-A''}{f'_{1x_1}}=\dfrac{B''}{f'_{1y_1}}=\dfrac{C+A''x_1}{f'_{1z_1}}\end{array}\right\} C''+A''z_1=0,$$

C'est avoir pour condition $(A-A'')(A'-A'')-B''^2=0$, avec $B=0$, $B'=0$, et, pour l'axe, $C''+A''z_1=0$,

$$\frac{C+A''x_1}{C'+A''y_1}=\frac{A-A''}{B''}=\frac{B''}{A'-A''},$$

puis en outre, pour les foyers,

$$(C+A''x_1)f'_{1z_1}=(A-A'')f'_{1t_1},$$

ou

$$(C+A''x_1)f'_{1y_1}=B''f'_{1t_1}.$$

II. En suivant la première méthode, on observera que l'équation de la surface pouvant se mettre sous la forme

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(mx+ny+pz+q)^2,$$

on aura identiquement

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\frac{1}{S}f=(mx+ny+pz+q)^2.$$

par conséquent les demi-dérivées

$$x-x_1-\frac{1}{S}(Ax+B''y+B'z+C),$$

$$y-y_1-\frac{1}{S}(B''x+A'y+Bz+C'),$$

$$z-z_1-\frac{1}{S}(B'x+By+A''z+C''),$$

$$-x_1(x-x_1)-y_1(y-y_1)-z_1(z-z_1)-\frac{1}{S}(Cx+C'y+C''z+D)$$

ont leurs coefficients proportionnels, d'où résultent

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B}=\frac{C+Sx_1}{C'+Sy_1},$$

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S}=\frac{C'+Sx_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{A-S}{C+Sx_1}=\frac{B''}{C'+Sy_1}=\frac{B}{C''+Sz_1}=\frac{C+Sx_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D},$$

$$\frac{B''}{B'}=\frac{A'-S}{B}=\frac{B}{A''-S}=\frac{C'+Sy_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{B''}{C+Sx_1}=\frac{A'-S}{C'+Sy_1}=\frac{B}{C''+Sz_1}=\frac{C'+Sy_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D},$$

$$\frac{B'}{C+Sx_1}=\frac{B}{C'+Sy_1}=\frac{A''-S}{C''+Sz_1}=\frac{C''+Sz_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D}.$$

On a par là, avec les mêmes conditions que ci-dessus, la même valeur de S et les mêmes équations pour l'axe, puis à l'égard des foyers

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S-D&=-\frac{(C+Sx_1)^2}{A-S}=-\frac{(C'+Sy_1)^2}{A'-S}\\&=-\frac{(C''+Sz_1)^2}{A''-S}=-\frac{(C'+Sy_1)(C''+Sz_1)}{B}\\&=-\frac{(C''+Sz_1)(C+Sx_1)}{B'}\\&=-\frac{(C+Sx_1)(C'+Sy_1)}{B''}.\end{aligned}$$

Si l'on remplace D par $D+Sr^2$, on aura, à la place des foyers, le centre d'une sphère inscrite, et la sphère par l'équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-r^2=0.$$

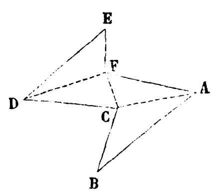
NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. LIONNET.

1. On sait qu'un polygone plan, rectiligne et convexe, dont tous les angles sont moindres que deux droits et d'un nombre n de côtés supérieur à 3, est décomposable en $n-2$ triangles. Pour étendre ce théorème à un polygone non convexe, on a donné jusqu'ici des démonstrations qui laissent à désirer sous le rapport de la rigueur. Afin d'établir que la somme des angles d'un polygone non convexe égale $2n-4$ angles droits, M. Briot, dans la sixième édition de sa *Géométrie élémentaire*, démontre le théorème relatif à la décomposition du polygone en triangles, de la manière suivante :

On forme un premier triangle ABC (*fig.* 1) avec deux

Fig. 1.



côtés du polygone et une diagonale AC; un deuxième triangle ACF avec cette diagonale, un côté AF du polygone et une nouvelle diagonale CF; puis un troisième triangle CDF avec cette diagonale, un côté CD du polygone et une nouvelle diagonale DF. Le dernier triangle DEF est formé, comme le premier ABC, par une diagonale et deux côtés du polygone.

Si ces constructions successives étaient toujours *évidemment possibles*, le théorème serait démontré ; mais il suffit de jeter les yeux sur la *fig.* 2 pour se convaincre du contraire.

2. Avant de donner une démonstration rigoureuse, il est bon d'observer que, par le mot *polygone*, nous entendrons parler d'une *seule* surface plane terminée par une ligne brisée dont chaque angle est compris entre zéro et quatre droits.

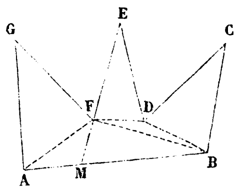
Une diagonale sera dite *intérieure*, quand tous ses points, autres que ses extrémités, seront intérieurs au polygone.

Telles sont toutes les diagonales d'un polygone convexe dont chaque angle est moindre que deux droits. Telles sont aussi, dans un polygone convexe dont un ou plusieurs angles égalent deux droits, les diagonales menées du sommet de l'un quelconque de ces angles aux sommets situés hors de la direction de ses côtés.

3. Théorème I. — *Tout polygone* P *d'un nombre* n *de côtés supérieur à* 3 *peut être décomposé en* $n-2$ *triangles par* $n-3$ *diagonales.*

On sait que, dans tout polygone convexe (2), on peut mener au moins une diagonale intérieure. Afin de prouver qu'il en est de même dans un polygone non convexe ABCDEFG, lequel a au moins un angle F plus grand que deux droits, prolongeons l'un quelconque EF des côtés de cet angle dans l'intérieur du polygone jusqu'à la rencontre du contour en un point M. Si ce point était un sommet du polygone, la droite FM serait une diagonale intérieure. Dans le cas contraire, concevons que cette droite FM, d'une longueur variable, tourne autour du point F dans un sens tel que son extrémité M décrive la ligne brisée MBCDE; cette droite restera intérieure au polygone jusqu'à ce qu'elle ait

Fig. 2.



rencontré un ou plusieurs sommets de la ligne brisée. Si elle rencontre d'abord le seul sommet B, elle sera, dans la position FB, une diagonale intérieure; si elle rencontrait en même temps les sommets B et D, chacune des droites FD, BD serait une diagonale intérieure; donc, etc.

Cela étant, supposons que le théorème I soit vrai pour tout polygone d'un nombre de côtés inférieur à n, et proposons-nous de démontrer qu'il l'est aussi pour un polygone de n côtés. Une diagonale intérieure divisera le contour de ce polygone en deux lignes brisées, l'une de n', et l'autre de n'' côtés, $n'+n''$ étant égal à n, et le polygone P en deux autres P′ et P″ dont les nombres de côtés $n'+1$ et $n''+1$ seront moindres que n. Donc, en vertu de la supposition, P′ et P″ seront décomposables, l'un en $n'-1$ triangles par $n'-2$ diagonales, et l'autre en $n''-1$ triangles par $n''-2$ diagonales; donc enfin P pourra être décomposé en $n'+n''-2$ ou $n-2$ triangles par $n'+n''-4+1$ ou $n-3$ diagonales; mais ce principe peut être considéré comme exact pour un triangle, puisqu'alors $n-2=1$ et $n-3=0$; donc il est vrai pour un quadrilatère, puis pour un pentagone, et ainsi de suite.

4. Théorème II. — *La somme des angles d'un polygone de n côtés n'excède pas $2n - 4$ angles droits.*

Legendre a démontré que la somme des angles d'un triangle n'excède pas deux droits. Or la somme des angles d'un polygone de n côtés est visiblement égale à celle de tous les angles des $n - 2$ triangles dont il se compose (3); donc la somme des angles du polygone n'excède pas $2(n - 2)$ ou $2n - 4$ angles droits.

Dans la Géométrie euclidienne, cette somme vaut $2n - 4$ droits : elle est moindre que $2n - 4$ dans la Géométrie non euclidienne.

Corollaire. — Dans tous les cas, *trois au moins des angles du polygone sont plus petits que deux droits.* Car si un polygone de n côtés avait moins de trois angles plus petits que deux droits, il aurait au moins $n - 2$ angles égaux ou supérieurs à deux droits, et, par suite, une somme d'angles plus grande que $2n - 4$ angles droits, ce qui est impossible.

CORRESPONDANCE.

M. Doucet, professeur au lycée de Lyon, nous communique une solution très-simple de la question suivante déjà résolue (2e série, t. XII, p. 29) :

Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur en un point M.

Cette nouvelle solution se fonde sur ce que le point M est le milieu du segment de la corde commune, compris entre les diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

En désignant par x_0, y_0 les coordonnées du point M rapporté à ces diamètres conjugués pris pour axes, et par a, b les demi-axes de l'ellipse, l'équation de la corde est

$$\frac{X}{x_0}+\frac{Y}{y_0}=2, \text{ où } x_0^2+y_0^2=\frac{a^2+b^2}{2}=\alpha^2,$$

et l'on trouve facilement que l'équation de l'enveloppe des droites représentées par les équations précédentes est

$$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=(2\alpha)^{\frac{2}{3}}.$$

Si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse, on a

$$X=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\quad Y=\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{2}};$$

ces formules de transformation donnent

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=2,$$

pour l'équation de l'enveloppe, rapportée aux axes de l'ellipse, considérés comme axes de coordonnées.

Une solution de la question 1127 par M. Lez nous est parvenue trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro du mois dernier.

BIBLIOGRAPHIE.

Méthode élémentaire pour effectuer des quadratures et des cubatures, par le frère Gabriel Marie.

Tel est le titre d'un Mémoire autographié, dont j'ai reçu un demi-exemplaire; l'auteur, en me l'adressant, m'a appris qu'une partie de son travail venait d'être publiée dans un Appendice à la Géométrie que l'Institut des Frères des Écoles chrétiennes a fait paraître chez *Poussielgue,* rue Cassette, 27.

Le titre du Mémoire en fait connaître l'objet : il s'agit d'effectuer des quadratures et des cubatures, en éludant, autant que possible, l'application des formules générales du Calcul infinitésimal; c'est là, assurément, une gymnastique intellectuelle qui n'est pas tout à fait dépourvue d'utilité; mais la force qu'on y gagne équivaut-elle au temps qu'on y perd ?

Quoi qu'il en soit, je remercie l'auteur de la communication qu'il a bien voulu me faire, et je ne puis que le féliciter de l'approbation que son Mémoire a obtenue de l'Institut des Frères des Écoles chrétiennes. (G.)

Une réforme géométrique. — Introduction à la Géométrie descriptive des cristalloïdes, par le comte Léopold Hugo. Grand in-8°, 1874. Paris, imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

Petit Ouvrage très-singulier et peut-être profond (*), ayant pour épigraphe : *En bonne philosophie il n'y a pas de sphère.*

On y trouve les Chapitres suivants : Dédicace transeuclidienne. — Lettre à Archimède. — Il n'y a que l'équidomoïde. — Morphologie et architectonie. — Symphonie de l'équidomoïde. — Avec quatre planches dont une chinoise.

Pour plus de renseignements sur la *Réforme géométrique* du Comte Léopold Hugo, voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XII, p. 135, le compte rendu, par C. H.

(*) Dans l'*Avertissement* qui précède l'Ouvrage, l'Auteur dit que sa théorie systématique a été généralement trouvée ingénieuse et profonde, surtout au point de vue de la Morphologie et de l'Architecture raisonnée.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. *Les Mathématiques en Belgique en* 1872; par le Dr P. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

2. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique;* par M. Hermite, première Partie. *Compte rendu analytique*, par M. P. Mansion, professeur à l'Université de Gand. (Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. VI, juillet et septembre 1873. Rome, typographie des Sciences mathématiques et physiques, Via Lata, n° 211 A; 1844).

3. *Application de la Géométrie élémentaire à l'Arithmétique;* par Auguste Ricour, censeur des études au lycée de Lille, officier de l'Instruction publique, fondateur du Comité flamand de France, et membre correspondant de plusieurs Sociétés savantes de France et de Belgique. Douai, Lucien Crépin, éditeur-imprimeur des Sociétés scientifiques et littéraires de Douai, rue de la Madeleine, 23.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 116 *et* 117

(voir 1re série, t. V, p. 167);

Par M. H. BROCARD.

116. — *Un hexagone sphérique étant inscrit dans une courbe cono-sphérique, les intersections des côtés opposés déterminent six points situés sur la même circonférence de grand cercle.*

117. — *Un hexagone sphérique étant circonscrit à*

une courbe cono-sphérique, les trois grands cercles qui passent par les sommets opposés ont un même diamètre commun.

Nota. — On nomme *cono-sphérique* la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré concentriques.

Supposons la nappe du cône prolongée hors de la sphère, et coupée par un plan quelconque suivant une conique. La perspective de l'hexagone sphérique inscrit (ou circonscrit) sur ce plan sera un hexagone rectiligne inscrit (ou circonscrit) à la conique. Dans chacun de ces deux cas, la droite qui unit deux des sommets de l'hexagone rectiligne est la perspective d'un arc de grand cercle, intersection de la sphère et d'un plan mené par son centre et par la droite considérée. Les théorèmes de *Pascal* et *Brianchon* s'appliquent donc aux courbes sphériques définies comme il a été dit, et les propositions 116 et 117 résultent immédiatement des propriétés des projections perspectives.

Question 1124

(voir 2ᵉ série, t. XII, p. 581);

PAR M. MORET-BLANC.

Si, sur une sphère dont le rayon est pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées x, y, z de tout point de cette ligne, la relation

$$\begin{aligned}(x'^2+y'^2+z'^2)[(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2]\\ =(x'x''+y'y''+z'z'')^2\\ +[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')]^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les accents des dérivées sont relatifs à une variable indépendante t. (CATALAN.)

On a les relations

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1,\\ xx'+yy'+zz'=0,\\ x'^2+y'^2+z'^2+xx''+yy''+zz''=0. \end{cases}$$

Or

$$[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')]^2$$

est le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

On a, par la règle de la multiplication des déterminants, en ayant égard aux relations (1), et en posant pour abréger

$$x'^2+y'^2+z'^2=A=-(xx''+yy''+zz''),$$
$$x'x''+y'y''+z'z''=B,$$
$$x''^2+y''^2+z''^2=C,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & A & B \\ -A & B & C \end{vmatrix} = AC-B^2-A^3;$$

le second membre de la relation à vérifier est donc

$$AC-B^2-A^3+B^2=A(C-A^2).$$

Or on a identiquement

$$(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2$$
$$=(x^2+y^2+z^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(xx''+yy''+zz'')^2=C-A^2.$$

Le premier membre est donc aussi égal à $A(C-A^2)$, et la relation est démontrée.

Remarque.— Cette relation peut servir à trouver une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = U^2 + V^2.$$

Il suffit d'y remplacer x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', par des nombres satisfaisant aux relations (1).

Pour la première, on cherchera trois carrés, dont la somme soit un carré, soit $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$; on pourra prendre

$$x = \pm\frac{a}{d}, \quad y = \pm\frac{b}{d}, \quad z = \pm\frac{c}{d}.$$

Les deux dernières équations permettront de trouver sans peine autant de systèmes qu'on voudra de valeurs correspondantes de x', y', z'; x'', y'', z''.

Ainsi, en prenant

$$\begin{array}{lll} x = \frac{2}{3}, & y = \frac{2}{3}, & z = \frac{1}{3}, \\ x' = -4, & y' = 3, & z' = 2, \\ x'' = -20, & y'' = -15, & z'' = -17, \end{array}$$

on aura, en multipliant les deux membres de la relation par 3^2,

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)(10^2 + 19^2 + 14^2) = 3^2 + 138^2.$$

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Demartres; J. Mister, répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique; Niewenglowski, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Reims; Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1125

(voir même tome, p. 200);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Sur les arêtes d'un trièdre trirectangle on peut, et d'une infinité de manières, prendre trois longueurs OA, OB, OC, *en nombres entiers, telles que l'aire du* *triangle* ABC *soit elle-même mesurée par un nombre entier, ainsi que les trois autres faces du tétraèdre résultant* OABC. (A. TRANSON.)

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{1}$$

l'équation d'une sphère ayant le point O pour centre, et rapportée aux trois arêtes du trièdre trirectangle, comme axes de coordonnées.

Le plan tangent à cette sphère en un point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = r^2,$$

et coupe les axes des coordonnées en des points A, B, C, situés à des distances a, b, c du point O, distances telle que l'on a

$$x_0 = \frac{r^2}{a}, \quad y_0 = \frac{r^2}{b}, \quad z_0 = \frac{r^2}{c}.$$

Le point (x_0, y_0, z_0) appartient à la sphère déterminée par l'équation (1) ; on a, par conséquent,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}. \tag{2}$$

Le volume V du tétraèdre OABC a pour expression

$$V = \frac{abc}{6};$$

mais si l'on appelle s l'aire du triangle ABC, on a aussi

$$V = \frac{rs}{3};$$

d'où

$$\frac{abc}{6} = \frac{rs}{3} \quad \text{et} \quad r = \frac{abc}{2s}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4s^2}{a^2b^2c^2},$$

équation qu'il faut vérifier en donnant à a, b, c, s des valeurs entières.

L'identité

$$(4) \quad (x^2 + y^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2 + 4y^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

conduit à ce résultat.

En posant d'abord

$$\frac{1}{a} = x^2 + y^2 - z^2, \quad \frac{1}{b} = 2xz, \quad \frac{1}{c} = 2yz,$$

d'où

$$a = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad b = \frac{1}{2xz}, \quad c = \frac{1}{2yz},$$

les valeurs de a, b, c, s seront rationnelles. On rendra ces valeurs entières en multipliant les expressions de a, b, c par le produit $4xyz(x^2 + y^2 - z^2)$; on aura ainsi

$$a = 4xyz, \quad b = 2y(x^2 + y^2 - z^2), \quad c = 2x(x^2 + y^2 - z^2),$$

et au moyen de l'équation (3),

$$s = 2xy(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Quant aux aires des faces autres que celle opposée au sommet du trièdre trirectangle, elles seront évidemment mesurées par des nombres entiers.

Les nombres entiers x, y, z sont indéterminés; ils sont soumis à cette seule condition que le nombre $x^2 + y^2 - z^2$ soit différent de zéro. Par conséquent, le nombre des solutions est infini.

Note du Rédacteur. — M. Moret-Blanc a démontré, d'une manière peu différente, que la question admet une infinité de solutions.

M. Moreau a trouvé les mêmes formules

$$a = 4xyz, \quad b = 2y(x^2+y^2-z^2), \quad c = 2x(x^2+y^2-z^2),$$
$$s = 2xy(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Si, dans les expressions de b et de c, on pose $z = x - y$, il viendra

$$b = 4xy^2, \quad c = 4yx^2, \quad (c-b) = 4xy(x-y) = 4xyz = a,$$

d'où

$$c = a + b.$$

Donc, *si l'on prend sur deux arêtes d'un trièdre trirectangle des longueurs* OA, OB *mesurées par des nombres pairs quelconques, et sur la troisième arête une longueur* OC *égale à la somme des deux premières, les quatre faces du tétraèdre résultant* OABC *seront mesurées par des nombres entiers.*

Cette proposition m'a été communiquée par M. A. Transon. (G.)

Question 1138

(voir même tome, p. 208);

PAR M. DE RUFZ DE LAVISON,

Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin).

Dans un quadrilatère sphérique, deux côtés opposés sont fixes de directions et variables de grandeur, et les deux autres sont variables de directions, mais ils ont une grandeur égale à $\frac{\pi}{2}$. Trouver le lieu du point de rencontre des diagonales. (BOURGUET.)

Rapportons la figure à un triangle sphérique trirectangle dont deux des côtés soient les arcs de grand cercle bissecteurs des deux côtés fixes.

Les équations des arcs de grand cercle donnés seront

$$(1) \qquad ax + by = 0, \qquad ax - by = 0;$$

les équations des deux autres côtés seront

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Les coordonnées des sommets A, B, C, D seront donc définies par les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{x}{b} = -\frac{y}{a} = \frac{z}{\frac{1}{\gamma}(a\beta - b\alpha)},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{-z}{\frac{1}{\gamma}(a\beta + b\alpha)},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{-z}{\frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 + b\alpha_1)},$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{x}{b} = \frac{-y}{a} = \frac{z}{\frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 - b\alpha_1)}.$$

Le cosinus de la distance sphérique δ de deux points dont les coordonnées sphériques sont x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 est donné par la formule

$$\cos\delta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

dans cette formule, x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 représentent les sinus des arcs de grand cercle perpendiculaires aux trois côtés du triangle, abaissés des points considérés. Pour que cette distance soit égale à $\frac{\pi}{2}$ il faut que l'on ait

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Exprimons dans le cas actuel que AB et CD sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons les conditions

$$(2) \qquad \begin{cases} b^2 - a^2 - \dfrac{1}{\gamma^2}(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) = 0, \\ b^2 - a^2 - \dfrac{1}{\gamma_1^2}(a^2\beta_1^2 - b^2\alpha_1^2) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, les équations des diagonales AC et BD seront

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{AC})\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & -a & \frac{1}{\gamma}(a\beta - b\alpha) \\ b & a & -\frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 + b\alpha_1) \end{vmatrix} = 0,\\
&(\mathrm{BD})\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & -a & \frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 - b\alpha_1) \\ b & a & -\frac{1}{\gamma}(a\beta + b\alpha) \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du lieu il faut éliminer $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$, $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$ entre les équations (2) et (3); la question est donc en apparence indéterminée. Cette indétermination apparente s'explique facilement si l'on considère que le quadrilatère n'est assujetti qu'à trois conditions.

Je remarquerai d'abord que, dans ces relations, il n'entre comme indéterminées que les quantités

$$\frac{a\beta - b\alpha}{\gamma},\quad \frac{a\beta + b\alpha}{\gamma},\quad \frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{\gamma_1},\quad \frac{a\beta_1 + b\alpha_1}{\gamma_1},$$

et je poserai alors

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{\gamma_1} = p_1, \qquad \frac{a\beta_1 + b\alpha_1}{\gamma_1} = q_1,\\
&\frac{a\beta - b\alpha}{\gamma} = p, \qquad \frac{a\beta + b\alpha}{\gamma} = q.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent alors, en développant les dernières,

$$(5)\qquad pq = p_1 q_1 = b^2 - a^2,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} 2abz - p(ax - by) + q_1(ax + by) = 0, \\ 2abz - p_1(ax - by) + q(ax + by) = 0. \end{cases}$$

En retranchant membre à membre les équations (6), respectivement multipliées par q et q_1, il vient, eu égard aux relations (5),

$$2ab(q - q_1)z = 0, \qquad \text{ou} \qquad z = 0;$$

le lieu est donc le grand cercle dont le pôle est le point de concours des deux côtés donnés.

Note. — Une autre solution *analytique* a été donnée par M. Moret-Blanc.

La Géométrie élémentaire conduit au même résultat. — Supposez qu'à l'intersection M des diagonales AC, BD du quadrilatère sphérique ABCD on mène des tangentes aux arcs AC, BD, et du centre O de la sphère les rayons OA, OC, OB, OD qui, prolongés, rencontrent la première tangente en des points a, c, et la seconde en b, d. Le quadrilatère plan $abcd$ sera un trapèze dont les côtés parallèles seront ad, bc. En effet, l'angle aOb mesuré par l'arc AB étant droit, on a

$$ab^2 = Oa^2 + Ob^2 = Ma^2 + Mb^2 + 2OM^2;$$

mais le triangle rectiligne aMb donne

$$ab^2 = Ma^2 + Mb^2 - 2Ma.Mb.\cos aMb:$$

d'où

$$Ma.Mb.\cos aMb = -OM^2.$$

De même,

$$Mc.Md.\cos cMd = -OM^2.$$

Donc

$$MaMb = McMd, \quad \frac{Ma}{Md} = \frac{Mc}{Md};$$

et de là le parallélisme des droites ad, bc.

Il s'ensuit que le diamètre FG, de la sphère, suivant lequel se coupen les plans Oad, Obc des arcs de grand cercle AD, BC, est parallèle au plan $abcd$ tangent à la sphère au point M; donc l'angle FOM est droit, et l'arc de grand cercle FM qui mesure cet angle est un quadrant; par conséquent, le lieu du point M est l'arc de grand cercle décrit du point F comme pôle. (G.)

Question 1141

(voir même tome, p. 208);

PAR M. J. MARQUET,
Professeur au Mans.

On considère deux tangentes fixes AC, BC *aux points* A, B *d'une conique fixe.* C *est le point de rencontre des tangentes,* AB *est la corde des contacts.*

Par chacun des points A *et* B *on mène une sécante quelconque; elles rencontrent la conique en* μ *et* ν *respectivement. Les droites* $A\mu$, $A\nu$ *coupent la tangente* BC *en* M *et* N; *les droites* $B\mu$, $B\nu$ *coupent la tangente* AC *en* M′ *et* N′. *Ceci admis, on a les deux propriétés suivantes :*

1° *Le rapport anharmonique des quatre points* A, C, M′, N′ *est égal à celui des quatre points* C, B, M, N;

2° *Les quatre droites* AB, $\mu\nu$, MN′, M′N *passent par un même point.*

(L. PAINVIN.)

Soient $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ les équations des tangentes CB, CA et de la corde des contacts AB; l'équation de la conique pourra s'écrire

$$XY-\lambda Z^2=0,$$

et les droites AM, AN, BM′, BN′ seront représentées par

$$Y-\mu Z=0,\quad Y-\nu Z=0,\quad X-\mu' Z=0,\quad X-\nu' Z=0,$$

où μ, ν, μ', ν' désignent des paramètres variables, satisfaisant, toutefois, aux conditions

$$\mu\mu'=\nu\nu'=\lambda, \tag{1}$$

qui doivent être remplies pour que les droites AM, BM′, et AN, BN′ se coupent sur la conique.

Les quatre droites AC, AB, AM, AN, ou

$$Y=0,\ Z=0,\ Y-\mu Z=0,\ Y-\nu Z=0,$$

forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{\mu}{\nu}$;
Le faisceau formé des quatre droites

$$BA,\ BC,\ BM',\ BN',$$

ou

$$Z=0,\quad X=0,\quad Z-\frac{1}{\mu'}X=0,\quad Z-\frac{1}{\nu'}X=0,$$

a pour rapport anharmonique $\frac{1}{\mu'}:\frac{1}{\nu'}=\frac{\nu'}{\mu'}$.

Mais l'égalité (1) $\mu\mu'=\nu\nu'$ donne $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\nu'}{\mu'}$; donc ces deux faisceaux ont le même rapport anharmonique, et par conséquent :

1° *Le rapport anharmonique des quatre points* A, C, M', N' *est égal à celui des quatre points* C, B, M, N.

Les coordonnées des points

$$M,\ N,\ M',\ N',\ \mu,\ \nu,$$

vérifient, respectivement, les systèmes d'équations

$$(X=0,\quad Y-\mu Z=0),\quad (X=0,\quad Y-\nu Z=0),$$
$$(Y=0,\quad X-\mu' Z=0),\quad (Y=0,\quad X-\mu' Z=0),$$
$$(Y-\mu Z=0,\quad X-\mu' Z=0),$$
$$(Y-\nu Z=0,\quad X-\nu' Z=0),$$

qui représentent des systèmes de deux droites auxquelles ces points appartiennent. On en peut conclure, en ayant égard aux conditions $\mu\mu'=\nu\nu'=\lambda$, que les équations des quatre droites MN', M'N, $\mu\nu$, AB sont

$$Y+\frac{\mu\nu}{\lambda}X-\mu Z=0,$$

$$Y+\frac{\mu\nu}{\lambda}X-\nu Z=0,\quad Y+\frac{\mu\nu}{\lambda}X-(\mu+\nu)Z=0,\quad Z=0;$$

or, ces équations sont vérifiées par $Y + \frac{\mu\nu}{\lambda} X = 0$, et $Z = 0$; donc :

2° *Les quatre droites* AB, $\mu\nu$, MN′, M′N *passent par un même point.*

Note du Rédacteur. — M. Marquet a donné de cette question une seconde solution fondée sur les propriétés des faisceaux homographiques et sur l'hexagone de Pascal.

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Louis Goulin, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1147

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 304);

PAR M. LEZ.

On donne, sur un même plan, deux cercles fixes A, B *et le rayon* ρ *d'un troisième cercle* C *mobile et tangent extérieurement au cercle* A. Trouver l'enveloppe de *l'axe radical des circonférences* B *et* C.

(HARKEMA.)

En supposant l'origine des coordonnées au centre du cercle A, et l'axe des X passant par le centre de l'autre cercle B, ces cercles pourront être représentés, le premier par $x^2 + y^2 = R^2$, le second par $(x - d)^2 + y^2 = r^2$. Le cercle mobile C aura aussi pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2,$$

en remarquant que les coordonnées variables α, β de son centre sont liées par la relation

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = (R + \rho)^2.$$

Or on sait que l'axe radical de deux cercles est la droite passant par leurs points d'intersection; l'axe radical des cercles B et C est donc représenté par

$$(2) \qquad \rho^2 - r^2 = \alpha^2 - d^2 + \beta^2 - 2(\alpha - d)x - 2\beta y.$$

Pour trouver l'enveloppe de cette droite mobile, il suffit d'éliminer les variables (α, β) entre les équations (1), (2) et la condition $\varphi'_\alpha \times F'_\beta = \varphi'_\beta \times F'_\alpha$ traduite par $\alpha y = \beta x$.

Les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$\beta^2(x^2+y^2) - y^2(R^2+\rho^2+2R\rho) = 0,$$

$$\beta^2(x^2+y^2) - 2\beta(x^2+y^2)y - y^2(\rho^2+d^2-r^2-2dx) = 0;$$

ce qui donne, après l'élimination de β,

$$(3)\left\{\begin{array}{l} 4[(R+\rho)^2-d^2]x^2+4(R+\rho)^2y^2-4dx(R^2+r^2+2R\rho-d^2) \\ = (R^2+r^2+2R\rho-d^2)^2. \end{array}\right.$$

C'est une équation du second degré facile à discuter; elle représente une des sections coniques suivant la valeur du coefficient $(R+\rho)^2 - d^2$. En faisant $y = 0$, on a les points où la courbe coupe l'axe des X; on obtient ainsi

$$x_1 = \frac{R^2+r^2+2R\rho-d^2}{2(R+\rho-d)} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}{2(R+\rho+d)}.$$

Pour $d = 0$ l'équation (3) représente un cercle concentrique au cercle A.

Pour $d = R+\rho$, x_1 devient infini, $x_2 = -\dfrac{(r^2-\rho^2)}{4(R+\rho)}$. Le lieu est une parabole qui, rapportée à la tangente au sommet, a pour équation $y^2 = \dfrac{(r^2-\rho^2)x}{R+\rho}$; le centre du cercle A est donc le foyer de cette parabole.

Quand d n'est pas égal à $R+\rho$, la courbe a un centre sur l'axe des X, à une distance du centre du cercle A égale à $\dfrac{d(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}{2(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}$, et suivant qu'on a $d<R+\rho$, ou $d>R+\rho$, cette courbe est une ellipse ou une hyperbole, dont un des foyers est le centre du cercle A.

Nota. — La même question a été résolue par M. J. Derousseau, élève du Collége industriel et littéraire de Verviers, cours de M. Ledent; et par

M. Momy, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux, classe de M. de Lagrandval.

M. Momy a, de plus, étendu la question à l'espace en substituant des sphères aux cercles, et un plan à une droite.

L'enveloppe du plan radical des sphères B et C est une surface du second degré, représentée par une équation dont la discussion n'offre aucune difficulté.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1874).

Composition mathématique ($2^h 30^m$).

1° La capacité d'un cylindre à base circulaire est de 1 hectolitre, sa hauteur de 1 mètre, et l'on demande de calculer le rayon de sa base à 1 millimètre près, sans employer les logarithmes;

2° Résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 4,$$

et faire voir que les racines sont toujours réelles, quelques valeurs réelles que l'on donne à a et b;

3° Une ligne droite MN est perpendiculaire au point M à un plan P. D'un point A de ce plan on voit MN sous un angle α; par le point A on mène dans le plan P une droite faisant avec AM un angle ω, et l'on prend sur cette droite une longueur $AB = a$; du point B on voit MN sous un angle β. Cela posé, on demande de calculer la longueur de MN en fonction des données α, β, ω, a.

Indiquer le moyen de choisir entre les deux solutions qu'on trouve.

Calcul logarithmique (2 heures).

1° Dans le triangle ABC, on donne

$BC = 3428^m,58, \quad B = 108°15'27'', \quad C = 47°25'47'';$

on demande de calculer la hauteur abaissée du sommet A sur le côté BC.

2° Calculer tous les angles compris entre zéro et 180 degrés et satisfaisant à l'équation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \tfrac{2}{3}.$$

N.-B. Mettre tous les calculs sur la copie.

Épure ($2^h 30^m$).

Un cylindre circulaire droit a sa base appliquée sur le plan horizontal de projection. La circonférence de cette base touche la ligne de terre et son rayon R vaut 40 millimètres. La hauteur du cylindre est égale au rayon R. Un cône circulaire droit, de même base et de même hauteur que le cylindre, est superposé à ce dernier, de manière que la base du cône coïncide avec la base supérieure du cylindre. L'arête SA du cône, S étant le sommet, est parallèle au plan vertical de projection. Cela posé, on demande de construire : 1° les projections de l'ensemble des deux solides; 2° les projections et la vraie grandeur de la section faite par un plan perpendiculaire à l'arête SA en son milieu; 3° les parties du plan horizontal de projection cachées par l'ensemble des deux solides, l'œil étant placé sur la verticale du point A, au-dessus de ce point d'une quantité égale à $\frac{5}{3}$R.

SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. A. PICART.

Si une quantité u est liée à une autre quantité z, de telle sorte qu'à une valeur quelconque de z corresponde une ou plusieurs valeurs déterminées de u, cette quantité u est dite une fonction de z.

Lorsqu'à toute valeur réelle de z comprise entre z_0 et z_1 correspond une valeur réelle de u, cette quantité u est dite une fonction réelle de z entre les limites z_0 et z_1.

Si la variable z reçoit des valeurs imaginaires de la forme $x + y\sqrt{-1}$, la fonction u doit être regardée comme une quantité de la forme $X + Y\sqrt{-1}$, dans laquelle X et Y sont des fonctions réelles de x et y.

Dans ce cas, on représente géométriquement la variable z par le point dont les coordonnées, relativement à deux axes rectangulaires, sont x et y, et chacune des valeurs de la fonction u par le point correspondant, dont les coordonnées sont X et Y; et alors la variation continue de z, depuis une valeur initiale $z_0 = x_0 + y_0 i$ jusqu'à une valeur quelconque $z_1 = x_1 + y_1 i$, est figurée par une ligne partant du point (x_0, y_0), et aboutissant au point (x_1, y_1), de même que la marche correspondante de la fonction u est figurée par une ligne continue ou discontinue qui va du point (X_0, Y_0) au point (X_1, Y_1).

La fonction $u = f(z)$ est dite *continue* dans une région circonscrite du plan, lorsque, la variable z parcourant une ligne quelconque C située dans cette région, la valeur unique de u, ou chacune de ses valeurs multiples correspondantes, est représentée, dans ses variations successives, par une ligne continue.

Si l'on désigne par $f'(z)$ la limite vers laquelle tend, en chaque point de la courbe C, le rapport de l'accroissement de la fonction $f(z)$ à l'accroissement de la variable, lorsque ce dernier accroissement relatif à un déplacement sur la courbe tend vers zéro, l'accroissement total de la fonction, du point z_0 au point z sur la courbe C, ou $f(z)-f(z_0)$, est la limite vers laquelle tend la somme des valeurs que prend la quantité $f'(z)\, dz$ pour toutes les valeurs de z comprises entre z_0 et z_1 et ayant pour différences successives dz, lorsque toutes ces différences tendent vers zéro suivant une loi quelconque; en d'autres termes, si l'on suppose le contour que parcourt la variable z divisé par des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ en n arcs infiniment petits, la somme des produits des valeurs que prend $f'(z)$ aux points $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ multipliées respectivement par les accroissements successifs que subit la variable en passant de z_0 en z_1, de z_1 en z_2, et ainsi de suite, cette somme, lorsque la distance de deux points voisins tend vers zéro, a une limite indépendante de la loi suivant laquelle ces points successifs se rapprochent indéfiniment; et cette limite n'est autre que $f(z) - f(z_0)$, de telle sorte que la valeur de la fonction $f(z)$, en un point quelconque de la courbe C, peut être regardée comme donnée par l'équation

$$(1) \qquad f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\, dz.$$

Une fonction *continue* $f(z)$ est dite *monodrome* dans une portion du plan, lorsque, la valeur de la fonction étant fixée pour un point quelconque donné de cette région, la valeur qu'elle acquiert en un autre point quelconque z de cette même région, par sa variation continue relative au déplacement de la variable z sur une courbe C qui relie le point z_0 au point z, sans sortir de la région considérée, est indépendante de la forme de la ligne C parcourue par la variable, et de la loi de la marche progressive de la variable sur cette ligne; c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$ a une valeur indépendante de la forme du contour suivi par la variable z et de la loi suivant laquelle varie dz le long de ce contour.

Enfin la fonction $f(z)$ est dite *monogène* lorsque, en tout point du plan, sa dérivée $f'(z)$ a une valeur unique, c'est-à-dire que, pour un déplacement infiniment petit de la variable à partir d'un point z, le rapport de l'accroissement infiniment petit de la fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable a une valeur déterminée indépendante de la direction du déplacement.

Une fonction qui est à la fois *continue, monodrome* et *monogène*, dans une certaine portion du plan, est dite *synectique* dans cette région.

THÉORÈME I. — *La dérivée d'une fonction synectique dans une certaine étendue du plan est elle-même une fonction synectique dans cette étendue.*

Montrons d'abord que, si la dérivée d'une fonction est *synectique*, la fonction elle-même est synectique. En effet, elle est déjà évidemment *monogène* et *continue;* de plus, la variation que subit l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$ prise le long d'un contour, quand on passe de ce contour à un autre infiniment voisin, de mêmes extrémités, est nulle; car

$$\delta \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} [\delta f'(z)\,dz + f'(z)\,d\,\delta z],$$

ou, puisque $\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df'(z)}{dz}$,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f'(z)dz = \int_{z_0}^{z} [df'(z)\delta z + f'(z)d\delta z]$$
$$= \int_{z^0}^{z_1} d[f'(z)\delta z] = [f'(z)\delta z]_{z_0}^{z_1},$$

et cette dernière quantité est égale à zéro, puisque la variation δz est nulle aux deux limites de l'intégrale. La fonction $f(z)$, qui est égale à $f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(z)dz$, prend donc la même valeur au point z, quel que soit, dans la région considérée, le chemin suivi par la variable z pour aller de z_0 en z; en d'autres termes, cette fonction est *monodrome*.

Montrons, en second lieu, qu'une fonction ne peut être *synectique* sans que sa dérivée ne le soit elle-même. Il suffit de faire voir que l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)dz$ ne peut avoir pour chaque point z une valeur finie, déterminée et indépendante du chemin parcouru par la variable, qu'autant que la fonction $f'(z)$ est continue, *monodrome* et *monogène*. En effet, supposons que, le long d'un certain contour AB, $f'(z)$ devienne infini pour une valeur a de z, c'est-à-dire pour un point M de ce contour, la valeur de l'intégrale, prise le long du contour, est la limite vers laquelle tend la somme des intégrales

$$\int_{z_0}^{a+\varepsilon} f'(z)dz + \int_{a+\varepsilon'}^{z_1} f'(z)dz,$$

où $a+\varepsilon$ et $a+\varepsilon'$ désignent les valeurs de z qui correspondent à deux points M_1, M_2 situés l'un en deçà de M, l'autre au delà, lorsque ces points M_1 et M_2

se rapprochent indéfiniment du point M suivant une loi quelconque, c'est-à-dire lorsque les quantités ε et ε' tendent simultanément vers zéro, en conservant entre elles un rapport quelconque. Or chacune de ces intégrales peut se décomposer en deux, la première en

$$\int_{z_0}^{h} f'(z)\,dz + \int_{h}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz,$$

la seconde en

$$\int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz + \int_{k}^{z_1} f'(z)\,dz,$$

h et k désignant les valeurs qui correspondent respectivement à deux points fixes, situés l'un en deçà de M_1 et l'autre au delà de M_2, dans le voisinage du point M.

Les deux sommes $\int_{z_0}^{h} f'(z)\,dz$, $\int_{k}^{z_1} f'(z)\,dz$ sont finies et déterminées ; quant aux deux autres, savoir $\int_{h}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz$ et $\int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz$, comme les points C et D sont très-voisins respectivement de M_1 et M_2, on peut les évaluer approximativement en substituant à $f'(z)$, dans les limites étroites de l'intégration, l'expression $\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, dans laquelle $\varphi(z)$ désigne une fonction qui ne devient pas infinie pour $z=a$ et m un exposant positif.

Supposons d'abord $m=1$; la première de ces intégrales est alors sensiblement égale à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{\varepsilon}{h-a}$, la seconde à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{k-a}{\varepsilon'}$, et leur somme à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{k-a}{h-a}+\varphi(a)\,l\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$. Comme le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ peut tendre vers une limite quelconque, on voit que, dans ce cas, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$

est indéterminée. Si nous supposons m différent de l'unité, la somme des deux intégrales singulières

$$\int_h^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz, \quad \int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz$$

est alors

$$\frac{\varphi(a)}{1-m}\left[(k-a)^{1-m}-(h-a)^{1-m}\right]+\frac{\varphi(a)}{1-m}\left(\varepsilon^{1-m}-\varepsilon'^{1-m}\right);$$

et l'on voit que, dans le cas où m est plus grand que 1, cette somme est infinie, et qu'elle est nulle lorsque m est plus petit que 1. Sauf donc ce dernier cas, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$ est indéterminée ou infinie; mais, quand m est une fraction plus petite que l'unité, telle que $\frac{p}{q}$, il y a q valeurs de $f'(z)$ qui deviennent en même temps infinies pour $z=a$; et il est évident que, lorsque la fonction $f'(z)$ a une détermination multiple et qu'en un point M du contour deux ou plusieurs valeurs de cette fonction deviennent égales, l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$ prend une valeur différente, suivant qu'à partir du point M on prend, pour achever l'intégration, l'une ou l'autre des valeurs de $f'(z)$ qui se séparent de plus en plus après avoir été égales. Nous pouvons donc enfin conclure que, si la fonction $f'(z)$ devient infinie, la fonction $f(z)$ ne peut être à la fois finie et bien déterminée.

Supposons maintenant qu'en un point M du contour $f'(z)$ saute brusquement d'une valeur à une autre. Dans ce cas, la fonction $f'(z)$ prend une valeur différente, suivant que la variable z aboutit à ce point dans une direction ou dans une autre. Or, lorsque la fonction $f'(z)$ ne prend pas la même valeur en un point, quel que soit le chemin suivi pour arriver à ce point, il est de toute évidence qu'on peut faire varier la valeur de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, en modifiant la ligne parcourue par la variable z, ce qui revient à dire qu'une fonction synectique a nécessairement une dérivée monodrome.

Enfin, pour que la fonction $f(z)$ soit monodrome, la dérivée $f'(z)$ doit être *monogène*; car, si elle n'était que continue et monodrome, sans être *monogène*, en calculant la variation que subit l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, quand on substitue au contour suivi par la variable z un contour infiniment voisin, on reconnaîtrait que cette variation n'est pas nulle, qu'elle est un infiniment petit du même ordre que la différence des valeurs que prend la variable z pour deux points infiniment voisins des deux contours. En effet, en faisant correspondre à un point (z) du premier contour un point $(z + \delta z)$ du second, on a

$$\delta \int_{z^0}^{z_1} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} \delta[f'(z)\,dz]$$
$$= \int_{z_0}^{z_1} [\delta f'(z)\,dz + f'(z)\,d\delta z].$$

Si la fonction était monogène, on aurait

$$\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df'(z)}{dz}, \quad \text{ou} \quad \delta f'(z)\,dz = df'(z)\,\delta z,$$

et alors la variation de l'intégrale serait

$$\int_{z_0}^{z_1} [df'(z)\,\delta z + f'(z)\,d\delta z] = \int_{z_0}^{z_1} d\,[f'(z)\,\delta z] = [f'(z)\,\delta z]_{z_0}^{z_1}.$$

Comme δz est nulle aux deux limites, on voit que la variation serait nulle; mais, si la fonction $f'(z)$ n'est pas *monogène*, on a, k étant une quantité finie,

$$\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df(z)}{dz} + k,$$

d'où

$$\delta f'(z)\,dz = df'(z)\,\delta z + k\,dz\,\delta z;$$

par suite,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} [df'(z)\,\delta z + f'(z)\,d\delta z] + \int_{z_0}^{z_1} k\,dz\,\delta z.$$

La première partie de cette variation est nulle, l'autre a généralement une valeur infiniment petite de l'ordre de δz; car on peut supposer que δz est égal à $\alpha\varphi(z)$, la fonction $\varphi(z)$ s'annulant pour $z = z_0$ et $z = z_1$, et α étant une quantité constante infiniment petite; alors $\int_{z_0}^{z_1} k\,dz\,\delta z$ devient $\alpha \int_{z_0}^{z_1} k\varphi(z)\,dz$, ce qui montre que la valeur de cette intégrale est de l'ordre de α ou de δz.

La variation de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, pour un déplacement infiniment petit du contour auquel elle correspond, étant infiniment petite du même ordre que ce déplacement, on voit que, pour un déplacement fini de ce contour, la variation sera finie.

Donc une fonction $f(z)$ ne peut être synectique sans que sa dérivée $f'(z)$ ne le soit en même temps.

Mais quels sont les caractères auxquels on reconnaîtra qu'une fonction $f(z)$, définie analytiquement, est synectique dans une certaine région du plan ? Il faudra :

1° Qu'elle ait en chaque point une dérivée unique, indépendante de la direction dans laquelle se déplace infiniment peu la variable z à partir de ce point; on sait que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx};$$

2° Qu'elle ne soit discontinue pour aucun point de cette région, c'est-à-dire ou qu'elle ne devienne pas infinie, ou que, par la variation continue de z, elle ne saute pas brusquement d'une valeur à une autre qui en diffère d'une quantité finie;

3° Qu'elle prenne en chaque point une valeur indépendante du chemin qu'a suivi la variable pour arriver à ce point, ce qui a lieu si la fonction a une détermination unique, ou lorsque, cette fonction ayant une détermination multiple, les diverses valeurs qu'elle prend pour chaque valeur de z restent toutes distinctes et inégales, et ce qui n'aura pas lieu si deux ou plusieurs de ces valeurs deviennent égales en de certains points.

Lorsqu'une fonction $f(z)$ remplit toutes ces conditions, ses dérivées successives, d'après le théorème précédent, les remplissent en même temps; en d'autres termes, lorsqu'une fonction est synectique dans une certaine portion du plan, ses dérivées successives sont aussi des fonctions synectiques dans cette même portion de plan.

Théorème II. — *Si $f(z)$ est une fonction synectique dans l'intérieur du cercle décrit du point (z_0) comme centre avec* R *pour rayon, on a*

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta = \frac{2\pi r^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(z_0),$$

r étant une constante réelle positive plus petite que R.

En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta = -\left[\frac{1}{ni} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}\right]_0^{2\pi}$$
$$+ \frac{r}{n}\int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-1)\theta i} d\theta;$$

mais le terme $\frac{1}{ni} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}$ prend la même valeur pour $\theta = 0$ et pour $\theta = 2\pi$; donc

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta = \frac{r}{n} \int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-1)\theta i} d\theta.$$

de même

$$\int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-1)\theta i} d\theta$$
$$= \frac{r}{n-1} \int_0^{2\pi} f''(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-2)\theta i} d\theta,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} = \frac{r^n}{1.2\ldots n} \int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i}) d\theta.$$

Mais l'intégrale $\int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i})\, d\theta$ est indépendante de r; car, si l'on passe du cercle de rayon r au cercle de rayon $r + \delta r$, en faisant correspondre deux à deux les points de ces deux cercles qui sont donnés par la même valeur de θ, on trouve, pour la variation de cette intégrale,

$$\frac{\delta r}{r} \int_0^{2\pi} f^{(n+1)}(z_0 + re^{\theta i})\, ire^{\theta i} d\theta \quad \text{ou} \quad \frac{\delta r}{r} \left[f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i}) \right]_0^{2\pi}.$$

Or, la fonction $f(z)$ étant synectique dans le cercle de rayon R, sa dérivée $n^{ième}$ est aussi synectique dans l'étendue de ce cercle, c'est-à-dire qu'elle reprend la même valeur lorsque la variable z, partant d'un point, revient à ce point après avoir parcouru un contour quelconque dans l'intérieur du cercle; donc la variation de l'intégrale

$\int_0^{2\pi} f^n(z_0 + re^{\theta i})\,d\theta$ est nulle. Il en résulte qu'elle conserve la même valeur pour deux valeurs quelconques de r plus petites que R, et, par suite, qu'elle est égale à $\int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0)\,d\theta$ ou $2\pi f^n(z_0)$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}d\theta = \frac{2\pi r^n}{1.2\ldots n} f^n(z_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — On déduit de là que le module de $f^{(n)}(z_0)$ est plus petit que $1.2\ldots n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}$, M étant le maximum du module de $f(z)$ sur la circonférence du cercle de centre (z_0) et de rayon r.

Car, en vertu du théorème précédent,

$$f^n(z_0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}d\theta,$$

et, par suite, le module de $f^n(z_0)$ est plus petit que $\frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}\,d\theta$, ou $1.2..n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}$.

Théorème III. — *Si $f(z)$ est une fonction synectique dans l'intérieur et sur la circonférence du cercle* C *de centre (z_0) et de rayon* R, *la série*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(z_0) + f'(z_0)\frac{h}{1} + f''(z_0)\frac{h^2}{1.2} + f'''(z_0)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ & \qquad + f^{(n)}(z_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots \end{aligned}\right.$$

est convergente pour toutes les valeurs de h dont le module r est plus petit que R.

En effet, d'après le corollaire qui précède, le module du terme général $f^{(n)}(z_0)\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}$ est plus petit que $1.2\ldots n\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n}\dfrac{r^n}{1.2\ldots n}$ ou $\mathrm{M}\left(\dfrac{r}{\mathrm{R}}\right)^n$, M étant le module maximum de la fonction $f(z)$ sur la circonférence de rayon R. Or la série dont le terme général est $\mathrm{M}\left(\dfrac{r}{\mathrm{R}}\right)^n$ est une progression géométrique décroissante; donc la série formée par les modules des termes de la série proposée est convergente, et, par suite, cette série elle-même est convergente.

Corollaire. — La série

$$(2)\quad f(z)+f'(z)\frac{h}{1}+f''(z)\frac{h^2}{1.2}+\ldots+f^{(n)}(z)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intérieur du cercle C, et pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à $\mathrm{R}-\rho$, ρ désignant le module de $z-z_0$, ou la distance du point (z) au point (z_0), ce qui revient à dire que la série

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &f(z)+f'(z)\frac{a-z}{1}+f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}+f'''(z)\frac{(a-z)^3}{1.2.3}+\ldots\\ &\qquad\qquad+f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle a est une constante représentée par un point intérieur au cercle C, reste convergente lorsque le point (z) se déplace dans l'intérieur de ce cercle, de manière que sa distance δ au point (a) soit moindre que sa plus courte distance d à la circonférence, c'est-à-dire dans l'intérieur d'une ellipse E ayant pour foyers (a) et (z_0), et pour axe focal R.

Cela posé, considérons la fonction de z définie par cette dernière série. Les dérivées de ses différents termes forment la série

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&f'(z)+\left[f''(z)\frac{(a-z)}{1}-f'(z)\right]\\
&\quad+\left[f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}-f''(z)(a-z)\right]+\ldots\\
&\quad+\left[f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}-f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right]+\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

qui est convergente; car le module du terme général est, d'après le corollaire du théorème II, plus petit que

$$
\frac{M}{d}\left(\frac{\delta}{d}\right)^n+\frac{M}{d}\left(\frac{\delta}{d}\right)^{n-1}\quad\text{ou}\quad\left(\frac{M\delta}{d^2}+\frac{M}{d}\right)\left(\frac{\delta}{d}\right)^{n-1},
$$

M désignant le module maximum de la fonction $f(z)$ sur la circonférence de centre (z) et de rayon d. Donc la fonction de z, représentée par la série (4), est la dérivée de la fonction de z représentée par la série (3).

Mais, comme, en substituant leurs modules aux deux termes partiels qui constituent le terme général de la série (4), on obtient encore une série convergente, on en déduit qu'on peut intervertir l'ordre de tous ces termes partiels sans changer la somme de la série. Or, en les écrivant de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&[f'(z)-f'(z)]+[f''(z)(a-z)-f''(z)(a-z)]\\
&\qquad+\left[f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}-f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}\right]+\ldots\\
&\qquad+\left[f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}-f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}\right]+\ldots,
\end{aligned}
$$

on voit que la somme de la série est nulle. Donc la dérivée de la fonction de z, définie par la série (3), est égale à zéro pour toute valeur de z comprise dans l'ellipse E; cette fonction est donc indépendante de z, elle ne dépend que de la constante a. Désignons-la par $\varphi(a)$;

nous aurons

$$\varphi(a) = f(z) + f'(z)\frac{a-z}{1} + f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Faisons $z = a$; le second membre, qui est une série convergente, se réduit à $f(a)$; donc $\varphi(a) = f(a)$, et cela pour toutes les valeurs de a comprises dans le cercle C. Donc la fonction φ, dans l'intérieur de ce cercle, n'est autre que la fonction f, et l'on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f(a) &= f(z) + f'(z)\frac{(a-z)}{1} + f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2} + \ldots \\ &\quad + f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant $a - z$ par h et a par $z + h$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} f(z+h) &= f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots \\ &\quad + f^{(n)}(z)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette formule remarquable est donc ainsi démontrée lorsque la fonction $f(z)$ est synectique dans l'intérieur du cercle de centre (z) et de rayon R, et que le module de h est inférieur à R.

C'est là le développement connu sous le nom de *série de Taylor*.

On en déduit la série de Maclaurin, en supposant $z = 0$, ce qui donne

$$f(h) = f(0) + f'(0)\frac{h}{1} + f''(0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ f^{(n)}(0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Ce développement indéfini d'une fonction $f(h)$ suivant les puissances ascendantes entières et positives de la variable h a donc lieu lorsque la fonction $f(h)$ est synectique autour du point (o), et que la variable h reste comprise dans l'intérieur du cercle qui a pour centre ce point, et au delà duquel la fonction cesse d'être synectique.

SUR LES RAYONS DE COURBURE DES COURBES PLANES;

Par M. A. LAISANT.

1. L'objet que nous nous proposons dans la présente Note est de déterminer une construction *graphique*, permettant de construire sur un plan le rayon de courbure d'une courbe plane. Cette courbe étant bien définie, soit par son équation, soit par une génération géométrique ou mécanique, soit de toute autre manière, nous supposons qu'elle est tracée d'une façon tout à fait rigoureuse, en sorte que la tangente en chaque point peut être conduite exactement.

2. On pourrait, dans cette hypothèse, obtenir les normales à la courbe dans le voisinage d'un point, et la développée serait déterminée par l'enveloppe des droites tracées de cette manière. Mais il est bien évident qu'ainsi le centre de courbure serait, en réalité, déterminé par l'intersection de droites très-rapprochées et se coupant sous un très-petit angle; c'est un procédé vicieux au point de vue graphique.

Nous essayerons de substituer à cette construction des moyens plus satisfaisants, en employant à cet effet une courbe déduite de la courbe donnée et que l'on pourra tracer en toute rigueur; elle servira ensuite à obtenir la solution désirée, à peu près à la manière des courbes d'erreurs si fréquemment employées dans la pratique.

3. Soient

C une courbe plane dont l'équation est $f(X, Y) = 0$ en coordonnées rectangulaires;

M un point de cette courbe ayant pour coordonnées x et y;

$p = \frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe C;

ρ le rayon de courbure en M.

Supposons que, de chaque point $M(x, y)$, on déduise un point correspondant M_1, au moyen d'une construction géométrique *dans laquelle figure la tangente au point* M; et appelons C_1 la courbe formée par tous les points M_1.

Les coordonnées x_1, y_1 dépendront à la fois de x, y et p, c'est-à-dire qu'on aura

$$x_1 = F_1(x, y, p), \quad y_1 = f_1(x, y, p).$$

On déduira de là, par différentiation,

$$dx_1 = \frac{dF_1}{dx}\,dx + \frac{dF_1}{dy}\,dy + \frac{dF_1}{dp}\,dp,$$

$$dy_1 = \frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dp}\,dp,$$

et, si nous appelons p_1 le coefficient angulaire $\frac{dy_1}{dx_1}$

de la tangente en M_1 à la courbe C_1,

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dp}dp}{\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dp}dp}$$

$$= \frac{\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}p + \frac{df_1}{dp}\frac{dp}{dx}}{\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}p + \frac{dF_1}{dp}\frac{dp}{dx}}.$$

Les fonctions F_1 et f_1 dépendant de x, y et p, il s'ensuit què p_1 dépendra de x, y, p et $\frac{dp}{dx}$, c'est-à-dire que l'on aura

$$(1) \qquad p_1 = \varphi\left(x,\ y,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right).$$

Or le rayon de courbure ρ est fourni par la formule connue

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}},$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression (1), celle-ci prendra la forme

$$p_1 = \Phi(x,\ y,\ p,\ \rho),$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à ρ, on aura

$$(3) \qquad \rho = \Psi(x,\ y,\ p,\ p_1).$$

Le rayon de courbure cherché dépendra donc seulement du point M, et de la direction des tangentes en M et M_1 aux deux courbes C et C_1. Ces divers éléments graphiques étant connus, il sera possible généralement de déterminer le rayon de courbure.

4. La méthode peut exceptionnellement se trouver en défaut si, par suite de réductions de calcul, l'expression $\frac{dp}{dx}$ se trouve éliminée de l'équation (1). C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque la courbe C_1 est parallèle à la courbe C, cas sur lequel nous reviendrons vers la fin de cette étude.

Mais il n'y a que certains procédés particuliers de construction qui puissent conduire à un semblable résultat. Aussi peut-on très-bien considérer la solution indiquée comme entièrement générale.

5. Quoi qu'il en soit, la valeur pratique de cette méthode doit être considérée comme d'autant plus grande que les constructions à effectuer seront plus simples, c'est-à-dire que la formule (3) sera plus simple elle-même. Ce résultat dépend essentiellement du procédé de construction ou de *transformation*, par lequel la courbe C_1 se déduit de la courbe C. Nous allons successivement en passer en revue quelques-uns, donnant lieu à des formules et à des constructions assez simples, ou se prêtant à des remarques intéressantes.

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons uniformément par :

MP l'ordonnée y du point M limitée à l'axe des x;
MQ l'abscisse x du même point limitée à l'axe des y;
MT la tangente en M à la courbe C, *limitée à l'axe des x*;
MN la normale en M à la courbe C, *limitée à l'axe des x*.

M_1P_1, M_1Q_1, M_1T_1, M_1N_1 seront les lignes analogues relatives au point M_1 et à la courbe C_1.

Il est bon de remarquer que toutes les constructions indiquées en partant de l'axe des x pourront se faire en partant d'une droite quelconque; car rien n'oblige à prendre *a priori*, pour axe des x, une droite sur le plan plutôt qu'une autre.

6. *Première transformation.* — On mène par le point T une parallèle à Oy jusqu'à la rencontre de MQ. Cette intersection donne le point M_1.

Les coordonnées x_1, y_1 sont alors fournies par les formules

$$x_1 = x - \frac{y}{p}, \quad y_1 = y;$$

on en déduit

$$p_1 = \frac{p^3}{y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{\rho}{y}\,\frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et, si l'on appelle α l'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x, d'où $p = \tang\alpha$, il vient

$$p_1 = \frac{\rho\sin^3\alpha}{y} = \frac{\rho\sin^3\alpha}{y_1},$$

puisque

$$y = y_1;$$

de là

$$\rho = \frac{p_1 y_1}{\sin^3\alpha}.$$

$p_1 y_1$ étant la sous-normale en M_1, il en résulte que *le rayon de courbure cherché est égal à la sous-normale en* M_1, *divisée par le cube du sinus de l'inclinaison de la tangente en* M *sur l'axe des* x.

Cette propriété permet d'obtenir le centre de courbure par une construction géométrique fort simple, en ayant égard aux signes.

7. *Deuxième transformation.* — On obtient le point M_1 en construisant le point symétrique de T par rapport à MQ.

Les formules sont

$$x_1 = x - \frac{y}{p}, \quad y_1 = 2y,$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p^3}{y\frac{dp}{dx}} = \frac{2\rho}{y}\,\frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\rho}{y}\sin^3\alpha = \frac{4\rho}{y_1}\sin^3\alpha,$$

$$\rho = \frac{1}{4}\,\frac{p_1 y_1}{\sin^3\alpha}.$$

$p_1 y_1$ étant la sous-normale en M_1, on a un énoncé identique au précédent, au facteur $\frac{1}{4}$ près, et une construction géométrique pareille.

Comme procédé graphique, cette seconde construction sera préférable à la première, lorsqu'on aura suffisamment de place pour l'exécuter.

8. *Troisième transformation.* — On prolonge la droite TM au delà du point M, d'une longueur égale à elle-même $MM_1 = TM$.

On a

$$x_1 = x + \frac{y}{p}, \quad y_1 = 2y;$$

on tire de là

$$p_1 = \frac{2p^3}{2p^2 - y\frac{dp}{dx}} = \frac{2}{\frac{2}{p} - \frac{y}{p^3}\frac{dp}{dx}} = \frac{2}{\frac{2}{p} - \frac{y}{\rho}\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}},$$

$$\rho = \frac{y\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}}{2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)}.$$

En posant, comme ci-dessus, $p = \tang\alpha$ et, de plus, $p_1 = \tang\alpha_1$, on obtient

$$2\rho \sin^2\alpha = \frac{y \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Ce résultat donne lieu à la construction assez simple que voici. Soient

A le point de rencontre de MP et de $M_1 Q_1$;

AB une parallèle à $M_1 N_1$ rencontrant MN en B;

BD une parallèle à MT, menée jusqu'à la rencontre de MQ;

DE une parallèle à OY, menée jusqu'à la rencontre de MN.

Le milieu ω de ME sera le centre de courbure cherché.

9. *Quatrième transformation.* — On mène par N une parallèle à OY, jusqu'à la rencontre de MQ. Le point M_1 est déterminé par l'intersection de ces deux droites.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{p}{1 + p^2 + y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p}{1 + p^2 + y\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}}$$

$$= \frac{p}{(1+p^2)\left(1 + \dfrac{y}{\rho}\sqrt{1+p^2}\right)} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}},$$

$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tang\alpha_1} - 1},$$

en conservant toujours les mêmes relations que plus haut.

Cette formule revient à

$$\rho = \frac{\text{MN}.\text{TN}}{\text{T}_1\text{T}};$$

elle permet, par conséquent, d'obtenir le rayon de courbure par une construction géométrique très-facile.

10. *Cinquième transformation.* — Le point M_1 est symétrique de N par rapport à MQ.

Les formules sont

$$y_1 = 2y, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p}{1 + p^2 + y\dfrac{dp}{dx}}$$

$$= \frac{2p}{(1+p^2)\left(1 + \dfrac{y\sqrt{1+p^2}}{\rho}\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}},$$

$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha_1} - 1}.$$

Cela donne la même formule que ci-dessus

$$\rho = \frac{\text{MN}.\text{TN}}{\text{T}_1\text{T}},$$

et, par suite, la même construction géométrique.

11. *Sixième transformation.* — On prolonge la droite NM au delà du point M, d'une longueur égale à elle-même $MM_1 = NM$.

Les formules sont

$$y_1 = 2y, \quad x_1 = x - py;$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p}{1 - p^2 - y\frac{dp}{dx}} = \frac{2p}{1 - p^2 - \frac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \frac{y}{\rho \cos\alpha}},$$

$$\rho = \frac{\frac{y}{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha_1}}.$$

Cela donne encore

$$\rho = \frac{\mathrm{MN.TN}}{\mathrm{TT_1}}.$$

12. *Septième transformation.* — Par l'origine O, on mène OM_1, égale et parallèle à TM, et dirigée dans le même sens.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = \frac{y}{p};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p^3}{p^2 - y\frac{dp}{dx}} = \frac{p^3}{p^2 - \frac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{y}{\rho}},$$

$$\rho = \frac{y \sin\alpha_1}{\sin^2\alpha \sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Cela donne

$$\rho = \frac{\mathrm{MT}^3}{\mathrm{MP.OT_1}}$$

et conduit, par suite, à une construction géométrique élémentaire.

13. *Huitième transformation.* — Par l' origine O, on mène OM_1, égale et parallèle à NM, et dirigée dans le même sens.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = -py;$$

d'où

$$p_1 = -\frac{p}{p^2 + y\dfrac{dp}{dx}} = -\frac{p}{p^2 + \dfrac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\tang\alpha}{\tang^2\alpha + \dfrac{y}{\rho\cos^3\alpha}},$$

$$\rho = -\frac{y\sin\alpha_1}{\sin\alpha\cos(\alpha - \alpha_1)}.$$

Si MN_2 est parallèle à M_1N_1, N_2 étant sur l'axe des x, et si K est la projection de N_2 sur MN, on trouve

$$\rho = \frac{MP.TN}{MK}.$$

Le centre de courbure s'obtient encore ici par une quatrième proportionnelle.

14. *Neuvième transformation.* — Au point T, on élève $TM_1 = TM$, perpendiculaire sur l'axe des x.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}, \quad x_1 = x - \frac{y}{p};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p^2(1+p^2) - y\dfrac{dp}{dx}}{y\sqrt{1+p^2}\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p^2\rho - y\sqrt{1+p^2}}{y(1+p^2)} = \frac{\rho\sin^2\alpha - y\cos\alpha}{y},$$

$$\rho = y\frac{\tang\alpha_1 + \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Cela donne

$$\rho = \frac{MT^2.T_1N}{MN.T_1T};$$

d'où résulte une construction élémentaire pour le rayon de courbure cherché.

15. *Dixième transformation.* — Au point N, on élève $NM_1 = NM$, perpendiculaire sur l'axe des x.

Les formules sont

$$y_1 = y\sqrt{1+p^2}, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La valeur de $\frac{dp}{dx}$ et, par suite, celle de ρ s'éliminant ici, on voit que cette construction ne saurait servir à la détermination du rayon de courbure; mais elle conduit à un théorème facile à énoncer. Si, en effet, nous faisons le produit des valeurs de y_1 et de p_1, nous avons

$$y_1 p_1 = yp.$$

Donc *les deux courbes* C *et* C_1 *ont leurs sous-normales égales en* M *et* M_1, c'est-à-dire que $PN_1 = 2PN$.

16. *Onzième transformation.* — La courbe C_1 est la podaire de C, l'origine O étant prise pour pôle.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{y - px}{p^2+1}, \quad x_1 = \frac{p(px-y)}{p^2+1}.$$

On en tire

$$p_1 = \frac{p^2x - 2py - x}{2px + p^2y - y}.$$

La valeur de p_1 est encore indépendante de $\frac{dp}{dx}$, et, par conséquent, on ne peut arriver ainsi à déterminer le rayon de courbure; mais on peut donner à p_1 la forme suivante :

$$p_1 = \frac{x_1 - \frac{x}{2}}{\frac{y}{2} - y_1}; \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{p_1} = \frac{y_1 - \frac{y}{2}}{x_1 - \frac{x}{2}},$$

ce qui nous donne ce théorème connu : *La normale à la podaire passe par le milieu du rayon vecteur* OM.

17. *Douzième transformation.* — On obtient M_1 en abaissant du point O une perpendiculaire sur MN jusqu'à la rencontre de cette droite. La courbe C_1 est, par conséquent, la podaire de la développée de C, le point O étant pris pour pôle.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{p(py+x)}{p^2+1}, \quad x_1 = \frac{py+x}{p^2+1}.$$

On en pourrait conclure la valeur du rayon de courbure par un calcul pareil à celui que nous avons effectué jusqu'à présent; mais, si nous appliquons le théorème que nous venons de rappeler, nous voyons que, ω étant le centre de courbure cherché, M_1N_1 passera par le milieu de $O\omega$. De là cette construction géométrique très-simple: mener par le point O une droite qui forme, avec OM_1 et M_1N_1, un triangle isoscèle en O et M_1; le point où cette droite rencontrera MN sera le centre de courbure cherché.

18. *Treizième transformation.* — Sur la tangente TM, on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM_1 = a$.

Les formules sont

$$y_1 = y + a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x + a\frac{1}{\sqrt{1+p^2}};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + a\dfrac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - ap\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p+\dfrac{a}{\rho}}{1-a\dfrac{p}{\rho}},$$

$$\rho = a\frac{1+pp_1}{p_1-p} = a\cot(\alpha_1-\alpha).$$

Ceci nous montre que *la normale en* M_1 *rencontre la normale* MN *à la courbe* C *au centre de courbure cherché*. Ce théorème est de M. Nicolaïdès; il l'a énoncé comme question dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1866, p. 383.

19. *Quatorzième transformation.* — Sur la normale MN, on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM_1 = a$.

Nous aurons pour formules

$$y_1 = y + a\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x - a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en tire

$$p_1 = p;$$

c'est le cas que nous avons indiqué plus haut, où les deux courbes sont parallèles. Là encore il est impossible de déterminer le rayon de courbure, et l'on retrouve cette propriété bien connue, que les tangentes en deux points correspondants sont parallèles.

20. *Quinzième transformation.* — Sur la tangente TM, on porte une longueur constante $TM_1 = a$, à partir du point T.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x - \frac{y}{p} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en déduit

$$p_1 = \frac{\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{y}{p^2} - \dfrac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Ce mode de transformation ne permet donc pas non plus de déterminer le rayon de courbure. Cette valeur de p_1 peut prendre la forme

$$\frac{py_1}{y(1+p^2)-p^2y_1},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$y\left(p+\frac{1}{p}\right)=y_1\left(p+\frac{1}{p_1}\right).$$

Si l'on mène M_1N_2 parallèle à MN jusqu'à la rencontre de l'axe des x, il viendra donc

$$T_1N_2 = TN.$$

21. *Seizième transformation.* — Sur la normale NM, on porte, à partir du point N, une longueur constante $NM_1 = a$.

Les formules sont

$$y_1=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},\quad x_1=x+py-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en tire

$$p_1=-\frac{\dfrac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{dp}{dx}}{1+p^2+\left[y-\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\dfrac{dp}{dx}}$$

$$=-\frac{ap}{\rho(1+p^2)+y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}-a},$$

$$\rho=a\frac{p_1-p}{p_1(1+p^2)}-y\sqrt{1+p^2}=a\cos\alpha\frac{\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin\alpha_1}-\frac{y}{\cos\alpha}.$$

Cela donne lieu à la construction suivante : construire l'intersection K de M_1N_1 avec une parallèle NK à l'axe des y, menée par le point N, et projeter le point K sur MN_1 en ω. Le point ω sera le centre de courbure cherché.

22. Les divers exemples que nous avons donnés montrent assez combien la méthode graphique étudiée est générale, et comment elle se prête à des variétés nombreuses. Chaque fois qu'elle se trouve en défaut, on arrive à des théorèmes exprimant une relation entre la tangente à la transformée C_1 et la tangente à la courbe donnée C.

En appliquant à des courbes connues les diverses transformations étudiées, on obtiendrait un grand nombre de résultats particuliers. On pourrait également imaginer bien d'autres modes de transformation ; mais il nous suffit ici d'avoir indiqué quelques-uns des procédés généraux.

PROBLÈMES SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. BOUGAÏEFF, de Moscou.

1. Démontrer que le nombre

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta(\sqrt[3]{n})$$

est divisible par 3,

$\theta(n)$ désignant combien il y a de nombres premiers non supérieurs à n;

$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right)$ la somme prise pour tous les nombres premiers a;

$S\theta\left(\frac{n}{ab}\right)$ la somme étendue à tous les produits ab des nombres premiers différents entre eux.

Exemple : $n = 30$,

$$S\theta\left(\frac{30}{a^2}\right) = \theta\left(\frac{30}{2^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{3^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{5^2}\right) = 4 + 2 = 6,$$

$$S\theta\left(\frac{30}{ab}\right) = \theta\left(\frac{30}{2.3}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.5}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.7}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.11}\right)$$

$$+ \theta\left(\frac{30}{2.13}\right) + \theta\left(\frac{30}{3.5}\right) + \theta\left(\frac{30}{3.7}\right)$$

$$= 3 + 2 + 1 + 1 = 7,$$

$$\theta\left(\sqrt[3]{30}\right) = 2,$$

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta\left(\sqrt{n}\right) = 6 - 7 + 2.2 = 3.$$

2. Démontrer que, pour $n > 1$, on a

$$6\varphi_2(n) = 2\varphi(n)n^2 + (-1)^{\xi(n)}\xi_1(n)\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ désignant combien il y a d'entiers premiers à n et inférieurs à n;

$\varphi_2(n)$ la somme des carrés de ces nombres;

$\xi(n)$ le nombre de nombres premiers différents qui sont les diviseurs de n;

$\xi_1(n)$ le produit de ces nombres premiers.

Ainsi, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$,

$$\xi_1(n) = abc, \quad \xi(n) = 3.$$

Exemple : $n = 6$, $\varphi_2(6) = 1^2 + 5^2 = 26$, $\varphi(6) = 2$,

$$\xi(6) = 2, \quad \xi_1(6) = 6,$$
$$6(1^2 + 5^2) = 2.2\,6^2 + 2.6 = 156.$$

3. Soit $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Désignons par n' le nombre

$$a^{E\frac{\alpha}{2}} b^{E\frac{\beta}{2}} c^{E\frac{\gamma}{2}},$$

$E(x)$ étant le plus grand entier contenu dans une quantité quelconque x. Démontrer qu'on a

$$S_1^n u' = 1' + 2' + \ldots + n' = S\varphi(u)\,E\,\frac{n}{u^2}$$

$$= \varphi(1)\,E\,\frac{n}{1^2} + \varphi(2)\,E\,\frac{n}{2^2} + \ldots.$$

Exemple : $n = 6$, $1' = 1$, $2' = 1$, $3' = 1$, $4' = 2$, $5' = 1$, $6' = 1$,

$$S_1^6 u' = 7 = \varphi(1)\,E\,\frac{6}{1^2} + \varphi(2)\,E\,\frac{6}{2^2} = 6 + 1.$$

SUR LE TORE ET LA SPHÈRE BITANGENTE;

PAR M. MONNIOT.

Soit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - d^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

l'équation d'un tore dont le méridien dans le plan $y = 0$ a pour équation

$$x^2 + z^2 + a^2 - d^2 = \pm 2ax,$$

qui représente deux cercles.

La sphère $(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0$ sera *bitangente au tore* si le cercle $(x-\alpha)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0$ est tangent intérieurement à l'un des cercles méridiens et extérieurement à l'autre. Les équations de condition seront

$$\sqrt{(\alpha - a)^2 + \gamma^2} + d = r,$$

$$\sqrt{(\alpha + a)^2 + \gamma^2} - d = r;$$

d'où l'on déduit

$$(\mathrm{K})\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2 + \gamma^2 = r^2 + d^2 - a^2,\\ &4a\alpha = 4dr,\\ &\gamma^2 = r^2 + d^2 - a^2 - \frac{d^2 r^2}{a^2}.\end{aligned}\right.$$

L'équation de la sphère bitangente pourra s'écrire

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\gamma z+d^2-a^2=0,$$

ou, en posant $a^2-d^2=c^2$,

$$(1) \qquad x^2+y^2+z^2-c^2=2\alpha x+2\gamma z.$$

L'équation du tore s'écrit

$$(x^2+y^2+z^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0,$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-c^2)^2+4c^2z^2+4(c^2-a^2)(x^2+y^2)=0,$$

ou enfin

$$(2) \quad (x^2+y^2+z^2-c^2)^2+4c^2z^2-4d^2(x^2+y^2)=0.$$

On aura une surface passant par les points communs au tore et à la sphère, en élevant les deux membres de l'équation (1) au carré, et la retranchant de l'équation (2), ce qui donne, après transposition et suppression du facteur 4,

$$(3) \qquad (\alpha x+\gamma z)^2+c^2z^2-d^2(x^2+y^2)=0.$$

On aura démontré que *l'intersection du tore et de la sphère bitangente se compose de deux cercles,* si l'on fait voir que la surface représentée par l'équation (3) est un système de deux plans. Or cette équation peut s'écrire

$$[(\alpha^2-d^2)x^2+2\alpha\gamma xz+(\gamma^2+c^2)z^2]-d^2y^2=0;$$

et le théorème sera démontré, si l'on fait voir que la quantité entre crochets est un carré parfait, ou que

$$\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2-d^2)(\gamma^2+c^2)=0,$$

ou

$$-\alpha^2c^2+\gamma^2d^2+c^2d^2=0,$$

ou

$$-\alpha^2(a^2-d^2)+\gamma^2d^2+c^2d^2=0,$$

ou

$$\alpha^2 + \gamma^2 + c^2 = \frac{a^2 \alpha^2}{d^2},$$

ou, d'après les équations (K),

$$r^2 + d^2 - a^2 + a^2 - d^2 = r^2,$$

ce qui est évident.

SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS A UNE INCONNUE

(Note sur un théorème précédent);

PAR M. L. MALEYX.

I. J'ai démontré, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XI), un théorème ayant pour objet la séparation des racines d'une équation à une inconnue, et j'en ai conclu (n° V, remarque II) que la séparation des racines d'une équation algébrique dont le degré ne surpasse pas $2m + 1$ peut se ramener à la séparation et à l'approximation convenable de celles de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas respectivement m.

Cette conclusion repose sur la possibilité d'écrire l'identité

$$\varphi(x) \times F(x) = F_3(x) \times F'(x) + F_2(x);$$

$F(x)$ étant un polynôme entier dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ et dont les coefficients sont numériquement donnés, $F'(x)$ son polynôme dérivé, $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$ étant des polynômes entiers en x dont les degrés ne surpassent pas respectivement $m - 1$, m et m. Seulement, pour déterminer les coefficients des polynômes $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$, je fus conduit à employer la méthode des coefficients indéterminés; depuis, j'ai trouvé la loi de formation de ces polynômes, et je me propose de l'exposer ici.

II. Écrivons la suite des égalités qui expriment les opérations nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes A et B. Soient Q_1, $Q_2, \ldots, Q_n$ les n premiers quotients, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les n premiers restes; on aura

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} A &= B \times Q_1 + R_1,\\ B &= R_1 \times Q_2 + R_2,\\ R_1 &= R_2 \times Q_3 + R_3,\\ R_2 &= R_3 \times Q_4 + R_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_{n-4} &= R_{n-3} \times Q_{n-2} + R_{n-2},\\ R_{n-3} &= R_{n-2} \times Q_{n-1} + R_{n-1},\\ R_{n-2} &= R_{n-1} \times Q_n + R_n. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les $n-1$ premières des égalités (α) par les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, satisfaisant aux égalités suivantes :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 + Q_2\lambda_2 - \lambda_3 = 0,\\ &\lambda_2 + Q_3\lambda_3 - \lambda_4 = 0,\\ &\lambda_3 + Q_4\lambda_4 - \lambda_5 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\lambda_{n-3} + Q_{n-2}\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} = 0,\\ &\lambda_{n-2} + Q_{n-1}\lambda_{n-1} - 1 = 0,\\ &\lambda_{n-1} + Q_n = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous ajoutons les égalités (α) respectivement multipliées par les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, satisfaisant aux égalités (β), nous aurons

$$\lambda_1 A + B\lambda_2 = B \times Q_1\lambda_1 + R_n,$$

qu'on peut écrire

$$(\gamma) \qquad \lambda_1 A = B \times (Q_1 \times \lambda_1 - \lambda_2) + R_n.$$

Les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ s'obtiennent facilement et successivement d'après les égalités (β) et à partir du dernier.

Le dernier λ_{n-1} est égal au quotient, changé de signe, de la dernière division.

Le précédent est égal au produit, changé de signe, du dernier par le quotient de même indice, ce résultat étant augmenté de 1.

Les autres se forment chacun au moyen des deux suivants, en ajoutant au produit, changé de signe, de celui qui vient immédiatement après celui qu'on veut former par le quotient de même indice, celui qui le suit de deux rangs.

On voit, de plus, que le degré de chacun de ces facteurs est la somme des degrés des quotients de toutes les divisions qui suivent celle dont l'égalité correspondante a été multipliée par ce facteur.

Soient maintenant m le degré de A, n celui de B, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ceux de $R_1, R_2, \ldots, R_n$, et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ceux de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ respectivement; on a

$$\begin{aligned} m &= n + q_1, \\ n &= r_1 + q_2, \\ r_1 &= r_2 + q_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} + q_n. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, on en conclut

$$m = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + r_{n-1}.$$

On aurait de même, en prenant une égalité de plus dans le système (α),

$$m = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + q_{n+1} + r_n.$$

Supposons que nous ayons pris n de manière à vérifier les deux inégalités

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n \leqq \frac{m}{2},$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n + q_{n+1} > \frac{m}{2}.$$

Il résulte de la seconde, et par comparaison avec la dernière égalité, que $r_n < \frac{m}{2}$; or $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ est le degré du facteur $Q_1\lambda_1 - \lambda_2$ qui figure dans l'égalité (γ), λ_1 est d'un degré inférieur; donc les degrés des polynômes λ_1, $Q_1\lambda_1 - \lambda_2$, R_n ne surpassent pas respectivement $\frac{m}{2} - 1$, $\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2}$.

L'égalité (γ) est donc dans les mêmes conditions que l'égalité

$$\varphi(x) \times F(x) = F_3(x)F'(x) + F_2(x)$$

de notre théorème précédent, et l'on peut en déduire le moyen de former les coefficients $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$.

III. On peut encore déduire de ce qui précède et de notre théorème déjà cité que, si l'on considère la suite des polynômes de Sturm, que l'on s'arrête à l'un d'eux, V_r par exemple, puis qu'on élimine entre les égalités qui ont servi à le déterminer tous les polynômes d'indice inférieur, on arrivera à une égalité de la forme

$$\varphi(x) \times F(x) = F'(x) \times \psi(x) + V_r.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ seront séparées par celles de l'équation

$$\psi(x) \times V_r = 0;$$

donc le degré ne peut surpasser $m - 1$, si m est le degré de l'équation $F(x) = 0$.

MÉTHODE

pour construire avec autant d'approximation qu'on voudra un triangle équivalent à un secteur donné;

PAR M. ÉDOUARD COLLIGNON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées (*).

Le centre de gravité G d'un arc de cercle homogène AB (*fig.* 1) est situé sur la bissectrice OI de cet arc, à une distance OG du centre égale à $\frac{OA \times AB}{\text{arc } AB}$, ou bien, en appelant a le rayon OA, et θ le demi-angle au centre IOA, à la distance

$$OG = r = \frac{a \sin\theta}{\theta}.$$

Si, par le point G, nous élevons sur OI une perpendiculaire indéfinie G_1G', les points G_1 et G', où cette droite rencontre les bissectrices OI, OI′ des demi-angles AOI, IOB, seront, en vertu de la symétrie, les centres de gravité des deux arcs AI, BI.

Par la même raison, on obtiendra le centre de gravité G_2 de l'arc AI_1 en élevant en G_1 une perpendiculaire à OG_1, et en prenant le point où cette droite coupe la bissectrice OI_2 de l'angle I_1OA.

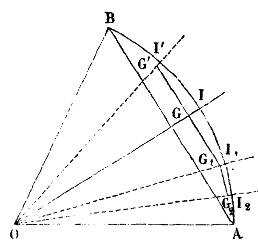
On peut continuer aussi loin qu'on voudra cette construction; elle consiste à déduire le point G_{n+1} du point G_n, en élevant G_nG_{n+1}, perpendiculaire sur OG_n, et en

(*) Cette méthode a été l'objet d'une Communication de l'Auteur au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon, en août 1873.

prenant l'intersection de cette droite avec la bissectrice de l'angle $G_n OA$. On aura, de cette manière, les centres de gravité d'arcs qui commencent tous au point A, et qui décroissent comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$. La position limite des points successifs G, G_1, $G_2, \ldots$, G_n, G_{n+1} est le point A lui-même, centre de gravité d'un arc infiniment petit commençant au point A.

On passera par conséquent du point G au point A par la construction des points G, G_1, $G_2, \ldots$; en pratique, dès qu'on aura atteint un angle $G_n OA$ assez petit, la solution pourra s'achever approximativement, soit en

Fig. 1.



traçant un arc de cercle du point O comme centre avec OG_n pour rayon, soit en prolongeant jusqu'à OA la perpendiculaire $G_n G_{n+1}$.

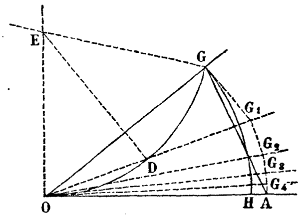
Cela posé, je dis que le triangle OGA (*fig.* 2) est équivalent au secteur OGH, décrit du point O comme centre avec OG pour rayon.

En effet, le secteur a pour mesure $\frac{1}{2} r^2 \theta$, et le triangle $\frac{1}{2} ra \sin\theta$; or ces deux mesures sont égales, en vertu de la relation

$$r = a \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Il est facile de reconnaître aussi que l'arc de cercle ODG, passant par les points O et G, et tangent en O à la droite OA, a une longueur égale à la quantité OA elle-même. Le point E, centre de cet arc ODG, sera situé sur

Fig. 2.



la perpendiculaire à OA, élevée au point O. L'angle OEG sera double de l'angle GOA, c'est-à-dire égal à 2θ; et, par suite,

$$\text{arc OG} = 2\,\text{EO} \times \theta.$$

Or

$$\text{EO} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{OG}}{\cos \text{EOG}} = \frac{\text{OG}}{2\sin\theta}.$$

Donc

$$\text{arc OG} = \text{OG} \times \frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{r\theta}{\sin\theta} = a = \text{OA}.$$

La construction indiquée plus haut conduit donc aussi à la rectification de l'arc de cercle ODG : il suffit d'opérer sur l'angle formé par la corde de l'arc et la tangente.

De ces considérations de Statique, on déduit très-simplement certaines formules de Trigonométrie, par exemple :

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim.\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim.\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots},$$

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta},$$

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}.$$

Enfin on peut en déduire une méthode *graphique* très-simple pour diviser un arc de cercle en un nombre donné de parties égales.

Voir à ce sujet la *Statique* de l'auteur (Hachette, 1873, p. 277 et suiv.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1131

(voir même tome, p. 159),

PAR M. H. LEMELLE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

D'un point quelconque (x_0, y_0) *du plan, on peut mener* $2m-p$ *normales à la courbe*

$$(1) \qquad y^m - max^p = 0, \quad m > p.$$

Les pieds de ces normales sont sur la conique

$$(2) \qquad mx^2 + py^2 - mx_0x - py_0y = 0.$$

Cette conique passe par l'origine O *et le point* P (x_0, y_0); *son centre est le milieu de* OP, *et son équation ne dépend pas du paramètre a : de là plusieurs conséquences immédiates et remarquables.* (PAINVIN.)

Soient x et y les coordonnées du pied d'une normale menée par le point P à la courbe représentée par l'équation (1); en supposant les coordonnées rectangulaires et exprimant que la normale passe par le point (x_0, y_0), on aura d'abord

$$y - y_0 = -\frac{y^{m-1}}{pax^{p-1}}(x - x_0).$$

Mais l'équation (1) donne

$$\frac{y^{m-1}}{ax^{p-1}} = \frac{mx}{y},$$

d'où

$$y - y_0 = -\frac{mx}{py}(x - x_0),$$

et, par suite,

(2) $$mx^2 + py^2 - mx_0 x - py_0 y = 0.$$

Donc les pieds des normales sont sur la conique que l'équation (2) représente.

La résolution des équations (1) et (2) fera connaître les coordonnées des pieds des normales. L'une de ces équations est du degré m, l'autre du second degré, ce qui semble indiquer $2m$ normales; mais nous allons démontrer que leur nombre se réduit à $2m - p$.

Soit

(3) $$x = \lambda y$$

l'équation d'une droite menée de l'origine des coordonnées au pied d'une normale.

Il est facile de reconnaître qu'une droite menée par l'origine des coordonnées ne rencontre la courbe (1) qu'en un seul point réel, autre que l'origine, si les nombres m et p sont, l'un pair et l'autre impair; et qu'elle rencontre la courbe en deux points symétriques par rapport à l'origine, lorsque les nombres m et p sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Dans ce dernier cas, les deux points symétriques ne peuvent être les pieds de deux normales issues du point P, parce que les normales en ces points symétriques sont des droites parallèles, et que nous supposons que x_0 et y_0 sont des quantités finies (*).

(*) Il est évidemment impossible que la conique (2), qui passe par l'origne O des coordonnées, rencontre la courbe (1) en deux autres points

De là nous concluons qu'à une valeur de λ ne correspond qu'une seule normale. Nous allons chercher l'équation en λ, et conclure de son degré le nombre des normales.

Pour cela, éliminons x et y entre les équations (1), (2) et (3). Cette élimination donne, pour déterminer λ,

$$(4) \qquad (mx_0\lambda + py_0)^{m-p} = ma\lambda^p(p + m\lambda^2)^{m-p}.$$

La plus haute puissance de λ dans cette équation a pour exposant $2m - p$: il y a donc $(2m - p)$ normales dont les pieds sont sur la conique (2) (*).

Cette conique passe par l'origine O et par le point P (x_0, y_0); son centre, qui a pour coordonnées $\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}$, est au milieu de la droite OP.

On peut résumer les propriétés précédentes dans l'énoncé suivant.

Si l'on considère les courbes du genre parabolique définies par l'équation $y^m - max^p = 0$, où m représente un nombre entier positif plus grand que p, et a un paramètre variable : d'un point quelconque P donné sur le plan de ces courbes, on peut mener seulement à chacune d'elles $2m - p$ normales, et les pieds de toutes ces normales sont situés sur une même conique invariable qui passe par le point P et par l'origine O des coordonnées : cette conique a son centre au milieu de la droite OP, et ses axes sont parallèles aux axes des coordonnées.

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey, Louis Goulin, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

---

symétriques par rapport au point O, puisqu'une droite ne peut avoir que deux points communs avec une courbe du second degré.

Il est aussi à remarquer que l'origine O des coordonnées ne peut être le pied d'une normale menée du point P que dans le cas particulier où le point P est situé sur l'axe des x, ce qui n'est pas supposé. (G.).

(*) Les racines de l'équation (4), réelles ou imaginaires, correspondent aux points communs aux courbes (1) et (2), différents de l'origine.

M. Moret-Blanc remarque que toutes les courbes obtenues en faisant varier le paramètre a dans l'équation (1) sont homothétiques, et qu'il en est de même des coniques (2) quand on fait varier la position du point P.

Quant aux conséquences *immédiates et remarquables* de ce que l'équation (2) est indépendante du paramètre a, M. Moret-Blanc indique les suivantes, en désignant par A les courbes (1) et par B les coniques (2) :

1° Chaque conique B rencontre toutes les courbes A en des points tels que les normales aux courbes A en ces points vont concourir au point P diamétralement opposé au point O.

2° Réciproquement, toute corde d'une conique B issue du point P est normale à celle des courbes A qui passe par son autre extrémité.

3° Par un point quelconque M du plan passent une seule courbe A, et une infinité de coniques B; toutes ces coniques ont leurs points diamétralement opposés au point O sur la normale en M à la courbe A, qui passe par ce point, et leurs centres sur une droite parallèle à cette normale.

4° La conique B, qui a pour diamètre OM, coupe orthogonalement la courbe A qui passe par le point M, et le diamètre conjugué de OM est le lieu des centres des coniques B qui passent par le point M.

5° Par un point quelconque M du plan passent une courbe A et une conique B qui se touchent en ce point; car une tangente et son point de contact donnent, pour déterminer les paramètres variables de la conique, deux équations du premier degré en x_0, y_0.

6° Il en résulte que chaque courbe A enveloppe une série de coniques B.

7° D'un point P, pris sur une conique, on peut lui mener *une, deux* ou *trois* normales réelles, outre celle qui est normale en P : donc chaque conique B touche *une*, *deux* ou *trois* courbes A.

Question 1134

(voir même tome, p. 160)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION;

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie, à Bastia.

On a identiquement

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}.$$

(CATALAN.)

Soit, en général, une suite de quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$, telles que

$$(1) \qquad a_{px} = b a_x,$$

p et b étant deux constantes : cherchons à évaluer la somme

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{np}} = \mathrm{S}.$$

On a évidemment

$$\mathrm{S} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{np}}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right),$$

ou, en ayant égard à l'égalité supposée $a_{px} = b a_x$,

$$\mathrm{S} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{np}}\right) - \left(\frac{b}{a_p} + \frac{b}{a_{2p}} + \ldots + \frac{b}{a_{np}}\right),$$

égalité qui peut s'écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S} = & \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{p-1}} + \frac{1-b}{a_p}\right) \\ & + \left(\frac{1}{a_{p+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{2p-1}} + \frac{1-b}{a_{2p}}\right) + \ldots \\ & + \left(\frac{1}{a_{(n-1)p+1}} + \ldots + \frac{1-b}{a_{np}}\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend pour $a_1, a_2, \ldots$ la suite naturelle des nombres entiers, on satisfait à la relation (1), en posant

$$p = 2 \quad \text{et} \quad b = 2,$$

d'où

$$1 - b = -1.$$

L'équation (2) devient alors

$$\mathrm{S} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

ou

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

ce qui est l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

On aurait de même, en faisant $p=3$ et $b=3$,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}\right).$$

En prenant pour $a_1, a_2, \ldots$ la suite des carrés $1^2, 2^2, \ldots,$ la relation (1) donne pour $p=2$, $b=4$, car $(2x)^2=4x^2$,

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{3}{16}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{3}{(2n)^2}\right].$$

Enfin on aurait aussi

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n)^3}$$
$$=\left(1-\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{27}-\frac{7}{64}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{7}{(2n)^3}\right].$$

Nous nous bornons à ce petit nombre d'exemples.

Note. — La question 1134 a été résolue par MM. Morel; de Virieu, professeur à Lyon; Bourguet; Gambey; Louis Goulin, élève de Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; H. Lemelle, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers; C. B. de Gand (Belgique); P. S. de Cherbourg; R. Delafon, élève du lycée de Brest; J. Marquet, professeur au Mans; Émile Picard, élève en Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, classe de M. Lemonnier.

LICENCE; FACULTÉ DE PARIS, 1872.

Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical et dirigé de haut en bas et une poulie homogène de masse et de rayon connus, situés dans un plan méridien du cône et tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, un fil flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des brins du fil passe dans une ouverture infiniment petite, pratiquée au sommet du cône, et, à son extrémité est attaché un poids pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système, en supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale et celle du point m' nulle. On néglige le poids du fil.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (ANNÉE 1874).

Composition mathématique.

1° Calculer la valeur de l'arc x, dans l'expression

$$\sin x = \sin(50^\circ\,12') \times \cos(2^\circ\,5'\,30'') + \cos(50^\circ\,12') \times \sin(2^\circ\,5'\,30'') \times \cos(66^\circ\,29'\,30'').$$

2° Dans un triangle rectiligne, on connaît les deux côtés

$$a = 8645^{\mathrm{m}},75$$
$$b = 5273,87$$

et l'angle compris

$$C = 101^\circ\,19'\,47''.$$

Déterminer les angles A, B et le côté C.

3° Dans un plan passant par la ligne de terre, incliné de 30 degrés sur le plan horizontal, on construit un rectangle dont les côtés ont une longueur de 8 et 10 centimètres ; un des grands côtés étant placé sur la ligne de terre, on imagine deux sphères ayant pour diamètre les deux grands côtés du rectangle, et l'on demande les traces du plan du petit cercle, intersection de ces deux sphères, et sa projection horizontale.

Les candidats donneront des explications très-courtes.

QUESTIONS.

1148. 1° Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC ; H le point de rencontre des hauteurs ; I le centre du cercle inscrit ; R le rayon du cercle circonscrit à ABC, on a

$$\overline{OI}^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right),$$

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C),$$

$$IH^2 = 4R^2\left(8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos A\cos B\cos C\right).$$

2° Si r est le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, et R' le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes en A, B, C, on a

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{(relation connue)},$$

$$OH^2 = R^2 - 2\frac{R^3}{R'},$$

$$IH^2 = 2r^2 - \frac{R^3}{R'}.$$

(L. Painvin.)

1149. Trois points l, m, n étant pris sur une conique, on construit par rapport à un point quelconque f les cercles adjoints aux trois systèmes de droites lm, ln; ml, mn; nl, nm (*), ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles. Si l'on désigne par α, β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire,

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{I_f}{fg^2}\left(1-\frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_g, π_f étant les puissances des points g, f par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique.

Examen du cas où le point f coïncide avec le centre de la conique. (H. Faure.)

1150. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés d'un triangle donné.

(A. Rousset.)

1151. Deux sommets A, B d'un triangle ABC sont supposés fixes; le troisième sommet C se déplace dans le plan du triangle, de façon que le pied de la bissectrice de l'angle A décrit une droite donnée; trouver le lieu géométrique du sommet C. (Harkema.)

1152. Deux surfaces gauches données S_1 et S_2 ont une génératrice commune A. Déterminer leurs points de contact sur A.

S_1 restant fixe, on donne à S_2 un double mouvement de translation parallèlement à A et de rotation autour de cette droite : quelle sera la position des points de contact au bout d'un temps donné t? (Ed. Dewulf.)

(*) Pour la définition du cercle adjoint, *voir* 2e série, t. XI, p. 444.

DES CAS OU L'ON PEUT RÉSOUDRE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, par approximations successives, n'est avantageuse que si a est très-petit; mais on peut chercher dans quelles limites la méthode peut s'appliquer, c'est-à-dire donner des valeurs tendant indéfiniment vers une des racines de l'équation. Quand a et c sont de même signe, la question est facile : on démontre d'habitude que l'erreur commise après la $m^{\text{ième}}$ approximation est $< \frac{c}{b}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^m$. La méthode est donc applicable si $4ac < b^2$, et cette condition suffisante est nécessaire; car, si elle n'est pas satisfaite, x est imaginaire, et ne saurait être la limite d'une suite de valeurs évidemment réelles.

Considérons le cas où l'équation a la forme

$$\varphi(x) = ax^2 + bx - c = 0.$$

Les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$, obtenues par un procédé bien connu sont tour à tour supérieures et inférieures à x, x désignant à l'avenir la racine positive de l'équation ; on sait même qu'en écartant le cas où x_2 serait négatif, ce qui entraînerait $ac > b^2$, $x_1, x_3, x_5, \ldots$ vont en diminuant, et $x_2, x_4, \ldots$ en croissant, de sorte que ces deux séries de nombres se rapprochent constamment de x; mais il faut qu'elles s'en approchent indéfiniment. Je désigne par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ les valeurs absolues des erreurs correspondant aux approximations successives, et j'écris la relation connue

$$\varepsilon_{m+1} = \frac{a}{b}(x + x_m)\varepsilon_m. \tag{1}$$

On en conclut $\varepsilon_{m+1} < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^m \varepsilon_1$; la méthode est applicable si $\frac{ac}{b^2} < \frac{1}{2}$. Ici cette condition n'est plus nécessaire; mais il est clair que les erreurs ne tendront pas vers zéro quand x sera $> \frac{b}{2a}$. Supposons, en effet, que x soit $> \frac{b}{2a}$ et que ε_m tende vers zéro; x_m se rapprochera de plus en plus de x, et $x + x_m$ deviendra, à partir d'une valeur suffisante de m, $> \frac{b}{a}$; alors ε_{m+1} sera $> \varepsilon_m$; les nombres $\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \ldots$ allant en croissant ne tendent pas vers zéro, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. D'ailleurs, la condition $x > \frac{b}{2a}$ revient à

$$\varphi\left(\frac{b}{2a}\right) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{b^2} > \frac{3}{4}.$$

Je dis maintenant que, si x est $\leq \frac{b}{2a}$, ou $\frac{ac}{b^2} \leq \frac{3}{4}$, les erreurs successives tendent vers zéro. Dans l'équation (1), je fais tour à tour $m = 2n$, et $m = 2n - 1$, et je remplace x_{2n} par $x - \varepsilon_{2n}$, x_{2n-1} par $x + \varepsilon_{2n-1}$:

$$\varepsilon_{2n+1} = \frac{a}{b}(2x - \varepsilon_{2n})\,\varepsilon_{2n},$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{a}{b}(2x + \varepsilon_{2n-1})\,\varepsilon_{2n-1} \text{ (*)}.$$

(*) Cette formule montre que si $x = \frac{b}{2a}$, d'où $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, on a $\varepsilon_{2n} > \varepsilon_{2n-1}$; alors les termes de rangs pairs de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ surpassent ceux qui les précèdent immédiatement. Pour que les termes de cette suite aient des valeurs constamment décroissantes, à partir du second ε_2, il faut qu'on ait $\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$ (1^re série, t. XVI, p. 436); mais cette condition n'est pas nécessaire pour que les termes deviennent moindres que tout nombre donné. (G.)

Éliminant ε_{2n}, on trouve

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{2n+1} = \frac{a^2}{b^2}\Big[4x^2 + 2x\left(1 - \frac{2ax}{b}\right)\varepsilon_{2n-1} \\ - \frac{4ax}{b}\varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a}{b}\varepsilon_{2n-2}^3\Big]\varepsilon_{2n-1}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on a précisément $x = \frac{b}{2a}$, $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, cette relation devient

$$\varepsilon_{2n+1} = \left(1 - 2\frac{a^2}{b^2}\varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a^3}{b^3}\varepsilon_{2n-1}^3\right)\varepsilon_{2n-1}.$$

On ne peut supposer que les nombres de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{2n+1}$ restent au-dessus d'un nombre fini, car alors $\frac{\varepsilon_{2n+1}}{\varepsilon_{2n-1}}$ étant moindre qu'un nombre < 1, les erreurs considérées décroîtraient plus vite que les termes d'une progression décroissante, et tendraient vers zéro, ce qui renverse l'hypothèse : donc ε_{2n+1} a pour limite zéro, et il en est par suite de même pour ε_{2n}.

Quand x est $< \frac{b}{2a}$ ou $\frac{ac}{b^2} < \frac{3}{4}$, les approximations successives doivent, *a fortiori*, converger vers x; mais la formule (2) le prouve rigoureusement. Comme $\frac{ac}{b^2}$ est < 1, nous sommes sûr que x_1, $x_3, \ldots$ décroissent constamment, ainsi que ε_1, $\varepsilon_3, \ldots$; on aura donc $\varepsilon_{2n-1} = \theta\varepsilon_1$, θ étant < 1. Posons $x = \frac{b}{2a}(1 - h)$, on a

$$\varepsilon_1 = \frac{ax^2}{b} = \frac{b(1-h)^2}{4a}, \qquad \varepsilon_{2n-1} = \theta(1-h)^2\frac{b}{4a}.$$

Substituons dans (2), et représentons par $-k^2(1-h)^2$ la somme des deux derniers termes de la parenthèse, il vient

$$\varepsilon_{2n+1} = (1-h)^2\left[1 + \frac{\theta h}{4}(1-h) - k^2\right]\varepsilon_{2n-1}.$$

26.

La parenthèse est moindre que $(1+h)^2$, donc

$$\varepsilon_{2n+1} < (1-h^2)^2 \varepsilon_{2n-1};$$

les erreurs décroissent plus vite que les termes d'une progression dont la raison serait $(1-h^2)^2$; la méthode des approximations sera donc applicable, sinon rapide, tant que $\frac{ac}{b^2}$ sera $\leq \frac{3}{4}$.

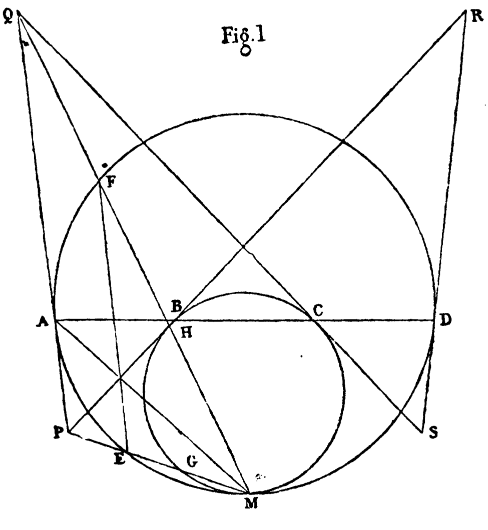
QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE,

suivis d'une Étude géométrique des propriétés de la strophoïde;

PAR M. L. MALEYX.

Théorème I. — *Deux cercles étant tangents en* M (*fig.* 1), *on les coupe par une sécante quelconque qui*

Fig. 1



les rencontre en A, B, C, D; *par ces points, on mène des tangentes aux cercles sur lesquels ils se trouvent;*

les tangentes à deux cercles différents se coupent en quatre points P, Q, R, S. *On joint le point de contact* M *des deux cercles au point de contact* A *de l'une des tangentes, et aux points de rencontre de cette droite avec les deux tangentes à l'autre cercle,* P *et* Q. *La première de ces droites* MA *divise en deux parties égales l'angle des deux autres.*

Les deux triangles PAB, ACQ ont l'angle B égal à l'angle C, les angles en A supplémentaires; les côtés opposés à l'angle égal et à l'angle supplémentaire sont proportionnels; donc

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QC}.$$

Élevant au carré

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}=\frac{\overline{QA}^2}{\overline{QC}^2},$$

ou, d'après un théorème connu,

$$\frac{PE\times PM}{PG\times PM}=\frac{QF\times QM}{QH\times QM}.$$

Simplifiant

$$\frac{PE}{PG}=\frac{QF}{QH},$$

on en déduit

$$\frac{PE}{EG}=\frac{QF}{FH}.$$

Mais le point M étant centre de similitude des deux cercles, on a la proportion

$$\frac{ME}{EG}=\frac{MF}{FH}.$$

Comparant cette égalité avec la précédente, on en conclut

$$\frac{PE}{ME}=\frac{QF}{MF}.$$

La droite EF est donc parallèle à PQ; il en résulte que l'arc EA = AF, et que l'angle PMA = AMQ.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les deux triangles ACQ, BDR sont semblables : leurs angles en A et en D sont égaux, comme ayant même mesure; il en est de même de leurs angles en B et C; il en résulte que leurs angles en R et Q sont égaux, et qu'en conséquence le quadrilatère PQRS est inscriptible. Nous avons vu, dans la démonstration du théorème précédent, qu'on a les proportions

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QC}, \quad \frac{SD}{SC}=\frac{RD}{RB};$$

mais, à cause de la similitude des deux triangles ACQ, BDR, on a

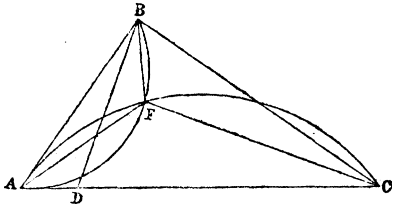
$$\frac{QA}{QC}=\frac{RD}{RB}.$$

Il en résulte que les quatre points P, Q, R, S appartiennent au lieu géométrique des points d'où l'on peut mener aux deux cercles deux tangentes dans un même rapport $\frac{PA}{PB}$; le cercle circonscrit au quadrilatère PQRS a donc, d'après un théorème connu, même axe radical que les deux premiers, et, en conséquence, leur est tangent en M.

Théorème II. — *Le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes à la droite* AB *en* B (*fig.* 2) *et à la droite* AC *en un point indéterminé est la circonférence tangente à* AC *en* A *et passant par le point* B.

En effet, le lieu des foyers des paraboles tangentes aux droites AB, AC, BD est le cercle circonscrit au triangle ABD; si, A et B restant fixes, AD décroît indéfiniment, ce cercle a pour limite le lieu cherché; car alors le point de contact de la parabole variable avec AB a pour position limite B. Or la limite du cercle circonscrit à ABD

Fig. 2.



est le cercle tangent à AC en A et passant par le point B, ce qui justifie l'énoncé.

Corollaire I. — Le foyer F de la parabole tangente à AB et AC, en B et C respectivement, est le second point commun de deux cercles, le premier tangent à AC en A et passant par B, le second tangent à AB en A et passant par C.

Corollaire II. — Les triangles AFB, AFC sont semblables, car les angles ACF, BAF sont égaux comme ayant même mesure, et il en est de même des angles CAF, ABF; donc leurs côtés homologues sont proportionnels :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{AF} = \frac{AF}{BF};$$

d'où, en particulier,

$$\overline{AF}^2 = CF \times BF.$$

Le carré de la droite qui unit le point de concours de deux tangentes à une parabole au foyer est égal au produit des rayons vecteurs allant du foyer aux points de contact.

Le carré du premier rapport est égal au produit des deux derniers; d'où

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CF}{BF}.$$

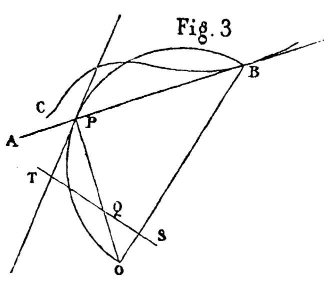
Les carrés des tangentes menées d'un point à une parabole sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

Corollaire III. — Les angles AFB, AFC sont égaux et respectivement supplémentaires de l'angle BAC ; donc les segments de deux tangentes menées d'un point à une parabole, et comptés entre leur point commun et les points de contact, sont vus du foyer sous un même angle supplémentaire de l'angle des tangentes.

THÉORÈME III. — *Deux courbes polaires réciproques par rapport à un cercle sont chacune transformées par rayons vecteurs réciproques d'une podaire de l'autre, le pôle de transformation étant le centre du cercle directeur, et la puissance de transformation le carré de son rayon.*

Soient C une courbe quelconque (*fig.* 3), AB une de ses tangentes en un point quelconque B ; si du point O, fixe

Fig. 3



dans le plan de la courbe C, nous abaissons une perpendiculaire sur la tangente variable AB, le lieu du point P sera une podaire de la courbe C. La tangente à cette podaire en P sera également tangente à la demi-circonférence décrite sur OB comme diamètre, et fera avec PO l'angle TPO égal à PBO. Si, maintenant, nous considérons le point O comme le centre d'un cercle directeur dont le rayon soit R, le pôle de la droite AB, par rapport à ce cercle, se trouve sur la perpendiculaire OP abaissée du point O sur AB, et en un point Q tel qu'on ait l'égalité

$$OP \times OQ = R^2;$$

donc le lieu du pôle de la tangente AB satisfait à la condition de transformation par rayons vecteurs réciproques conforme à l'énoncé. La tangente TQS au lieu du point Q, en Q, fait avec OQ l'angle OQS égal à l'angle TPO (d'après les propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciproques), et, en conséquence, à l'angle PBO; donc le quadrilatère PBSQ est inscriptible, son angle en S est droit, et l'on a les égalités

$$R^2 = OP \times OQ = OS \times OB.$$

Le point B est donc le pôle de la tangente au lieu du point Q, en Q, et le lieu C du point B est transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point S, qui est une podaire de celui du point Q, la transformation se faisant conformément à l'énoncé.

Remarque. — Les rayons dirigés du point O vers les pôles B, Q des tangentes QS, AB, qui sont leurs polaires respectives, font, avec ces droites BA, QS, des angles égaux.

Corollaire I. — La courbe polaire réciproque d'une courbe du second degré, par rapport à un cercle dont le centre est l'un de ses foyers, est un cercle; le foyer est situé dans l'intérieur de la circonférence transformée, sur cette ligne, ou extérieur, suivant que la courbe du second degré est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Le centre de cette circonférence est toujours situé sur l'axe focal de la courbe.

Corollaire II. — La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe du second degré, en prenant le foyer pour pôle, est un limaçon de Pascal dont le point double est au foyer, et réciproquement.

THÉORÈME IV. — *Si, d'un point extérieur à deux paraboles homofocales, on mène deux tangentes à chacune de ces courbes, chacune de ces tangentes divise en parties égales l'un des angles formés par les droites qui unissent son point de contact avec les points de contact situés sur la parabole où il ne se trouve pas.*

Soient deux paraboles p, p_1 ayant pour foyer commun le point F, et leurs axes en coïncidence; menons-leur des tangentes d'un point P, désignons par A et B les points de contact des tangentes à la parabole p, et par A_1 et B_1 les points de contact des tangentes à la parabole p_1. Unissons deux à deux les points de contact pris sur des paraboles différentes par les droites AA_1, AB_1, BA_1, BB_1; il s'agit de démontrer que l'une des tangentes PA, par exemple, divise en deux parties égales l'un des angles formés par les droites AA_1, AB_1.

Formons la figure polaire réciproque de celle que nous venons de considérer par rapport à un cercle dont le centre soit en F; les courbes polaires réciproques des deux paraboles p, p_1 sont deux cercles C, C_1, ayant leurs centres sur l'axe commun des deux paraboles, et passant tous les deux par le foyer F où ils sont tangents (TH. III, *Coroll. I*). Les quatre tangentes PA, PB, PA_1, PB_1 ont leurs pôles respectifs aux points d'intersection α, β, α_1, β_1 des cercles C et C_1 avec la polaire π du point P. Les polaires des points A, B, A_1, B_1 sont respectivement les tangentes au cercle C en α et β, et au cercle C_1 en α_1 et β_1. Nous désignerons le pôle de la droite AA_1, intersection des polaires des points A et A_1, par λ, et respectivement par μ, ν, ρ les pôles des droites AB_1, BA_1, BB_1.

α est le point de contact d'une tangente au cercle C;

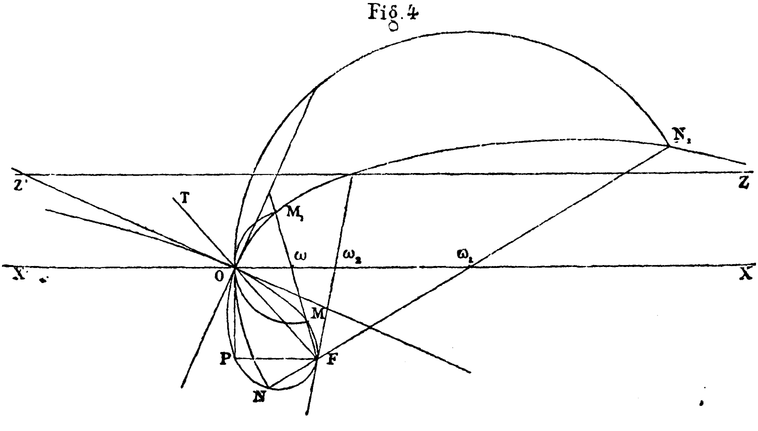
λ, μ sont les points de rencontre de cette tangente avec les tangentes au cercle C_1, menées en α_1 et β_1; donc, d'après le théorème I, la droite $F\alpha$ est bissectrice de l'un des angles formés par $F\alpha_1$, $F\beta_1$; donc encore PA, perpendiculaire à $F\alpha$, est bissectrice de l'un des angles formés par AA_1, BB_1, respectivement perpendiculaires à $F\alpha_1$, $F\beta_1$. C. Q. F. D.

Remarque. — Les pôles λ, μ, ν, ρ des droites AA_1, AB_1, BA_1, BB_1 sont, d'après la remarque du théorème I, situés sur un cercle tangent aux cercles C et C_1 en F; donc ces quatre droites sont tangentes à une même parabole homofocale avec les paraboles p et p_1.

Définition de la strophoïde; diverses constructions par points; propriétés.

On donne une droite illimitée X'X (*fig.* 4), et sur cette droite un point fixe O, on donne encore un point exté-

Fig. 4

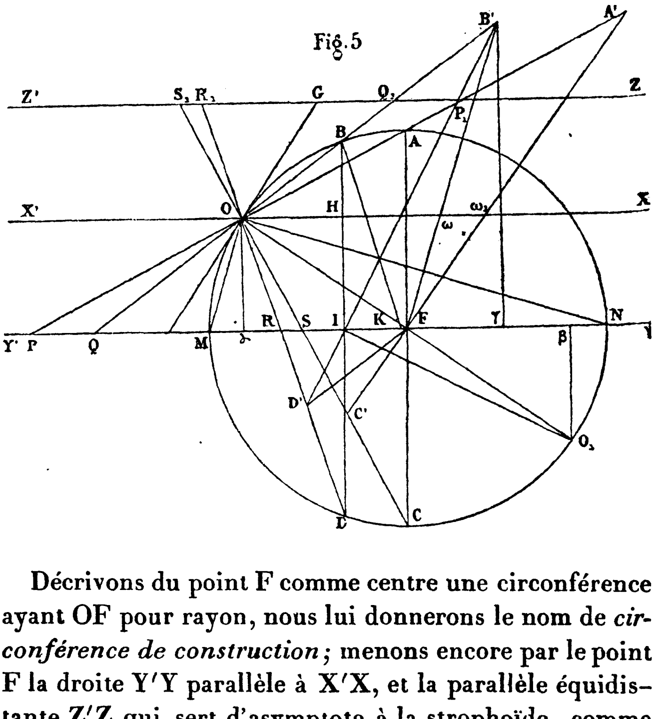


rieur F; par le point F, on mène la sécante arbitraire $F\omega$ à OX, et, à partir du point ω, on porte sur cette sécante, dans les deux sens, la longueur $O\omega$, de sorte que $O\omega = \omega M_1 = \omega M$; le lieu géométrique des points M, M_1 porte le nom de *strophoïde*. On peut construire la courbe par points, en prenant les intersections d'une sécante, telle que $F\omega$, avec un cercle décrit de ω comme centre avec $O\omega$ comme rayon. Les points du lieu se déterminent ainsi par couples situés sur deux rayons rectangulaires issus du point O; les deux points ainsi obtenus sont équidistants de la droite OX. Si la droite $F\omega$ se rapproche de FO, les deux points M, M_1 se rapprochent indéfiniment du point O; on obtient ainsi deux arcs de courbe se coupant en O, qui se trouve ainsi point double du lieu. Les rayons rectangulaires OM, OM_1, constamment parallèles aux bissectrices des angles $F\omega X$, $X\omega M_1$, ont pour directions limites les bissectrices des angles FOX, XOT : ces bissectrices sont les tangentes au point double. Si le point ω_1 s'éloigne du point O et s'en éloigne indéfiniment, l'un des points vient se placer sur une parallèle à OX menée par le point F, à sa rencontre avec un cercle dont le centre est à l'infini sur OX, pendant que sa circonférence passe en O, c'est-à-dire à sa rencontre avec la perpendiculaire à OX en O : on obtient ainsi le point P. Le point situé avec P sur une sécante passant par le point F s'éloigne à l'infini; mais, comme ces deux points sont situés de part et d'autre de OX et en sont équidistants, il en résulte que la courbe admet pour asymptote la droite $Z'Z$ parallèle à OX, et située à la même distance de cette droite que le point F.

On voit facilement que le point F fait partie du lieu, quand le point ω vient se placer à la rencontre de OX avec la perpendiculaire au milieu de FO; si nous désignons ce point par ω_2, $F\omega_2$ sera tangente à la strophoïde en F, et son prolongement coupera la courbe sur l'asymptote. On voit ainsi que toutes les droites passant en F coupent la courbe en trois points. Tels sont les faits généraux et simples qui se déduisent de cette définition et de la construction qui en résulte; mais nous allons envisager d'autres constructions conduisant à des résultats nouveaux.

Soient toujours (*fig.* 5) X′X la droite fixe, O le point double, F le point extérieur par lequel on mène les sécantes.

Fig. 5



Décrivons du point F comme centre une circonférence ayant OF pour rayon, nous lui donnerons le nom de *circonférence de construction;* menons encore par le point F la droite Y′Y parallèle à X′X, et la parallèle équidistante Z′Z qui sert d'asymptote à la strophoïde, comme nous l'avons déjà vu et comme nous le verrons encore par d'autres moyens. Soit B′ un point du lieu situé sur le rayon Fω, le triangle OωB′ doit être isoscèle; si nous prolongeons B′O jusqu'à sa rencontre en Q avec Y′Y, le triangle QFB' doit être isoscèle aussi; donc la perpendiculaire abaissée du point F sur la base QB', et dont le pied est au milieu de OB, divise QB' en deux parties égales; il en résulte que $BB' = OQ$, et, comme $OQ = OQ_1$, $BB' = OQ_1$; retranchant la partie commune BQ_1, il reste l'égalité

$$OB = Q_1B'.$$

Donc, pour obtenir un point du lieu, il suffit de mener par le point double une sécante commune au cercle de construction et à l'asymptote, et de prolonger la sécante à l'asymptote d'une longueur égale à la corde interceptée dans le cercle, cette corde étant affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est comptée dans le sens de la sécante à l'asymptote ou en sens contraire.

On voit facilement, d'après cette construction, qu'un point de la strophoïde et le point du cercle de construction situé avec lui sur un même rayon issu du point double sont placés à la même distance, le premier, de la droite $Z'Z$, le second, de la droite $X'X$; de plus, ils sont toujours placés du même côté par rapport à ces droites respectives.

Il en résulte immédiatement que $Z'Z$ est asymptote; que la strophoïde coupe son asymptote au point G où cette ligne est coupée par la tangente au cercle de construction en O; que, comme le cercle de construction ne peut être coupé par une parallèle à $X'X$ en plus de deux points, il en est de même de la strophoïde; que les points de la strophoïde les plus écartés de l'asymptote sont situés sur les rayons rectangulaires joignant le point O aux extrémités A, C du diamètre du cercle de construction perpendiculaire à $X'X$; que, comme il n'existe sur chaque rayon issu de O qu'un seul point de la courbe, et que, comme, d'après la première construction, il existe sur deux rayons rectangulaires issus de O deux points de la courbe en ligne droite avec le point F, les points A′ et C′, qui sont les points de la courbe les plus éloignés de l'asymptote, sont en ligne droite avec le point F; que ces deux points équidistants de X′X en sont à une distance égale au rayon du cercle de construction.

Actuellement, nous donnerons la dénomination de points correspondants de la strophoïde à deux points situés sur deux rayons issus du point double O et également inclinés sur les droites OX, OF, ou plutôt sur la bissectrice de leur angle ON; B′, D′ sont deux points correspondants : les points B, D du cercle de construction, qui ont servi à la construire, sont situés sur une corde BD perpendiculaire à Y′Y.

La corde B′D′ qui unit deux points correspondants, et la corde BD qui unit les deux points du cercle qui ont servi à la construire, se coupent sur le diamètre Y′Y.

En effet, désignons par I le point commun des droites BD, B′D′, et considérons B′D′ comme une transversale au triangle BOD, on a

$$\mathrm{OD'} \times \mathrm{DI} \times \mathrm{BB'} = \mathrm{OB'} \times \mathrm{BI} \times \mathrm{DD'}.$$

Menons BK parallèle à DR, on voit facilement qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} \mathrm{OD'} = \mathrm{DR} &= \mathrm{BK},\\ \mathrm{BB'} &= \mathrm{OQ},\\ \mathrm{OB'} &= \mathrm{BQ},\\ \mathrm{DD'} &= \mathrm{OR}. \end{aligned}$$

On en déduit, par substitution,

$$\mathrm{BK} \times \mathrm{OQ} \times \mathrm{DI} = \mathrm{BQ} \times \mathrm{OR} \times \mathrm{BI}.$$

Mais les deux triangles QBK, QOR sont semblables, puisque OR est parallèle à BK ; on en déduit

$$\frac{BK}{OR} = \frac{BQ}{OQ},$$

ou

$$BK \times OQ = BQ \times OR.$$

Comparant cette égalité avec la précédente, on en déduit

$$BI = DI. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il en résulte une nouvelle démonstration de ce fait que les points A′, F, C′ sont en ligne droite.

Prolongeons OF jusqu'au point diamétralement opposé O_1, puis unissons IO_1 : cette droite est perpendiculaire à B′D′.

Pour le démontrer, abaissons $O\alpha$, $O_1\beta$, $B'\gamma$ perpendiculaires sur Y′Y ; il suffit d'établir la similitude des triangles rectangles $IB'\gamma$, $IO_1\beta$, ou la proportion

$$\frac{I\gamma}{O_1\beta} = \frac{B'\gamma}{I\beta}.$$

Mais on voit facilement que

$$I\gamma = \alpha Q,$$
$$O_1\beta = O\alpha,$$
$$B'\gamma = 2O\alpha + BH = O\alpha + BI,$$
$$I\beta = IF + F\beta = IF + F\alpha.$$

Donc, substituant, il suffit de montrer que

$$\frac{\alpha Q}{O\alpha} = \frac{\alpha O + BI}{IF + F\alpha},$$

ou encore, comme les triangles BOH, $O\alpha Q$ sont semblables, et qu'en conséquence

$$\frac{\alpha Q}{O\alpha} = \frac{OH}{BH} = \frac{F\alpha - IF}{BI - O\alpha},$$

que

$$\frac{F\alpha - IF}{BI - O\alpha} = \frac{BI + O\alpha}{F\alpha + IF}.$$

Or cette dernière égalité est équivalente à

$$\overline{F\alpha}^2 + \overline{O\alpha}^2 = \overline{IF}^2 + \overline{BI}^2,$$

qui est satisfaite, puisqu'elle exprime que les points O, B sont équidistants du point F. La proposition est ainsi établie.

Il en résulte que les cordes de la strophoïde, qui unissent deux points correspondants, enveloppent une parabole ayant pour foyer O_1, point symétrique du point double par rapport au centre du cercle de construction, et pour directrice la droite $X'X$.

Il en résulte encore que la droite OFO_1 est perpendiculaire sur $A'C'$, qui, d'après cela, se trouve parallèle à OG. Désormais nous donnerons aux points A' et C' la dénomination de *points correspondants principaux*.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. CROSNIER.

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique quelconque. On examinera en particulier le cas où le paraboloïde est équilatère.

I. *Solution géométrique.* — Prenons l'un des systèmes de génératrices et le plan directeur correspondant; il est évident que les trajectoires orthogonales de ce système se projettent sur le plan directeur suivant les trajectoires orthogonales des projections sur ce plan des génératrices.

Mais on sait que les trajectoires orthogonales d'un système de droites comprises dans un même plan sont les développantes de l'enveloppe des droites du système. Or l'enveloppe des projections des génératrices d'un paraboloïde sur le plan directeur est une parabole; car, si A et B sont les traces de deux directrices sur le plan en question, la projection d'une génératrice intercepte sur les projections des directrices, et à partir des points A et B des segments proportionnels; elle enveloppe, par suite, une conique, puisqu'elle détermine deux divisions homographiques sur deux droites; la conique est d'ailleurs une parabole, car elle est tangente à la droite de l'infini.

Ainsi les projections des trajectoires sont des développantes de parabole.

Cette parabole est d'ailleurs évidemment la projection de la ligne de striction relative au système de génératrices que nous considérons.

Si le paraboloïde est équilatère, toutes les génératrices d'un même système rencontrent la génératrice de l'autre système qui passe au sommet de la surface; cette génératrice étant normale au plan directeur, les projections des génératrices de l'autre système sur ce plan directeur passent par un même point, et les trajectoires orthogonales de ces projections sont des cercles ayant le point pour centre commun.

II. *Solution analytique.* — Prenons le plan directeur correspondant au système de génératrices que nous considérons pour plan des xy, l'axe de la surface pour axe des x, et la génératrice contenue dans le plan directeur pour axe des y, l'axe des z étant une perpendiculaire à ce plan; l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad z(Ay + Bz) = x.$$

Les génératrices parallèles au plan des xy ont pour équations

$$(2) \qquad \begin{cases} z = \lambda, \\ x = \lambda(Ay + B\lambda). \end{cases}$$

Désignons par α, β, γ les angles d'une génératrice avec les axes coordonnés. Soient (x, y, z) un point de la génératrice, dx, dy, dz les accroissements de coordonnées relatifs à la trajectoire orthogonale qui passe en ce point; on a

$$(3) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0;$$

mais

$$\gamma = 90^\circ,$$

par suite

$$\cos\gamma = 0,$$

et l'équation se réduit à

$$(4) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy = 0.$$

Cette équation n'est pas autre chose que la condition à laquelle doivent satisfaire les trajectoires des projections des génératrices de la surface sur le plan directeur. Or on a

$$\frac{\cos\alpha}{\lambda A} = \frac{\cos\beta}{1}, \quad \text{d'où} \quad A\lambda\, dx + dy = 0.$$

Éliminons λ entre cette dernière équation et l'équation de la projection de la génératrice sur le plan des xy, et nous avons

$$(5) \qquad x + y\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

pour équation différentielle.

Supposons en premier lieu le paraboloïde équilatère, on a $B = 0$, et l'équation se réduit à $x + y\frac{dy}{dx} = 0$, dont l'intégrale est $x^2 + y^2 = c$; les projections des trajectoires sur le plan directeur sont donc des cercles concentriques dont le sommet est le centre.

Revenons au cas général, et posons, pour abréger,

$$\frac{B}{A^2} = a, \quad \frac{dy}{dx} = p;$$

nous avons à intégrer l'équation

$$x + py = ap^2, \tag{6}$$

équation du genre

$$xf(p) + y\varphi(p) = \psi(p),$$

que l'on intègre en différentiant; on a

$$1 + p^2 + y\frac{dp}{dx} = 2ap\frac{dp}{dx},$$

ou bien, puisque

$$\frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

on a, en remplaçant,

$$1 + p^2 + py\frac{dp}{dy} = 2ap^2\frac{dp}{dy}. \tag{7}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dy}{dp} + y\frac{p}{1+p^2} = 2a\frac{p^2}{1+p^2}. \tag{8}$$

Elle est linéaire; nous avons donc

$$y = e^{-\int P dp}\int Q e^{\int P dp} dp,$$

en posant

$$P = \frac{p}{1+p^2} \quad \text{et} \quad Q = 2a\frac{p^2}{1+p^2};$$

par conséquent,

$$\int \mathrm{P}\, dp = \int \frac{p\, dp}{1+p^2} = \frac{1}{2}\log(1+p^2),$$

et, par suite,

$$e^{-\int \mathrm{P} dp} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

et

$$\mathrm{Q} e^{\int \mathrm{P} dp}\, dp = 2a\, \frac{p^2}{1+p^2} \sqrt{1+p^2}\, dp = \frac{2ap^2\, dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

donc

$$\int \mathrm{Q}\, e^{\int \mathrm{P} dp}\, dp = 2a \int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1+p^3}} + c;$$

or

$$\int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int p\, \frac{p\, dp}{\sqrt{1+p^2}} = p\sqrt{1+p^2} - \int dp\sqrt{1+p^2}$$

$$= p\sqrt{1+p^2} - \int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1+p^2}} - \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

d'où

$$2\int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1+p^2}} = p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2}).$$

Remplaçons, nous avons

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[ap\sqrt{1+p^2} - a\log(p+\sqrt{1+p^2}) + c\right],$$

ou bien

$$(9) \quad y = ap + \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\log(p+\sqrt{1+p^2}).$$

Si maintenant, entre cette équation et l'équation (6), nous éliminons p, nous aurons l'équation générale des trajectoires demandées.

Si nous faisons $a = 0$, nous trouvons les équations des cercles.

Sur l'équation différentielle (6), nous voyons que par chaque point du plan passent deux tangentes qui se coupent en ce point ; car, pour tout système de valeurs de x, y, nous avons deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$. Ces valeurs sont réelles si l'on a

$$y^2 + 4ax \gtrless 0;$$

elles sont égales pour $y^2 + 4ax = 0$, et imaginaires pour $y^2 + 4ax < 0$. La courbe $y^2 + 4ax = 0$ est donc une courbe qui sépare les points du plan par lesquels passent des trajectoires réelles, et ceux par lesquels il n'en passe pas. C'est, par suite, une espèce d'enveloppe de ces trajectoires, mais non une enveloppe proprement dite; car l'enveloppe a pour coefficient angulaire de la tangente $\frac{2a}{y}$, tandis que l'enveloppée a pour coefficient angulaire $\frac{y}{2a}$; les deux tangentes sont par suite à angle droit.

On aurait pu obtenir une autre intégrale à la place de (9), en mettant (6) sous la forme

$$y = -\frac{x}{p} + ap$$

et différentiant : le résultat n'est pas du reste plus simple que (9); on trouve

$$(9') \qquad x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \log c\left(p + \sqrt{1+p^2}\right).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey, V. Hioux et Bourguet.

Solution analytique de M. BOURGUET.

Je prends pour axes l'axe de la surface et les deux génératrices du sommet; l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad xy = Pz;$$

les équations d'une génératrice et d'un plan perpendiculaire à cette génératrice,

$$y = h, \quad x = \frac{P}{h} z, \quad Px + hz + P\cos\theta y = 0$$

(θ est l'angle des deux génératrices du sommet). L'élément ds de la trajectoire perpendiculaire à la génératrice devra satisfaire à l'équation

$$P dx + h dz + P\cos\theta\, dy = 0,$$

ou

$$(2) \qquad P dx + y dz + P\cos\theta\, dy = 0,$$

ou, en éliminant y entre (1) et (2),

$$(3) \qquad x dx + z dz + P x \cos\theta\, d\frac{z}{x} = 0,$$

et, en prenant les coordonnées polaires,

$$(4) \qquad r\left(dz - P\cos\theta \frac{d\omega}{\sin\omega}\right) = 0,$$

d'où

$$r = 0 \quad \text{(sol. singulière)}$$

et

$$r = r_0 + P\cos\theta \log\tang\frac{\omega}{2} \quad \text{(int. générale)}.$$

Les trajectoires se projettent suivant des limaçons de $r = P\cos\log\theta\tang\frac{\omega}{2}$, courbe qui a la forme d'une toupie, dont la pointe infiniment allongée est asymptote à l'axe de la surface. Si $\cos\theta = 0$, les trajectoires se projettent orthogonalement sur le plan directeur correspondant suivant des cercles concentriques.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 94

(voir 1re série, t. IV, p. 260),

PAR M. H. BROCARD.

Discuter complétement la surface du troisième degré

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

(TERQUEM.)

La section de la surface par un plan $z = A$ est une conique du genre ellipse si $A > \frac{B^2}{4C}$, du genre hyperbole si $A < \frac{B^2}{4C}$, et une parabole si $A = \frac{B^2}{4C}$.

Transportons la surface de manière que le plan des xy la coupe suivant la parabole en question; son équation deviendra

$$\left(z + \frac{B^2}{4C}\right) y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et déplaçons les axes Ox et Oy, de manière que la parabole soit rapportée à son axe et à la tangente à l'extrémité. L'équation de la surface se réduira à

$$z(Rx + T)^2 + y^2 - 2px = 0.$$

Sous cette forme, plus commode pour la discussion, on voit :

1° Que les plans $z=+\gamma$ donnent des ellipses, les plans $z=-\gamma$ des hyperboles; la parabole $y^2=2px$ est la limite commune des deux séries de coniques. Le lieu des centres de ces coniques est l'hyperbole

$$x=\frac{p}{zR^2}-\frac{T}{R},$$

située dans le plan $x=0$;

2° Que la section par les plans $x=A$ est une parabole, et par les plans $y=A$ une courbe du troisième degré qui admet pour asymptotes les droites $x=-\frac{T}{R}$ et $z=0$, et qui coupe Ox au point $\frac{A^2}{2p}$.

Le plan $z=0$ est asymptotique à la surface.

Celle-ci peut donc être regardée comme engendrée par la courbe du troisième degré, définie par les deux équations

$$y=A,\quad z=\frac{2px-A^2}{(Rx+T)^2},$$

et qui se déplace en s'appuyant sur les deux paraboles fixes

$$z=0,\quad y^2-2px=0$$

et

$$x=0,\quad z=-\frac{y^2}{T^2}.$$

Question 900

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. B. LAUNOY.

Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée, de manière à toucher cette parabole en deux points. Trouver le lieu décrit par le centre de *l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact.*

(DAUPLAY.)

Les deux courbes étant doublement tangentes, le pôle de la corde de contact est commun aux deux coniques ; il en est de même du diamètre conjugué de cette corde. Soit alors M le pôle de la corde de contact dans une des positions de l'ellipse, O le centre de cette ellipse, et S′ le point de rencontre de MO avec la parabole ; la tangente en S′ à la parabole sera parallèle à la corde de contact.

Cela étant, je prendrai d'abord pour axe de coordonnées S′O et S′Y, et, si je désigne par α_1 la distance S′O, les équations des deux coniques seront

$$y^2 = 2p'x,$$
$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

comme ces deux courbes sont doublement tangentes, on doit pouvoir déterminer k et λ, de manière que l'équation

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 + k(y^2 - 2p'x) = 0$$

soit identique à l'équation

$$(x-\lambda)^2 = 0.$$

Il faudra alors que l'on ait

$$\frac{1}{b'^2} + k = 0$$

et

$$a'^2 = \frac{\lambda}{kp' + \frac{\alpha_1}{a'^2}} = \frac{\lambda^2}{\frac{\alpha_1^2}{a'^2} - 1},$$

d'où

(1) $$x = \lambda = \frac{\alpha_1 b'_2 - p'a'^2}{b'^2} = \sqrt{\alpha_1^2 - a'^2},$$

et, par suite,

$$b'^4(\alpha_1^2 - a'^2) = (x_1 b'^2 - p'a'^2)^2,$$

ou

(2) $$p'a'^2 = b'^2(b'^2 - 2p'\alpha_1).$$

Soit $\varphi = \widehat{YS'O}$; on sait qu'on a

$$p' = \frac{p}{\sin^2\varphi} \quad (2p = \text{paramètre de la parabole}),$$

et, comme

$$TS = SP,$$
$$S'P = 2SP \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin\varphi}{S'P} = \frac{\cos\varphi}{2SP} = \frac{1}{\pm\sqrt{\overline{S'P}^2 + 4\overline{SP}^2}};$$

alors

$$p' = p\,\frac{\overline{S'P}^2 + 4\overline{SP}^2}{\overline{S'P}^2} = p\,\frac{2pSP + 4\overline{SP}^2}{2pSP} = p + 2SP.$$

Soient donc α et β les coordonnées du centre de l'ellipse par rapport à l'axe de la parabole et à la tangente au sommet comme axes, on a

$$\alpha = \alpha_1 + SP,$$
$$\beta = S'P = \sqrt{2p \times SP};$$

alors

$$SP = \frac{\beta^2}{2p} = \alpha - \alpha_1,$$

d'où

(3) $$\alpha_1 = \frac{2p\alpha - \beta^2}{2p}$$

et

$$p' = p + \frac{\beta^2}{p} = \frac{p^2 + \beta^2}{p}. \tag{4}$$

De plus, les théorèmes d'Apollonius me donnent les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \\ a' b' \sin\varphi = ab, \end{array} \right. \tag{5}$$

et comme

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{S'P}}{\pm\sqrt{\overline{\mathrm{S'P}}^2 + 4\overline{\mathrm{SP}}^2}} = \frac{\beta}{\pm\sqrt{\beta^2 + \dfrac{\beta^4}{p^2}}} = \frac{p}{\pm\sqrt{p^2 + \beta^2}},$$

il vient

$$\frac{a' b' p}{\pm\sqrt{p^2 + \beta^2}} = ab. \tag{6}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer a', b', p', α_1 entre les équations (2), (3), (4), (5) et (6). Je commence par éliminer a' et b'; pour cela, je pose

$$\sqrt{p^2 + \beta^2} = \gamma, \quad \frac{ab}{p} = \mathrm{A}, \quad a^2 + b^2 = \mathrm{B}^2,$$

d'où

$$a' = \frac{ab\sqrt{p^2 + \beta^2}}{pb'} = \frac{ab\gamma}{pb'} = \frac{\mathrm{A}\gamma}{b'}.$$

La substitution de cette valeur dans les équations (2) et (5) donne

$$b'^6 - 2p'\alpha_1 b'^4 - p'^2\mathrm{A}^2\gamma^2 = 0,$$
$$b'^4 - \mathrm{B}^2 b'^2 + \mathrm{A}^2\gamma^2 = 0.$$

L'élimination de b'^2 entre ces deux dernières équations donnera

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1)\big\{ &\mathrm{A}^4\gamma^2[p'^2 + (\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1)] \\ &- \mathrm{A}^2\gamma^2[\mathrm{B}^2(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1) - \mathrm{A}^2\gamma^2] \\ &- p'^2\mathrm{B}^2[\mathrm{B}^2(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1) - \mathrm{B}^2\gamma^2]\big\} = 0,\end{aligned}$$

qui donne d'abord

$$B^2 - 2p'\alpha_1 = 0.$$

En égalant à zéro la grande parenthèse, on obtient une seconde équation; il est facile de voir qu'elle ne convient pas à la question, car elle donne une courbe qui possède des points à l'extérieur de la parabole.

Donc l'équation du lieu est

$$B^2 - 2p'\alpha_1 = 0,$$

ou, en remplaçant B^2, p', α_1 par leurs valeurs,

$$(7) \qquad (p^2 + \beta^2)(2p\alpha - \beta^2) = p^2(a^2 + b^2).$$

La courbe est du quatrième ordre; elle est symétrique par rapport à l'axe de la parabole, et ne rencontre cet axe qu'en un seul point donné par

$$\alpha' = \frac{a^2 + b^2}{2p}.$$

La courbe ne possède pas de points à gauche de la tangente en α'; elle a des branches infinies sans asymptotes; ses éléments tendent, comme ceux de la parabole, à devenir parallèles à l'axe.

Enveloppe de la corde de contact. — Soit R le point où la corde de contact rencontre Ox; on a

$$SR = TR - TS = S'Q - SP = \frac{\alpha_1 b'^2 - p' a'^2}{b'^2} - SP,$$

$$SR = \frac{\alpha_1 b'^2 - p' a'^2}{b'^2} - \frac{\beta^2}{2p}.$$

La corde de contact dont le coefficient angulaire est $\tang\varphi$, et qui passe par le point R, aura alors pour équation

$$y = \tang\varphi\left[x - \frac{(\alpha_1 b'^2 - p' a'^2)}{b'^2} + \frac{\beta^2}{2p}\right].$$

Dans cette équation, on connaît α_1, p', a', b' : il serait donc possible d'obtenir l'enveloppe de cette droite par la méthode connue; mais, comme les calculs seraient trop compliqués, je vais me contenter de chercher le lieu du point M. J'aurai ainsi une courbe qui sera, par rapport à la parabole donnée, la polaire réciproque de la courbe cherchée; étant donnée l'une, l'autre s'obtient facilement.

Soient x et y les coordonnées du pôle M; on a, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$OQ \times OM = a'^2.$$

Or

$$OQ = OS' - S'Q = \alpha_1 - \frac{(\alpha_1 b'^2 - p'a'^2)}{b'^2} = \frac{p'a'^2}{b'^2},$$

$$OM = OS' + S'M = \alpha_1 + SP - x = \alpha - x,$$

d'où

$$OQ \times OM = \frac{p'a'^2}{b'^2}(\alpha - x) = a'^2,$$

ou

$$(6) \qquad p'(\alpha - x) = b'^2.$$

Or, d'après l'équation (2),

$$p'^2 a'^2 = b'^2(b'^2 - 2p'\alpha_1),$$

et, à cause de (6),

$$a'^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1);$$

donc

$$a'^2 + b'^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1) + p'(\alpha - x),$$

et, par suite,

$$a^2 + b^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1 + p');$$

mais

$$p' - 2\alpha_1 = \frac{p^2 + \beta^2}{p} - \frac{(2p\alpha - \beta^2)}{p} = \frac{p^2 - 2p\alpha + 2\beta^2}{p},$$

$$p(a^2 + b^2) = (\alpha - x)[2\beta^2 - p(\alpha + x)],$$

et comme $\beta = y$,

$$(7) \qquad p(a^2 + b^2) = (\alpha - x)[2y^2 - p(\alpha + x)].$$

Il ne reste plus qu'à éliminer α entre cette dernière équation et l'équation du lieu des centres; de cette dernière on tire

$$\alpha = \frac{\beta^4 + p^2\beta^2 + p^2(a^2 + b^2)}{2p(p^2 + \beta^2)},$$

$$\alpha = \frac{y^4 + p^2y^2 + p^2(a^2 + b^2)}{2p(p^2 + y^2)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (7), on trouve, après réduction,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(p^2 + y^2)^2[3y^4 - 8pxy^2 + 4p^2x^2 - 4p^2(a^2 + b^2)] \\ &\qquad + 2p^2(a^2 + b^2)(p^2 + y^2)y^2 - p^4(a^2 + b^2)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui est le lieu du point M.

Question 904

(voir 2e série, t. VIII, p. 46);

Par M. MORET-BLANC.

Étant donné un faisceau de surfaces du second degré ayant même intersection, si, par un point A *pris sur une de ces surfaces, on mène une section plane à cette surface, et les demi-diamètres des autres surfaces parallèles à la tangente à la section au point* A, *ainsi que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces; si l'on prend, à partir du point* A *et dans la direction des normales à ces plans polaires, des troisièmes proportionnelles aux demi-diamètres et aux distances correspondantes des plans polaires aux centres de ces surfaces, les extrémités de ces droites et le centre* *de courbure de la section faite dans la première surface sont en ligne droite.* (L'ABBÉ AOUST.)

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} S = A(x-\alpha)^2 + A'(y-\beta)^2 + A''(z-\gamma)^2 \\ \quad + 2B(y-\beta)(z-\gamma) + 2B'(x-\alpha)(z-\gamma) \\ \quad\quad + 2B''(x-\alpha)(y-\beta) - 1 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_1 = A_1(x-\alpha_1)^2 + A'_1(y-\beta_1)^2 + A''_1(z-\gamma_1)^2 \\ \quad + 2B_1(y-\beta_1)(z-\gamma_1) + 2B'_1(x-\alpha_1)(z-\gamma_1) \\ \quad\quad + 2B''_1(x-\alpha_1)(z-y_1) - 1 = 0 \end{cases}$$

les équations de deux surfaces du second degré, et

$$(3)\qquad S_2 = S - kS_1 = 0$$

celle d'une troisième surface quelconque du second degré passant par l'intersection des deux premières.

Les équations des plans polaires d'un point $A(x, y, z)$, par rapport à ces surfaces, sont respectivement

$$(4)\qquad XS'_x + YS'_y + ZS'_z + tS'_t = 0,$$

$$(5)\qquad XS'_{1x} + YS'_{1y} + ZS'_{1z} + tS'_{1t} = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} XS'_x + YS'_y + ZS'_z + tS'_t \\ \quad - k(XS'_{1x} + YS'_{1y} + ZS'_{1z} + tS'_{1t}) = 0, \end{cases}$$

t étant une quatrième variable introduite pour rendre les équations homogènes, et qu'après la différentiation on fait égale à 1.

On voit que tous ces plans polaires, quel que soit k, se coupent suivant une même droite, et, par suite, les normales à ces plans, menées par le plan A, sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite.

Si le point A est pris sur la surface S_2, le plan polaire relatif à cette surface est le plan tangent en A à S_2 : c'est le cas que nous considérons.

Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ les distances du point A aux plans polaires des surfaces S et S_1 ; P et P_1 les distances des centres des surfaces à ces mêmes plans, et R le rayon de courbure d'une section plane normale en A, faite dans la surface S_2. On a

$$\mathfrak{P} = \frac{xS'_x + yS'_y + zS'_z + tS'_t}{\sqrt{(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2}}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2}},$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{xS'_{1x} + yS'_{1y} + zS'_{1z} + tS'_{1t}}{\sqrt{(S'_{1x})^2 + (S'_{1y})^2 + (S'_{1z})^2}}, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{(S'_{1x})^2 + (S'_{1y})^2 + (S'_{1z})^2}},$$

d'où, en remarquant que le point A (x, y, z) est situé dans le plan (6),

$$\frac{\mathfrak{P}}{P} = k\frac{\mathfrak{P}_1}{P_1},$$

ou

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = k\frac{P}{P_1}; \tag{7}$$

mais les perpendiculaires $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ sont proportionnelles aux cosinus des angles qu'elles font avec le plan (6); car elles sont les projections d'une même droite contenue dans ce plan, la perpendiculaire abaissée du point A sur l'intersection commune des plans polaires; par suite, elles sont proportionnelles aux sinus des angles qu'elles font avec la normale R au plan (6), ou à la surface S_2.

Plus généralement, on peut dire que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ sont proportionnelles aux cosinus des angles qu'elles font avec la tangente en A à une section quelconque faite dans la surface S_2 par un plan passant par A : cela résulte de la formule $\cos a = \cos b \cos c$, relative aux triangles sphériques rectangles; mais nous n'avons pas à faire usage ici de cette relation.

On a donc

$$\frac{\sin \widehat{P, R}}{\sin \widehat{P_1, R}} = k\frac{P}{P_1}. \tag{8}$$

Considérons une section faite dans la surface S_2 par un plan normal mené par le point A, et soit ds l'élément de cette section, pris à partir de A.

Si l'on différentie deux fois de suite l'équation (3), par rapport à ds pris pour variable indépendante, en remarquant que

$$S'_x = \frac{\cos(P, x)}{P}, \quad S'_y = \frac{\cos(P, y)}{P}, \quad S'_z = \frac{\cos(P, z)}{P},$$

$$S'_{1x} = \frac{\cos(P_1, x)}{P_1}, \quad S'_{1y} = \frac{\cos(P_1, y)}{P_1}, \quad S'_{1z} = \frac{\cos(P_1, z)}{P_1},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\cos(R, x)}{R}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\cos(R, y)}{R},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\cos(R, z)}{R},$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(P, R)}{PR} \\
&+\left(A\frac{dx^2}{ds^2} + A'\frac{dy^2}{ds^2} + A''\frac{dz^2}{ds^2} + 2B\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B'\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B''\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) \\
&- k\frac{\cos(P_1, R)}{P_1 R} \\
&+\left(A_1\frac{dx^2}{ds^2} + A'_1\frac{dy^2}{ds^2} + A''_1\frac{dz^2}{ds^2} + 2B_1\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B'_1\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B''_1\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) = 0;
\end{aligned}$$

mais, si l'on désigne par d et d_1 les demi-diamètres des surfaces S et S_1 parallèles à la tangente en A à la section normale faite dans la surface S_2, et par x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de leurs extrémités, on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x' - \alpha}{d} = \frac{x'_1 - \alpha_1}{d_1},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y' - \beta}{d} = \frac{y'_1 - \beta_1}{d_1},$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z' - \gamma}{d} = \frac{z'_1 - \gamma_1}{d_1}.$$

L'équation précédente devient alors, en vertu des équations (1) et (2) qui sont vérifiées respectivement par les coordonnées x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1,

$$\frac{\cos(P, R)}{PR} + \frac{1}{d^2} - k\left[\frac{\cos(P_1, R)}{P_1 R} + \frac{1}{d_1^2}\right] = 0,$$

ou

$$(9)\qquad \frac{1}{d^2} - \frac{k}{d_1^2} + \frac{1}{R}\left[\frac{\cos(P, R)}{P} - k\frac{\cos(P_1, R)}{P_1}\right] = 0.$$

Éliminant k entre les équations (8) et (9), il vient

$$\frac{1}{d^2} - \frac{P_1 \sin(P, R)}{P \sin(P_1, R)}\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{R}\left[\frac{\cos(P, R)}{P} - \frac{\sin(P, R)\cos(P_1, R)}{P\sin(P_1, R)}\right] = 0,$$

ou, en multipliant par $P\sin(P_1, R)$,

$$\frac{P}{d^2}\sin(P_1, R) + \frac{1}{R}\sin(P, P_1) = \frac{P}{d_1^2}\sin(P, R).$$

Posons $\frac{d^2}{P} = \Pi$, $\frac{d_1^2}{P_1} = \Pi_1$, et portons ces longueurs Π et Π_1 à partir du point A sur les normales aux plans polaires de S et S_1. Soient ϖ et ϖ_1 leurs extrémités et c le centre de courbure de la section faite dans S_2 par un plan passant par la normale en A.

La relation précédente s'écrit

$$(10)\qquad \frac{\sin(P, P_1)}{R} + \frac{\sin(P_1, R)}{\Pi} = \frac{\sin(P, R)}{\Pi_1},$$

ou

$$\Pi\Pi_1 \sin(P, P_1) + \Pi_1 R \sin(P_1, R) = \Pi R \sin(P, R).$$

Elle exprime que l'aire du triangle $\varpi A c$ est égale à la somme des aires des triangles $\varpi A \varpi_1$ et $\varpi_1 A c$, et, par suite, que les points c, ϖ, ϖ_1 sont en ligne droite. C'est précisément le théorème qu'il fallait démontrer.

Ce théorème donne le moyen de déterminer le centre de courbure d'une section normale de l'une quelconque des surfaces.

La relation (10) peut s'écrire d'une manière plus symétrique

$$(11) \qquad \frac{\sin(P, P_1)}{R} + \frac{\sin(P_1, R)}{\Pi} + \frac{\sin(R, P)}{\Pi_1} = 0.$$

L'angle de deux droites est décrit en allant de la première à la seconde, et deux angles décrits en tournant dans des sens opposés sont de signes contraires.

Nota. — Il est évident que S et S_1 peuvent être deux surfaces quelconques du faisceau.

Question 1021

(voir 2e série, t. X, p. 191) ;

PAR M. GUÉBHARD,

Étudiant en Médecine.

Un mobile est lancé dans une atmosphère dont la résistance varie comme le cube de la vitesse. Si f est la résistance lorsque le mobile descend sous l'inclinaison α à l'horizon, f_0 quand il se meut horizontalement, et f' quand il monte sous l'inclinaison α, on a

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = \frac{2\cos^3\alpha}{f_0},$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g}.$$

(A. WITWORTH.)

Soient k le coefficient de résistance du milieu gazeux ; ω l'angle que fait à un instant quelconque t avec l'axe des x positifs la direction de la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$, et enfin $R = -\frac{ds}{d\omega}$ le rayon de courbure au point correspondant de la trajectoire. Les composantes tangentielle et normale de la force accélératrice auront respectivement pour expressions

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\omega,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -kv^3 - g\sin\omega.$$

De là les deux équations du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = -kv^3 - g\sin\omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g\cos\omega}{v}.$$

Il suffit pour éliminer dt de diviser membre à membre et l'on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{kv^4 + gv\sin\omega}{g\cos\omega}$$

ou

$$\frac{k}{g}d\omega = \cos\omega v^{-4}dv - v^{-3}\sin\omega d\omega.$$

En multipliant les deux membres par $-3\cos^{-4}\omega$, on obtient de part et d'autre des différentielles exactes, et l'intégration est ramenée à une quadrature

$$\cos^{-3}\omega v^{-3} = -3\frac{k}{g}\int\cos^{-4}\omega d\omega = -\frac{k}{g}\frac{\sin\omega(3-2\sin^2\omega)}{\cos^3\omega} + C.$$

Si l'on détermine la constante C par la condition que, pour $\omega = 0$, la résistance $-kv^3$ soit égale à f_0, on obtient l'équation

$$\frac{1}{-kv^3} = \frac{\cos^3\omega}{f_0} + \frac{\sin\omega(3-2\sin^2\omega)}{g}.$$

Si l'on y fait successivement $\omega = \alpha$, $\omega = -\alpha$, il vient

$$\frac{1}{f'} = \frac{\cos^3\alpha}{f_0} + \frac{\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g},$$
$$\frac{1}{f} = \frac{\cos^3\alpha}{f_0} - \frac{\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g}.$$

De là les relations qu'il fallait démontrer

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = \frac{2\cos^3\alpha}{f_0},$$
$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1024

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. KOEHLER.

Lieu des centres des coniques qui ont leurs quatre sommets sur quatre droites données. Construire une conique connaissant cinq droites; sur quatre d'entre elles se trouvent les sommets, sur la cinquième le centre.

(LEMOINE.)

Soient A, B, C, D les quatre droites données; (a, b), (a, c), (a, d), (b, c),... les six sommets du quadrilatère complet.

On reconnaît, *a priori*, que le lieu cherché doit passer par ces six sommets, et qu'il doit se composer de trois lignes distinctes, mais de même nature, correspondant aux trois modes de groupement possibles des sommets opposés des coniques. Ces sommets peuvent être en effet, soit sur A et B, C et D, soit sur A et C, B et D, soit enfin sur A et D, B et C.

J'adopte le premier groupement : soit p un point quelconque de la droite C ; si l'on joint le sommet (ab) au milieu μ d'une transversale quelconque $\alpha\beta$ menée par ce point entre A et B, qu'on élève en p une perpendiculaire sur $\alpha\beta$, l'intersection h de $(ab)\mu$ et de la perpendiculaire décrira une conique lorsque $\alpha\beta$ tournera autour de p ; car il est évident que ph et $(ab)\mu$ sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques. Cette conique est une hyperbole équilatère passant par les points (a, b) et p ; ses asymptotes sont parallèles aux bissectrices des deux angles supplémentaires formés par les droites A, B.

Si maintenant, du point p, on abaisse une perpendiculaire sur D, que par le milieu de cette perpendiculaire on mène D' parallèle à D, les intersections de D' et de l'hyperbole seront les centres de deux coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Lorsque p se déplacera sur la droite C, les hyperboles correspondantes auront toujours leurs asymptotes parallèles aux bissectrices des angles (A, B). Elles passeront toutes par le point (ab) et par un autre point fixe c' sur la droite C. Ce point est tel, que la perpendiculaire à C comprise entre A et B a son milieu en c' ; il s'obtient en menant $(bc)\gamma$ qui fait avec C un angle égal à B(bc)C, et en abaissant $\gamma c'$ perpendiculaire sur C.

Il résulte de là que les hyperboles forment un faisceau de coniques ayant quatre points communs (dont deux à l'infini) ; à chacune d'elles correspond une droite D' parallèle à D, et obtenue comme je l'ai dit plus haut. Le lieu des intersections du faisceau d'hyperboles et du faisceau de droites D' pivotant autour du point à l'infini, sur D, est une courbe du troisième ordre ; mais, dans le cas particulier dont il s'agit, elle se réduit à une conique et à la droite de l'infini. En effet, si l'on cherche la droite

D' correspondant au point P situé à l'infini sur C, on aura une droite à l'infini.

L'hyperbole correspondante se réduit à la droite $(ab)c'$ et à la droite de l'infini : cette dernière appartient donc tout entière à la courbe du troisième ordre. On aura facilement six points de la conique, d'abord les trois (ab), (cd), c', puis trois autres a', b', d' situés respectivement sur A, B, D; a' s'obtient, comme c', en cherchant sur A un point tel, que la perpendiculaire à cette droite comprise entre C et D ait son milieu en ce point.

Les deux autres groupements dont j'ai parlé plus haut conduisent à deux autres coniques qui complètent le lieu géométrique demandé; l'une passe par les points (ac), (bd), l'autre par les points (ad), (bc).

Si l'on donnait pour déterminer une conique les quatre droites A, B, C, D et une cinquième E devant contenir le centre, il faudrait chercher les intersections de E avec les trois coniques dont j'ai indiqué la construction. Le problème admet donc six solutions, et, lorsque les six centres sont déterminés, on voit que les axes correspondants s'obtiennent sans difficulté.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc,

Question 1053

(voir 2^e série, t. X, p. 558);

PAR M. E. PELLET.

Trouver une surface (M) *telle, qu'en abaissant d'un point* M *de* (M) *une perpendiculaire* MP *sur un plan* (P), *et menant par* P *une parallèle* PN *à la normale en* M *à* (M), *les droites ainsi obtenues soient normales à une surface.* (RIBAUCOUR.)

Je prends le plan (P) pour plan des xy, et soit

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

l'équation du plan tangent à la surface (M) mené par le point x, y, z de cette surface. Les équations de PN sont

$$\frac{X-x}{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}=\frac{Y-y}{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}=\frac{Z}{\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}},$$

et, pour que ces droites soient normales à une surface, il faut que l'on ait

$$\frac{d\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}=\frac{d\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \quad (*),$$

de sorte que $\frac{p\,dx+q\,dy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ est une différentielle exacte, ce qui exige que p^2+q^2 soit une fonction de z. Ainsi

$$(1) \qquad p^2+q^2=\varphi(z).$$

Il est facile d'avoir une intégrale *complète* de l'équation aux dérivées partielles (1). Posons

$$(2) \qquad x\cos\alpha+y\sin\alpha-a=f(z),$$

α et a étant des constantes arbitraires; il viendra

$$\cos\alpha=f'(z)p,$$
$$\sin\alpha=f'(z)q,$$

par suite

$$p^2+q^2=\frac{1}{f'(z)^2}.$$

Donc l'équation (2) sera une intégrale complète de l'équation (1) si $f(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{f'(z)^2}=\varphi(z).$$

$f(z)$ étant choisi de manière à satisfaire à cette équation,

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 674.

l'intégrale générale de l'équation (1) s'obtiendra en éliminant α entre les deux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - \psi(\alpha) = f(z), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - \psi'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

$\psi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de α.

Les sections d'une quelconque de ces surfaces (3) par des plans parallèles au plan des xy donnent en projection sur le plan des xy des courbes parallèles.

La surface (3) peut, quelles que soient les fonctions ψ et f, être engendrée par une courbe située dans un plan qui roule sans glisser sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Il est évident que, réciproquement, une telle surface peut être représentée par les équations (3), où f et ψ sont déterminées convenablement.

La proposition à laquelle nous sommes arrivé est susceptible d'une généralisation, et peut s'énoncer ainsi :

Considérons une surface développable (D), et, dans un de ses plans tangents (P), deux courbes (C) et (C_1). Lorsque le plan (P) roule sur la surface (D) sans glisser, les courbes (C) et (C_1) engendrent des surfaces (S) et (S_1) auxquelles le plan (P) est constamment normal en tous les points de son intersection, de sorte que la courbe (C) dans toutes ses positions est une ligne de courbure de (S) et (C_1) de (S_1) (*). Cela posé, par un point M de (S) élevons la normale à cette surface, et soit M_1 son intersection avec (S_1). Menons par le point M une parallèle MN à la normale en M_1 à (S_1); les droites ainsi obtenues sont normales à une surface.

En effet, la normale à (S_1) menée par le point M est située dans le plan (P) qui correspond à ce point M; la normale en M_1 à (S_1) est située dans ce même plan,

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 725.

et, si l'on fait varier M sur la courbe (C) correspondant à la position considérée du plan (P), les droites MN admettront un système de trajectoires orthogonales. Soit C_2 l'une d'elles. Elle décrit dans le mouvement du plan (P) une surface (S_2) qui est évidemment normale à toutes les droites MN.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1085

(voir 2ᵉ série, t. XI, p 288);

Par M. H. D.

Un point matériel se meut sur une courbe quelconque, et la force accélératrice est dirigée constamment vers le centre de courbure de sa développée; l'aire parcourue par son rayon de courbure est proportionnelle au temps. Examiner le cas où le point se meut sur une développante de cercle. (N. Nicolaïdès.)

Soient ρ, ρ' les rayons de courbure de la trajectoire et de sa développée, v la vitesse du mobile M; ds, ds' les arcs MM′, CC′, qui se correspondent sur les deux courbes. La force accélératrice étant dirigée vers le centre de courbure de la développée, le rayon de courbure ρ s'enroule sur cette courbe, et l'on a

$$ds' = - d\rho.$$

D'autre part, l'hypothèse faite dans l'énoncé signifie que le rapport des composantes tangentielle et normale de la force accélératrice est égal au rapport des rayons de courbure de la développée et de la trajectoire. On a donc

$$\frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{ds'}{ds} = - \frac{\dfrac{d\rho}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} = - \frac{1}{v}\frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$v\rho = k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on désigne par $d\Lambda$ l'accroissement OMM' de l'aire décrite par la droite MO, suivant laquelle est dirigée la force accélératrice; par $d\lambda$, $d\lambda'$ les aires élémentaires correspondantes décrites par les rayons de courbure de la trajectoire et de la développée, par $d\tau$ l'accroissement de l'aire du triangle MCO, on a évidemment, dans le cas général,

$$d\Lambda - (d\lambda + d\lambda') = - d\tau,$$

ou

$$d\Lambda - d\lambda = d\lambda' - d\tau.$$

Or, dans le cas de la développante de cercle, on voit facilement que

$$d\lambda' = d\tau;$$

donc

$$d\Lambda = d\lambda,$$

c'est-à-dire que *l'aire décrite par le rayon de courbure de la développante de cercle est égale à l'aire décrite par le rayon vecteur du mobile relatif au centre du cercle.*

Or celle-ci est évidemment proportionnelle au temps, puisque la force accélératrice passe par un point fixe : il devait donc en être de même de la première.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1122

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. E. DEWULF.

Le lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites non dans un même plan est *un conoïde droit; chercher ses sections par des plans parallèles à son axe.* (A. DE SAINT-GERMAIN.)

Un quelconque des paraboloïdes qui satisfont à la question est déterminé si l'on se donne le second plan directeur; et, pour les obtenir tous, il suffit de donner à ce plan toutes les positions possibles dans l'espace.

Soient A_1, A_2 les deux droites données dans l'espace; α le plan parallèle à ces droites. Soient β le second plan directeur, X son intersection avec α : menons un plan perpendiculaire à X, il coupera α suivant a et β suivant b.

On obtiendra le sommet du paraboloïde $[A_1, A_2, \beta]$, en cherchant la droite b_n parallèle à b, qui s'appuie sur les directrices A_1 et A_2, puis la droite a_n parallèle à a, qui s'appuie sur deux des génératrices du paraboloïde, et en prenant l'intersection de ces droites a_n et b_n.

Supposons d'abord que le plan β tourne autour de X, la droite a restera fixe, la droite b décrira le plan perpendiculaire à X. Chacune des positions de β détermine un paraboloïde et une droite b_n; ces droites b_n, toutes parallèles au plan (ab) et s'appuyant sur A_1 et A_2, engendrent un paraboloïde isoscèle P. Tous les paraboloïdes qui correspondent aux positions de β, tournant autour de X, forment un faisceau dont la base se compose de A_1, A_2 et de la droite à l'infini qui s'appuie sur ces deux droites, et est parallèle à X; les droites a_n dans chacun de ces paraboloïdes s'appuient toujours sur cette droite de l'infini, et, comme elles sont toutes parallèles à la direction fixe a, elles engendrent un plan parallèle au plan (Xa) ou α. Or ce plan coupe le paraboloïde P suivant une directrice a_n; donc les sommets de tous les paraboloïdes qui correspondent aux positions du plan β, qui passent par X, sont sur une génératrice du paraboloïde P.

Imaginons maintenant que a tourne, dans le plan α, autour de son point d'intersection avec X; chacune des positions de a détermine un faisceau de paraboloïdes satisfaisant à la question et un paraboloïde isoscèle P. Tous ces paraboloïdes isoscèles P ont une génératrice commune, celle qui est parallèle à la commune intersection des plans (ab), c'est-à-dire la perpendiculaire commune à A_1 et A_2, que je désigne par $p_1 p_2$. Les directrices a_n des paraboloïdes P s'appuient toutes sur $p_1\, p_2$ et sont parallèles au plan α : elles engendrent donc un conoïde droit, qui est le lieu cherché.

On peut dire que ce conoïde est le lieu des intersections des surfaces correspondantes de deux faisceaux homographiques : le faisceau des paraboloïdes P et un faisceau de plans parallèles à α; ce conoïde est donc du troisième degré; et, par suite, les sections par des plans parallèles à son axe sont des courbes du troisième degré.

Le théorème de M. de Saint-Germain renferme, comme cas particulier, cet autre théorème élégant : *Le lieu des sommets des paraboloïdes isoscèles qui passent par deux droites quelconques* A_1, A_2 *est la perpendiculaire commune à* A_1 *et à* A_2.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et M. B. Launoy.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — A propos de la question n° 1029, d'ailleurs très-élégamment résolue par M. Pellissier, je ferai remarquer que c'est la développante de l'enveloppe d'une droite égale à $2l$ et dont les extrémités glissent sur OA et OB. La même chose a d'ailleurs lieu quel que soit le point de AB par lequel on mène la perpendiculaire à cette droite. Soit $A'B'$ la droite double de AB. Si par le milieu de $A'B'$ je mène une perpendiculaire à cette droite, elle sera normale à l'enveloppe de AB; d'ailleurs la portion de $A'B'$ comprise entre les bissectrices de l'angle droit est égale à 2AB, et enveloppe une courbe de la même espèce de dimensions doubles; de là ce théorème qui n'est peut-être pas connu :

La développée de l'enveloppe d'une droite de longueur fixe et dont les extrémités glissent sur les deux côtés d'un angle droit est une courbe semblable, de dimensions doubles, et qui deviendra homothétique à la première, si on la fait tourner de 45 degrés.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — Lorsqu'on cherche le lieu des normales à une surface du second ordre parallèles à un même plan, on est amené à éliminer u entre les deux équations

$$\frac{\alpha x}{a^2 - u} + \frac{\beta y}{b^2 - u} + \frac{\gamma z}{c^2 - u} = 0,$$

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - u)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - u)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 - u)^2} = 1;$$

mais on peut arriver à l'équation du lieu plus simplement, par une autre voie, et trouver ainsi indirectement le résultat de l'élimination de u entre les deux équations précédentes.

Il me semble donc que l'élimination directe devrait fournir à la sagacité de l'opérateur quelque artifice intéressant, au point de vue du calcul. Voyez si vous trouvez le problème digne d'être présenté à vos lecteurs.

Extrait d'une lettre de M. L. Painvin. — La formule que j'ai donnée, p. 282, t. XIII, 1874, et que je croyais nouvelle, est connue depuis fort longtemps; on la trouve démontrée dans la *Théorie des déterminants*, par Baltzer (traduction de M. Hoüel), page 82.

La formule en question est relative à la méthode d'élimination de Bezout; ce procédé, employé par Bezout (*Histoire de l'Académie de Paris*, p. 317, 1764), a été repris et éclairci par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 15, p. 101), et par Cauchy (*Exercices d'Analyse*, 1840, p. 393). Ces indications sont extraites de Baltzer.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Intorno ad alcune lettere del Lagrange. Nota di A. Genocchi. Stamperia reale di G. B. Paravia e C^ia, 1874. Estr. dagli *Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, vol. IX. Adunanza del 21 giugno 1874.

QUESTION.

1153. Un point pesant est placé au pôle d'une spirale logarithmique sans masse ayant avec une droite horizontale assez d'adhérence pour y rouler sans glissement sous l'action du poids de son pôle. On demande d'étudier : la loi du mouvement de la spirale en le décomposant en translation avec le pôle et rotation autour de ce pôle; l'enveloppe des diverses spires de la spirale, de sa développée, de la développée de cette développée et généralement de la développée d'ordre n; la loi de succession avec le temps de leurs points de contact avec leurs enveloppes; le lieu des centres de courbure de chacune d'elles correspondant à tout instant sur ces développées successives au point d'appui de la spirale roulante et leur loi de succession avec le temps. (Haton de la Goupillière.)

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES PROPRIÉTÉS DE L'INDICATRICE D'UNE SURFACE;

PAR M. POINCARÉ,
Élève de l'École Polytechnique.

I. — *Variation du rayon de courbure des sections d'une surface menées par un point de cette surface.*

Considérons d'abord les sections normales et cherchons à démontrer le théorème suivant :

Si, sur la trace de chaque section normale sur le plan tangent, on prend à partir du point de contact des longueurs proportionnelles à la racine carrée du rayon de courbure de cette section, le lieu ainsi obtenu est une conique.

Soient, en effet, A le point de contact, AN la normale. Considérons trois sections normales quelconques, et dans chacune de ces sections menons une parabole qui ait pour sommet A, pour axe AN et qui soit osculatrice à cette section; par ces trois paraboles, je puis faire passer un paraboloïde.

Considérons l'intersection de la surface et du paraboloïde : chacune des trois paraboles, qui rencontre la surface en trois points confondus au point A, rencontrera aussi cette intersection en trois points confondus au point A.

En général, deux surfaces tangentes entre elles ont pour intersection une courbe qui offre un point double au point A; mais, dans ce cas, les seules courbes qui rencontrent cette intersection en trois points confondus au point A sont celles qui touchent une de ses tangentes au point A. Or les trois paraboles que nous considérons ne se touchent pas ; il faut donc admettre que la courbe a un point triple au point A ; mais alors toutes les paraboles tracées sur le paraboloïde et ayant pour axe AN rencontreront la courbe en trois points confondus, et par suite seront osculatrices à la section correspondante.

Or le rayon de courbure d'une parabole en son sommet n'est autre que son paramètre. Si, à une distance quelconque du plan tangent, on coupe le paraboloïde par un plan perpendiculaire à l'axe, les rayons vecteurs de la section sont proportionnels à la racine carrée du paramètre de la parabole correspondante, et, par suite, du rayon de courbure de la section correspondante : donc le lieu défini dans l'énoncé est une conique que nous appellerons *indicatrice* de la surface au point A ; ce qu'il fallait démontrer.

Au lieu de considérer des paraboles, on pouvait prendre des coniques tangentes à un plan donné P en un point B de AN, et l'on aurait obtenu une surface du second ordre osculatrice, tangente à P en B.

La même méthode est applicable au théorème de Meusnier :

Le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur son plan du rayon de courbure de la section normale qui a même trace sur le plan tangent.

Considérons, en effet, une sphère ayant pour rayon le rayon de courbure de la section normale considérée : son intersection avec la surface présentera un point double au point A. Comme son grand cercle, qui est situé dans le plan de la section normale, rencontre la surface, et, par conséquent, cette intersection en trois points confondus, il touche une des tangentes à la courbe au point A. Or il touche aussi le petit cercle situé dans le plan de la section oblique ; donc ce petit cercle est dans les mêmes conditions, et par conséquent est osculateur à cette section oblique. Or le rayon du petit cercle est la projection de celui du grand cercle ; de même le rayon de la section oblique est la projection de celui de la section normale. C. Q. F. D.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers du théorème général suivant :

Les rayons de courbure des différentes sections passant par une droite donnée sont entre eux comme les produits des rayons vecteurs d'une certaine conique située dans un plan perpendiculaire à cette droite par leur projection sur le plan tangent.

En effet, par des raisonnements identiques aux précédents, on démontrerait que les sections de la surface ont mêmes rayons de courbure que celles d'un paraboloïde passant par le point à l'infini sur cette droite.

Or le rayon de courbure d'une parabole en un de ses points est égal au paramètre divisé par le cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe. Cette quantité, si l'on mène un plan CB parallèle au plan tangent, est proportionnelle au carré de CB divisé par ce même cosinus, c'est-à-dire au produit de CB par DB, D étant le point d'un plan DB perpendiculaire à AB, dont la projection sur le plan CB est le point C. Or le lieu des points D est évidemment une conique dont la projection sur le plan CB est l'intersection de ce plan et du paraboloïde ; donc le théorème est démontré.

Pour donner aux démonstrations précédentes tout leur rigueur, il est nécessaire de faire voir clairement pourquoi, si une courbe tracée sur une surface S rencontre en trois points confondus une surface Σ, elle rencontrera de même en trois points confondus l'intersection des deux surfaces, et réciproquement. En effet, on dit qu'une courbe rencontre une surface en trois points confondus lorsqu'elle passe de la région située au-dessous de cette surface à la région située au-dessus, tout en touchant cette surface. Or l'intersection des deux surfaces partage la surface S en deux régions, et il est évident que la courbe considérée doit toucher l'intersection, et de plus passer d'une de ces régions dans l'autre. Il peut se présenter trois cas : ou bien le point A est un point simple de l'intersection, et alors la courbe, pour passer d'une région dans l'autre, doit lui être osculatrice au point A ; ou bien le point A est un point double, et la courbe doit être tangente à l'une des branches de courbe ; ou bien le point A est un point triple, et la condition est remplie d'elle-même.

II. — *Propriétés de l'indicatrice. Théorème des tangentes conjuguées.*

Considérons deux surfaces tangentes entre elles en un point A, leur intersection offre un point double en ce point. Cherchons les tangentes en ce point double : traçons les indicatrices des deux surfaces en ce point, et considérons les deux diamètres communs à ces deux coniques concentriques. Si, par l'un d'eux, on mène une section normale, les deux sections déterminées dans les deux surfaces sont osculatrices ; l'une d'elles rencontre donc l'autre surface, et par suite l'intersection, en trois points confondus ; elle est donc tangente à l'une des branches de courbe, d'où il suit que :

Les tangentes au point double sont les diamètres communs aux deux indicatrices.

Supposons, en particulier, que l'une des surfaces se réduise au plan tangent ; alors son indicatrice se réduit à la droite de l'infini et les diamètres communs aux asymptotes. Donc :

Les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes à l'intersection de la surface et du plan tangent.

Supposons maintenant que l'on considère une développable circonscrite à la surface le long d'une courbe donnée. L'indicatrice de la développable se réduit à deux droites parallèles, et, comme les deux tangentes au point double doivent se confondre, les deux indicatrices sont bitangentes, c'est-à-dire que :

La tangente à la courbe de contact est conjuguée de la direction de la génératrice de la développable.

Ce théorème est susceptible d'une démonstration directe dans le cas où la développable se réduit à un cône.

Soient S le sommet du cône, Σ la surface, A un point de la courbe de contact. Considérons une droite quelconque passant par S et qui coupe Σ en B et en C, et considérons la surface T lieu des points M conjugués harmoniques de S par rapport à BC ; elle coupe la surface Σ suivant la courbe de contact, et la tangente à cette courbe n'est autre que l'intersection des deux plans tangents, c'est-à-dire la tangente à la trace de la surface T sur le plan tangent en A à Σ. Considérons une sécante très-voisine de SA. Il est évident que les droites SA, BA, MA, CA forment un faisceau harmonique, et, à la limite, il en sera de même de SA, des tangentes en A à la courbe BAC, c'est-à-dire des asymptotes de l'indicatrice et de la tangente à la courbe de contact ; ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de trouver le plan osculateur en un point de l'intersection de deux surfaces. En effet, l'intersection d'une des surfaces par ce plan osculateur doit être osculatrice à la courbe ; car elle offre évidemment même tangente et, de plus, elle traverse la courbe, puisque le plan la traverse lui-même. Donc les intersections des deux surfaces par le plan osculateur ont même rayon de courbure et, par conséquent, même centre de courbure. Or, le lieu des centres de courbure des sections passant par la tangente étant, pour chaque surface, une circonférence, l'intersection de ces deux lignes donnera le plan osculateur.

III. — *Surfaces osculatrices d'ordre supérieur. Rayon de courbure aux points coniques.*

Une méthode tout à fait identique peut servir à démontrer l'existence des surfaces osculatrices d'ordre quelconque; appliquons-la en particulier au plan tangent, nous arriverons à démontrer que, si par deux droites qui rencontrent la surface en deux points confondus on mène un plan, toutes les droites de ce plan passant par le point A jouiront de cette propriété. Supposons maintenant qu'il existe en dehors de ce plan une droite qui rencontre la surface en deux points confondus; il est évident qu'il en sera de même de toutes les droites de l'espace passant par le point A. Ce sont ces points que l'on appelle *points coniques*.

Considérons un cône; il est évident qu'une courbe présentant un point simple au sommet ne suffit pas pour partager le cône en deux régions, comme il est aisé de s'en assurer en développant la surface du cône. Pour étudier cette question, considérons une surface ordinaire partageant l'espace en deux régions : son intersection avec le cône offrira un point d'ordre m au sommet, m étant le degré du cône. Il en résulte évidemment que, si toutes les génératrices d'un cône de degré m rencontrent une surface en n points confondus, la courbe d'intersection offre un point d'ordre mn au sommet. Il en est de même si, au lieu d'un cône, on considère une surface tangente à ce cône en son sommet.

Supposons donc que toutes les droites passant par A rencontrent la surface en deux points confondus; cherchons le lieu de celles de ces droites qui la rencontrent en trois points confondus. Considérons cinq de ces droites, elles définissent un cône du second ordre; il est évident que la courbe d'intersection du cône et de la surface a au moins cinq tangentes au sommet, ce qui prouve que chaque génératrice du cône rencontre la surface en trois points confondus, sans quoi la courbe n'aurait qu'un point quadruple au sommet. On a ainsi un point conique du second ordre, et l'on obtiendrait de même des points coniques d'ordre supérieur.

Considérons maintenant les différents plans passant par une même droite AN, et, dans chacun de ces plans, menons les paraboles osculatrices à la surface au point A et passant par le point à l'infini sur AN. Envisageons sept de ces paraboles : elles définissent une surface du quatrième ordre, car leurs traces sur un plan quelconque se composant de quatorze points y définissent une courbe du quatrième degré. Or sept des paraboles génératrices de la surface du quatrième ordre rencontrent la surface donnée en quatre points confondus ; il est clair que la courbe d'intersection présente au sommet un point d'ordre 8, et que, par suite, il en est de même de toutes les paraboles génératrices : donc, la surface donnée est osculatrice à une surface du quatrième ordre.

Maintenant, supposons que, par un point S situé sur AN, on mène un cône parallèle au cône tangent à la surface, il rencontrera la surface du quatrième ordre suivant une courbe du huitième degré ; or il est évident que des points tels que D et B, situés sur une génératrice SB et sur la parabole tangente à cette génératrice, et les autres points de l'intersection, tels que C, engendrent deux courbes distinctes et qui sont forcément chacune du quatrième ordre. Donc le lieu des points B est l'intersection du cône avec une surface du second ordre. Or le rayon de courbure de la parabole ADB est proportionnel au carré de DS, divisé par le sinus de l'angle ASD ; on peut donc représenter facilement la variation du rayon de courbure des sections de la surface.

DE LA CONSTRUCTION DU POLYGONE DE 17 COTÉS, D'APRÈS M. SCHRŒTER.

(Extrait du *Journal de Crelle*, t. LVII, 1er cahier, traduit de l'allemand par un ABONNÉ.)

Si nous désignons les cosinus des arcs

$$\frac{2\pi}{17},\quad 2\,\frac{2\pi}{17},\quad 3\,\frac{2\pi}{17},\quad 4\,\frac{2\pi}{17},\ldots,\quad 8\,\frac{2\pi}{17}$$

respectivement par

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ldots,\ C_8,$$

nous pourrons, en vertu de la formule

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

et des égalités

$$C_9 = C_8,\quad C_{10} = C_7,\quad C_{11} = C_6,\ldots,\quad C_{16} = C_1,$$

écrire les huit groupes de relations ci-dessous :

$$\begin{array}{ll}
2C_1C_1 = C_2 + 1, & 2C_2C_1 = C_3 + C_1,\\
2C_1C_2 = C_3 + C_1, & 2C_2C_2 = C_4 + 1,\\
2C_1C_3 = C_4 + C_2, & 2C_2C_3 = C_5 + C_1,\\
2C_1C_4 = C_5 + C_3, & 2C_2C_4 = C_6 + C_2,\\
2C_1C_5 = C_6 + C_4, & 2C_2C_5 = C_7 + C_3,\\
2C_1C_6 = C_7 + C_5, & 2C_2C_6 = C_8 + C_4,\\
2C_1C_7 = C_8 + C_6, & 2C_2C_7 = C_8 + C_5,\\
2C_1C_8 = C_8 + C_7; & 2C_2C_8 = C_7 + C_6;
\end{array}$$

$$2C_3C_1 = C_4 + C_2, \qquad 2C_4C_1 = C_5 + C_3,$$
$$2C_3C_2 = C_5 + C_1, \qquad 2C_4C_2 = C_6 + C_2,$$
$$2C_3C_3 = C_6 + 1, \qquad 2C_4C_3 = C_7 + C_1,$$
$$2C_3C_4 = C_7 + C_1, \qquad 2C_4C_4 = C_8 + 1,$$
$$2C_3C_5 = C_8 + C_2, \qquad 2C_4C_5 = C_8 + C_1,$$
$$2C_3C_6 = C_8 + C_3, \qquad 2C_4C_6 = C_7 + C_2,$$
$$2C_3C_7 = C_7 + C_4, \qquad 2C_4C_7 = C_6 + C_3,$$
$$2C_3C_8 = C_6 + C_5; \qquad 2C_4C_8 = C_5 + C_4;$$

$$2C_5C_1 = C_6 + C_4, \qquad 2C_6C_1 = C_7 + C_5,$$
$$2C_5C_2 = C_7 + C_3, \qquad 2C_6C_2 = C_8 + C_4,$$
$$2C_5C_3 = C_8 + C_2, \qquad 2C_6C_3 = C_8 + C_3,$$
$$2C_5C_4 = C_8 + C_1, \qquad 2C_6C_4 = C_7 + C_2,$$
$$2C_5C_5 = C_7 + 1, \qquad 2C_6C_5 = C_6 + C_1,$$
$$2C_5C_6 = C_6 + C_1, \qquad 2C_6C_6 = C_5 + 1,$$
$$2C_5C_7 = C_5 + C_2, \qquad 2C_6C_7 = C_4 + C_1,$$
$$2C_5C_8 = C_4 + C_3; \qquad 2C_6C_8 = C_3 + C_2;$$

$$2C_7C_1 = C_8 + C_6, \qquad 2C_8C_1 = C_8 + C_7,$$
$$2C_7C_2 = C_8 + C_5, \qquad 2C_8C_2 = C_7 + C_6,$$
$$2C_7C_3 = C_7 + C_4, \qquad 2C_8C_3 = C_6 + C_5,$$
$$2C_7C_4 = C_6 + C_3, \qquad 2C_8C_4 = C_5 + C_4,$$
$$2C_7C_5 = C_5 + C_2, \qquad 2C_8C_5 = C_4 + C_3,$$
$$2C_7C_6 = C_4 + C_1, \qquad 2C_8C_6 = C_3 + C_2,$$
$$2C_7C_7 = C_3 + 1, \qquad 2C_8C_7 = C_2 + C_1,$$
$$2C_7C_8 = C_2 + C_1; \qquad 2C_8C_8 = C_1 + 1.$$

Posons

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 = S;$$

il est facile de trouver immédiatement la valeur de S.

En effet, si nous ajoutons, membre à membre, les équations du premier groupe, par exemple, il vient

$$2C_1S = 2S + 1 - C_1,$$

ou bien

$$2S(1 - C_1) = C_1 - 1,$$

d'où

$$S = -\frac{1}{2}.$$

Considérons actuellement les huit groupes ci-dessus et choisissons, dans chacun d'eux, les quatre relations pour lesquelles la somme des seconds membres est égale à S; on arrivera ainsi, en ajoutant membre à membre, aux huit égalités qui suivent :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
2C_1(C_2 + C_3 + C_6 + C_7) &= S,\\
2C_2(C_3 + C_4 + C_5 + C_6) &= S,\\
2C_3(C_1 + C_4 + C_6 + C_8) &= S,\\
2C_4(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) &= S,\\
2C_5(C_1 + C_2 + C_4 + C_7) &= S,\\
2C_6(C_1 + C_2 + C_4 + C_8) &= S,\\
2C_7(C_2 + C_3 + C_4 + C_8) &= S,\\
2C_8(C_1 + C_3 + C_5 + C_7) &= S.
\end{aligned}\right.$$

Si nous extrayons du tableau préliminaire les quatre relations

$$\begin{aligned}
2C_3C_6 &= C_3 + C_8,\\
2C_5C_7 &= C_2 + C_5,\\
2C_3C_7 &= C_4 + C_7,\\
2C_5C_6 &= C_1 + C_6,
\end{aligned}$$

nous trouverons, en ajoutant membre à membre,

$$2(C_3C_6 + C_5C_7 + C_3C_7 + C_5C_6) = S,$$

ou bien

$$2(C_3 + C_5)(C_6 + C_7) = S.$$

Or

$$C_3 + C_5 = 2C_4C_1,$$
$$C_6 + C_7 = C_6 + C_{10} = 2C_2C_8,$$

et, par conséquent,

$$8C_1C_2C_4C_8 = S.$$

D'autre part, nous avons

$$2C_1C_2 = C_1 + C_3,$$
$$2C_4C_8 = C_4 + C_5,$$
$$2C_1C_8 = C_7 + C_8,$$
$$2C_2C_4 = C_2 + C_6,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$(2)\quad 2(C_1C_2 + C_4C_8 + C_1C_8 + C_2C_4) = 2(C_1 + C_4)(C_2 + C_8) = S;$$

mais

$$C_1 + C_4 = 2C_6C_7,$$
$$C_2 + C_8 = 2C_3C_5,$$

d'où

$$8C_3C_5C_6C_7 = S.$$

Cela posé, extrayons des huit relations (1) les quatre suivantes, que nous écrirons

$$(3)\quad \begin{cases} 2C_1(C_3 + C_6 + C_7) + 2C_1C_2 = S, \\ 2C_2(C_3 + C_5 + C_6) + 2C_2C_4 = S, \\ 2C_4(C_5 + C_6 + C_7) + 2C_4C_8 = S, \\ 2C_8(C_3 + C_5 + C_7) + 2C_1C_8 = S, \end{cases}$$

et joignons-y

$$(2)\qquad 2C_1C_2 + 2C_2C_4 + 2C_4C_8 + 2C_1C_8 = S.$$

Ajoutons ensuite, membre à membre, les égalités

$$2C_1C_5 = C_4 + C_6,$$
$$2C_2C_7 = C_8 + C_5,$$
$$2C_4C_3 = C_1 + C_7,$$
$$2C_8C_6 = C_3 + C_2,$$

il viendra

$$(4)\qquad 2C_1C_5 + 2C_2C_7 + 2C_4C_3 + 2C_8C_6 = S.$$

Ajoutons également les égalités (3), et remplaçons le premier membre de (2) par le premier membre (4), nous aurons

$$2C_1(C_3+C_6+C_7)+2C_2(C_3+C_5+C_6)+2C_4(C_5+C_6+C_7)$$
$$+2C_8(C_2+C_5+C_7)+2(C_1C_5+C_2C_7+C_4C_3+C_8C_6)=4S,$$

ou bien encore

$$(C_1+C_2+C_4+C_8)(C_3+C_5+C_6+C_7)=2S=-1.$$

Posons

$$2(C_1+C_2+C_4+C_8)=x,$$
$$2(C_3+C_5+C_6+C_7)=x_1,$$

et il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} x+x_1=-1, \\ xx_1=-4; \end{cases}$$

x et x_1 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$X^2+X-4=0.$$

Nous supposerons que x représente la racine positive, et x_1 la racine négative de cette équation.

Ces racines étant trouvées, posons

$$2(C_1+C_4)=y,$$
$$2(C_2+C_8)=y_1,$$

et il vient

$$y+y_1=2(C_1+C_4+C_2+C_8)=x,$$
$$yy_1=4(C_1+C_4)(C_2+C_8)=16C_3C_5C_6C_7=2S=-1;$$

y et y_1 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$Y^2-xY-1=0.$$

Nous supposerons que y représente la racine positive et y_1 la racine négative.

Si l'on pose ensuite

$$2(C_3+C_5)=z,$$
$$2(C_6+C_7)=z_1,$$

nous aurons

$$z+z_1=x_1,$$
$$zz_1=-1,$$

et l'équation

$$Z^2 - x_1 Z - 1 = 0$$

admettra les racines z et z_1, z étant la racine positive et z_1 la racine négative.

On pourra, en conséquence, déterminer

$$C_1 \text{ et } C_4, \quad C_3 \text{ et } C_5, \quad C_2 \text{ et } C_8, \quad C_6 \text{ et } C_7.$$

En effet,

$$2(C_1 + C_4) = y \quad \text{et} \quad 2(C_3 + C_5) = 2C_1 . 2C_4 = z;$$

$2C_1$ et $2C_4$ sont donc les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - yu + z = 0.$$

Les termes des autres groupes, ci-dessus mentionnés, se trouveront d'une manière analogue; car nous avons

$$2C_3 + 2C_5 = z,$$
$$2C_3 . 2C_5 = y_1,$$

$$2C_2 + 2C_8 = y_1,$$
$$2C_2 . 2C_8 = z,$$

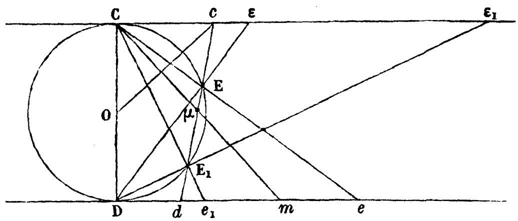
$$2C_6 + 2C_7 = z_1,$$
$$2C_6 . 2C_7 = y.$$

Les huit quantités $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_8$ ne dépendent donc que d'équations du second degré, et, dès lors, la construction du polygone de dix-sept côtés pourra être effectuée au moyen de la ligne droite et du cercle.

Nous allons montrer comment on peut n'employer pour cette construction que le cercle dans lequel il s'agit d'inscrire le polygone, et comment on peut ramener la solution du problème à l'intersection de ce cercle avec certaines droites dont la position est déterminée par les coefficients des équations du second degré établies ci-dessus.

La construction en question repose sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit tracé un cercle de rayon* 1, *et, aux extrémités du diamètre* CD, *menons les tangentes* (C) *et* (D) *parallèles entre elles. Prenons un point c sur la*



tangente (C) *et menons la transversale cd qui rencontre le cercle en* E *et* E_1 ; *joignons* CE *et* CE_1 *qui rencontrent la tangente* (D) *aux points e et* e_1. *On aura*

$$De + De_1 = \frac{4}{Cc},$$

$$De \times De_1 = 4\frac{Dd}{Cc}.$$

En effet, menons la corde contact Cm des tangentes issues du point c, ou, en d'autres termes, la polaire du point c ; elle coupera la transversale cd en μ et les quatre points c, E, μ et E_1 seront harmoniques. Considérons, d'ailleurs, le faisceau Cc, CE, $C\mu$, CE_1, il sera coupé par la tangente (D) aux points e, m, e_1, le quatrième point étant à l'infini ; donc le point m est le milieu de ee_1, et l'on aura

$$De + De_1 = 2Dm.$$

D'ailleurs les deux triangles semblables CDm et COc donnent

$$\frac{Dm}{CD} = \frac{CO}{Cc}, \quad \text{ou} \quad Dm = \frac{2}{Cc},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{D}e + \mathrm{D}e_1 = \frac{4}{\mathrm{C}c}.$$

D'autre part, si nous menons $\mathrm{C}\varepsilon$ et $\mathrm{C}\varepsilon_1$, nous aurons évidemment

$$\mathrm{C}\varepsilon + \mathrm{C}\varepsilon_1 = \frac{4}{\mathrm{D}d}.$$

Mais les triangles semblables $\mathrm{CD}e$ et $\mathrm{CD}\varepsilon$ donnent

$$\frac{\mathrm{C}\varepsilon}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{D}e},$$

ou

$$\mathrm{C}\varepsilon = \frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{\mathrm{D}e} = \frac{4}{\mathrm{D}e}.$$

On aurait de même

$$\mathrm{C}\varepsilon_1 = \frac{4}{\mathrm{D}e_1},$$

d'où

$$\mathrm{C}\varepsilon + \mathrm{C}\varepsilon_1 = 4\left(\frac{1}{\mathrm{D}e} + \frac{1}{\mathrm{D}e_1}\right) = 4\,\frac{\mathrm{D}e + \mathrm{D}e_1}{\mathrm{D}e \times \mathrm{D}e_1},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\mathrm{D}d} = \frac{4}{\mathrm{C}c} \times \frac{1}{\mathrm{D}e \times \mathrm{D}e_1},$$

ce qui revient à

$$\mathrm{D}e \times \mathrm{D}e_1 = 4\,\frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{C}c}.$$

Le théorème est donc démontré.

Il résulte de ce théorème que $\mathrm{D}e$ et $\mathrm{D}e_1$ sont les racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont connus. Ils dépendent, en effet, des deux segments $\mathrm{C}c$ et $\mathrm{C}d$, lesquels sont déterminés par la position de la transversale cd. Ces segments, aussi bien que les longueurs De et De_1 et toutes celles, en un mot, qui seront portées sur les tangentes parallèles (C) et (D) sont susceptibles de prendre des signes. Nous compterons, à partir des points C et D, les longueurs positives de gauche à droite et les longueurs négatives de droite à gauche. Ces préliminaires établis, la solution du problème est des plus faciles.

Reprenons les équations

$$x + x_1 = -1,$$
$$xx_1 = -4,$$

et comparons-les avec

$$De + De_1 = \frac{4}{Cc},$$
$$De \times De_1 = 4\frac{Dd}{Cc}.$$

Pour que De et De_1 représentent les valeurs de x et de x_1, il suffit de prendre $Cc = -4$ et $Dd = +4$.

Nous mènerons, en conséquence, aux extrémités du cercle de rayon 1, deux tangentes (C) et (D). Nous prendrons sur la direction négative de la tangente (C) une longueur Cc égale au double du diamètre et sur la partie positive de la tangente (D) une longueur égale Dd. Nous joindrons cd qui coupera le cercle en E et E_1; puis nous mènerons CE et CE_1 rencontrant la tangente (D) en e et e_1, e étant sur la partie positive et e_1 sur la partie négative de la droite (D).

On aura, d'après cela,

$$De = x = 2(C_1 + C_2 + C_4 + C_8),$$
$$De_1 = x_1 = 2(C_3 + C_5 + C_6 + C_7).$$

Nous avons ensuite

$$y + y_1 = x = De,$$
$$yy_1 = -1.$$

Pour construire y et y_1, joignons DE qui rencontre la tangente (C) en ε. Prenons $Di = 1$ et joignons ic, qui, par son intersection avec CD, détermine le point p; on a

$$\frac{Di}{Cc} = \frac{Dp}{Cp} = \frac{1}{4}.$$

Menons $\varepsilon p \delta$, coupant le cercle en F et F_2; joignons CE et CE_2 qui, prolongés jusqu'à leur rencontre avec la tangente (D), donnent les points f et f_2, le point f étant sur la partie positive, le point f_2 sur la partie négative.

Nous aurons, en vertu du théorème, et en tenant compte des signes,

$$Df + Df_2 = \frac{4}{C\varepsilon},$$

$$Df \times Df_2 = 4\,\frac{D\delta}{C\varepsilon}.$$

Mais les triangles semblables $C\varepsilon D$ et CeD donnent la proportion

$$\frac{C\varepsilon}{CD} = \frac{CD}{De},$$

d'où

$$\frac{4}{C\varepsilon} = De,$$

et, puisque

$$\frac{D\delta}{C\varepsilon} = -\frac{Dp}{Cp} = -\frac{1}{4},$$

nous aurons

$$Df + Df_2 = De, \quad \text{et} \quad Df \times Df_2 = -1;$$

donc

$$Df = y = 2C_1 + 2C_4,$$

$$Df_2 = y_1 = 2C_2 + 2C_8.$$

Menons actuellement DE_1 rencontrant la tangente (C) en ε_1, puis la droite $\varepsilon_1 p \delta_1$ qui coupe la circonférence en

F_1 et F_3; en joignant CF_1 et CF_3, on obtiendra sur la tangente (D) les points f_1 et f_3. Nous aurons, d'après cela, toujours en ayant égard aux signes,

$$Df_1 + Df_3 = \frac{4}{C\varepsilon_1},$$

$$Df_1 \times Df_3 = 4\,\frac{D\delta_1}{C\varepsilon_1}.$$

Mais

$$\frac{C\varepsilon_1}{CD} = \frac{CD}{De_1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{4}{C\varepsilon_1} = De_1,$$

et

$$\frac{D\delta_1}{C\varepsilon_1} = -\frac{1}{4};$$

donc

$$Df_1 = z = 2C_2 + 2C_8,$$
$$Df_3 = z_1 = 2C_6 + 2C_7.$$

Il va être facile maintenant de construire les valeurs formant chacun des groupes

$$2C_1 \text{ et } 2C_4, \quad 2C_3 \text{ et } 2C_5, \quad 2C_2 \text{ et } 2C_8, \quad 2C_6 \text{ et } 2C_7.$$

Occupons-nous du premier.

Nous avons

$$2C_1 + 2C_4 = Df,$$
$$2C_3 + 2C_5 = 2C_1 \times 2C_4 = Df_1.$$

Portons sur la tangente (C), du côté positif, $C\theta = 4$, et joignons θf_1 rencontrant le diamètre CD en q_1; puis menons DF qui rencontre la tangente (D) en φ, puis encore la transversale $\varphi\eta q_1$, qui coupe la tangente (D) en η et la circonférence en H_1 et H_4. Joignons CH_1, CH_4 : ces droites prolongées coupent la tangente (D) en h_1 et h_4; Dh_1 et Dh_4 seront les valeurs de $2C_1$ et $2C_4$.

En effet, d'après le théorème,

$$Dh_1 + Dh_4 = Df,$$

et

$$Dh_1 \times Dh_4 = 4\frac{D\eta}{C\varphi} = 4\frac{Dq_1}{Cq_1} = 4\frac{Df_1}{C\theta} = Df_1;$$

donc

$$2C_1 = Dh_1,$$
$$2C_4 = Dh_4.$$

Pour construire le groupe $2C_3$ et $2C_5$, on partira de

$$2C_3 + 2C_5 = Df_1 \quad \text{et} \quad 2C_2 + 2C_8 = 2C_3 \times 2C_5 = Df_2.$$

On joindra, cette fois, le point θ avec le point f_2; la ligne θf_2 coupe le diamètre CD en q_2. On mènera la droite DF_1 rencontrant la tangente (C) en φ_1, puis la transversale $\varphi_1 q_2 \eta_1$ qui coupe le cercle en H_3 et H_5. On joint CH_3 et CH_5 qui déterminent sur la tangente (D) les points h_3 et h_5; Dh_3 et Dh_5 représentent $2C_3$ et $2C_5$ (*).

Pour construire $2C_2$ et $2C_8$, on partira de

$$2C_2 + 2C_8 = Df_2, \quad \text{et} \quad 2C_6 + 2C_7 = 2C_2 \times 2C_8 = Df_3.$$

On joindra θ avec f_3, θf_3 rencontre CD en q_3; D avec F_2, DF_2 rencontre la tangente C en φ_2; φ_2 avec q_3, $\varphi_2 q_3$ coupera la circonférence aux points H_2 et H_8. On mènera CH_2 et CH_8 qui déterminent sur la tangente D les points h_2 et h_8; Dh_2 et Dh_8 seront les valeurs de $2C_2$ et $2C_8$.

Enfin, pour construire $2C_6$ et $2C_7$, on partira de

$$2C_6 + 2C_7 = Df_3,$$
$$2C_4 + 2C_1 = 2C_6 \times 2C_7 = Df.$$

On joindra θ avec f, θf rencontre CD en q; D avec F_3, DF_3 rencontre la tangente C en φ_3; φ_3 avec q, $\varphi_3 q$ coupera la circonférence aux points H_6 et H_7. On mènera CH_6 et CH_7 qui déterminent sur la tangente D les points h_6 et h_7; Dh_6 et Dh_7 seront les valeurs de $2C_6$ et $2C_7$.

(*) Le lecteur est prié de faire lui-même la figure pour le cas ci-dessus, ainsi que pour les deux derniers.

Ayant mené les transversales

$$Ch_1, Ch_2, Ch_3, \ldots, Ch_6, Ch_7, Ch_8,$$

on mène aussi le diamètre AB perpendiculaire à CD. Les transversales coupent ce diamètre aux points

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_6, K_7, K_8;$$

OK_1, OK_2, $OK_3, \ldots$, OK_6, OK_7, OK_8 représentent les valeurs respectives de

$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6, C_7, C_8.$$

Que l'on mène donc, par ces points, des perpendiculaires au diamètre AB, ces perpendiculaires rencontreront la circonférence aux points

$$A_1 A_{16},\quad A_2 A_{15},\quad A_3 A_{14},\quad A_4 A_{13},\quad A_5 A_{12},\quad A_6 A_{11},\quad A_7 A_{10},\quad A_8 A_9,$$

qui seront, avec le point A, les sommets du polygone régulier de dix-sept côtés.

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE,

suivis d'une Étude géométrique des propriétés de la strophoïde

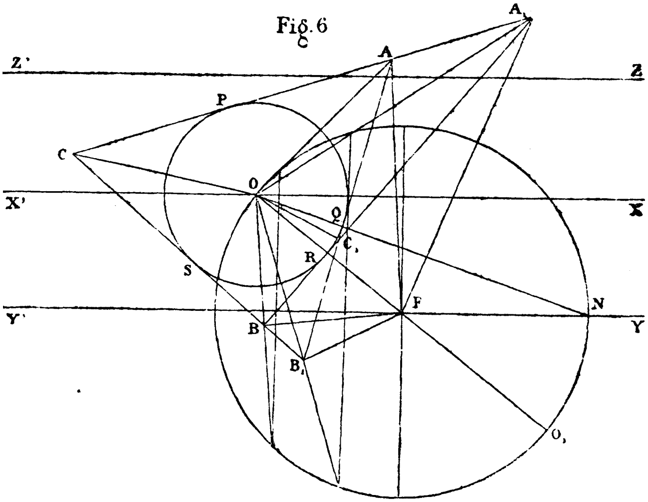
(voir même tome, p. 404);

PAR M. L. MALEYX.

Nous allons maintenant envisager la strophoïde à un autre point de vue. Le triangle QFB′ étant isoscèle, il en résulte qu'on peut considérer le point B′ comme le point de contact avec la droite OB′ d'une parabole ayant le point F pour foyer, et pour axe la droite Y′Y. On peut donc considérer la strophoïde comme le lieu des points de contact des tangentes qu'on peut mener d'un point fixe O à une suite de paraboles homofocales. Deux points correspondants B′, D′ sont les points de contact d'une même parabole avec les deux tangentes qu'on peut lui mener du point O. En effet, on sait, d'après un théorème bien connu, que ces deux tangentes sont également inclinées sur le rayon FO et sur l'axe, ou sa parallèle OX.

Soient (*fig.* 6) A, B, A_1, B_1 deux couples de points

Fig. 6



correspondants; les angles AOB, A_1OB_1 sont divisés en deux parties égales par ON.

Nous désignerons désormais le point F par la dénomination de *foyer*.

Deux rayons OA, OB, dirigés du point double vers deux points correspondants, sont vus du foyer F sous des angles égaux et supplémentaires de l'angle AOB des deux rayons (Th. II, *Coroll. III*).

Le produit des rayons dirigés du foyer F vers deux points correspondants est constant et égal au carré du rayon du cercle de construction (Th. II, *Coroll. II*) :

$$\overline{OF}^2 = FB \times FA.$$

Il en résulte que, si l'on transforme la strophoïde par rayons vecteurs réciproques, en prenant le foyer pour pôle, et pour puissance le carré du rayon du cercle de construction, le point transformé de A sera le symétrique de B par rapport à OF. Donc la transformée sera une nouvelle strophoïde symétrique de la première par rapport à OF.

Il en résulte encore que les tangentes à la strophoïde, en deux points correspondants A, B, font, avec les rayons menés du foyer aux points de contact, des angles égaux.

Les carrés des distances du point double de la strophoïde à deux points correspondants sont proportionnels aux distances des mêmes points au foyer (Th. II, *Coroll. II*).

Les droites qui unissent deux points A, A_1 et leurs correspondants B, B_1 sont les bases de deux triangles semblables ayant leur sommet commun au foyer. En effet, des égalités

$$\mathrm{BFO} = \mathrm{OFA},$$
$$\mathrm{B_1FO} = \mathrm{OFA_1},$$

on déduit

$$\mathrm{AFA_1} = \mathrm{BFB_1};$$

de plus

$$\overline{\mathrm{OF}}^2 = \mathrm{FA} \times \mathrm{FB} = \mathrm{FA_1} \times \mathrm{FB_1};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FA_1}} = \frac{\mathrm{FB_1}}{\mathrm{FB}}.$$

Les deux triangles ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Soit C_1 le point où se coupent les droites A_1B, AB_1 : les triangles BFA_1, B_1FA sont aussi semblables, comme ayant un angle égal en F compris entre côtés proportionnels; il en résulte l'égalité des angles

$$FA_1C_1 = FAC_1,$$
$$FB_1C_1 = FBC_1;$$

donc les deux quadrilatères AA_1C_1F, BB_1C_1F sont inscriptibles.

De la similitude des triangles AA_1F, BB_1F on déduit aussi les égalités

$$CA_1F = B_1BF,$$
$$CB_1F = A_1AF;$$

donc les deux quadrilatères BFA_1C, B_1FAC sont aussi inscriptibles.

D'après le théorème IV, la droite OA_1 divise l'angle AA_1B en deux parties égales, de même pour la droite OB_1, par rapport à AB_1B; pour le même motif, les droites AA_1, AB_1 forment avec OA des angles égaux, et il en est de même de BA_1, BB_1, par rapport à OB. Le point O est donc équidistant des quatre droites AA_1, AB_1, A_1B, BB_1; donc elles sont tangentes à un même cercle ayant le point O pour centre : on peut conclure de la remarque faite sur ce théorème IV qu'elles sont en même temps tangentes à une parabole ayant F pour foyer et $Y'Y$ pour axe. Désignons par P, Q, R, S les points de contact des quatre droites avec le cercle dont le centre est au point double; on a

$$AA_1 = A_1P - AP = A_1R - AQ,$$
$$BB_1 = B_1S - BS = B_1Q - BR.$$

Retranchant

$$AA_1 - BB_1 = A_1B - AB_1,$$

qu'on peut écrire sous l'une des formes

$$A_1B - AA_1 = AB_1 - BB_1,$$
$$AA_1 + AB_1 = BB_1 + BA_1.$$

De la première, on peut conclure que le lieu des points A_1, B_1 est celui des points de contact des tangentes qu'on peut mener du point O à une suite d'hyperboles ayant pour foyers A et B ; A_1 est aussi le pied d'une normale menée du point O à une ellipse ayant pour foyers A et B : il en est de même de B_1 ; mais les ellipses auxquelles OA_1, OB_1 sont normales, sont distinctes, tandis que OA_1, OB_1 sont tangentes à la même hyperbole.

De la seconde forme, on peut conclure que les points A_1, B_1 sont foyers d'une même ellipse tangente en A et B aux droites fixes OA, OB. Du reste, il n'y a rien d'absolument déterminé quant au genre des courbes auxquelles on mène des tangentes du point O, ni quant à celui des courbes tangentes à OA et OB en A et B ; ce genre dépend de la position des points A et B par rapport à A_1 et B_1 : les conclusions précédentes se rapportent à la figure particulière que nous avons considérée.

Donc, en général, la strophoïde peut être considérée comme le lieu des points de contact de toutes les tangentes qu'on peut mener de son point double à toutes les courbes homofocales du second degré, et ayant deux de ses points correspondants quelconques pour foyers.

Les paraboles homofocales qui nous ont servi à établir cette propriété ne constituent qu'un cas particulier de cette infinité de systèmes de courbes du second degré.

La strophoïde est aussi le lieu des foyers des courbes du second degré tangentes aux rayons dirigés de son point double vers deux de ses points correspondants quelconques, le contact ayant lieu en ces points.

On reconnaît facilement que les points C, C_1 sont points de contact des droites OC, OC_1 avec une hyperbole ayant A et B pour foyers ; donc ils appartiennent à la strophoïde, et, comme ces droites OC, OC_1 sont également inclinées sur OA, OB, et, en conséquence, sur

ON, d'après un théorème connu, il en résulte que C et C_1 sont correspondants.

D'après cela, on peut formuler le théorème suivant :

Si l'on circonscrit un quadrilatère à un cercle et qu'on le complète, ses six sommets sont sur une même strophoïde dont le centre du cercle est le point double; son foyer est celui de la parabole inscrite au quadrilatère; sa direction asymptotique, celle de l'axe de cette parabole; les trois diagonales du quadrilatère sont tangentes à la parabole ayant pour foyer le point symétrique du point double de la strophoïde par rapport au foyer, et pour directrice la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

Il nous sera maintenant facile de construire la tangente en un point de la courbe. Supposons que la droite A_1B_1 se rapproche indéfiniment de AB, les angles OAC, OAC_1 sont constamment égaux; mais, à la limite, AC_1 se confondra avec AB, et AC avec la tangente en A : donc la tangente au point A est symétrique de la droite qui unit le point A à son correspondant, par rapport au rayon qui unit le point double au point de contact.

Quand A_1B_1 vient se confondre avec AB, OC_1 devient perpendiculaire à AB, et la limite de C_1, qui est la projection du point double sur AB, appartient à la strophoïde.

On peut donc considérer la strophoïde comme le lieu des projections de son point double sur les droites unissant deux de ses points correspondants.

Ces droites enveloppent une parabole que nous avons définie, et le point double de la strophoïde est sur la directrice de cette courbe. Donc la strophoïde est podaire d'une parabole, si l'on prend pour pôle un point quelconque de la directrice.

Si l'on prenait pour pôle un point non situé sur la directrice, la podaire ne pourrait être une strophoïde, car ses tangentes au point double ne seraient plus rectangulaires.

Si l'on considère un triangle et le cercle inscrit, le centre du cercle inscrit est point double commun de trois strophoïdes passant toutes les trois par les trois sommets; de plus, chacune d'elles passe par l'un des points de contact du cercle et de l'un des côtés; les deux autres côtés lui sont alors tangents aux extrémités de celui sur lequel se trouve le point de contact.

Soit une strophoïde donnée par son foyer, son point double, la direction asymptotique; on donne la droite A_1C passant par un point A_1 de la courbe : on propose de trouver les autres points communs de la droite et de la courbe.

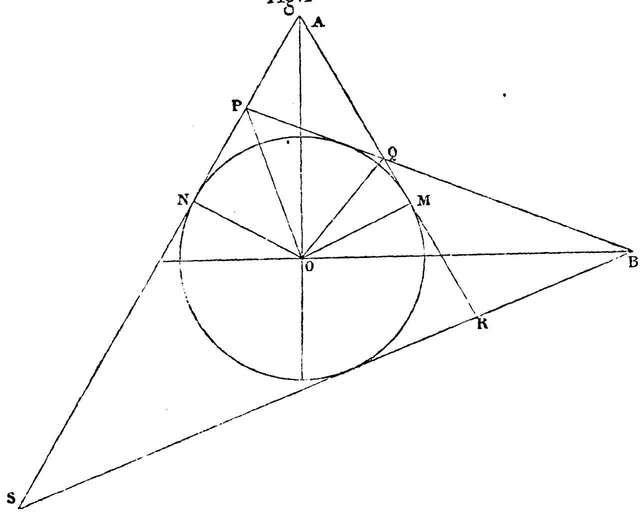
Du point double O comme centre, nous décrirons un cercle tangent à A_1C; puis nous déterminerons le point B_1 correspondant à A_1. De ce point, nous mènerons deux tangentes au cercle : leurs intersections A, C avec la droite A_1C nous donneront la solution.

Nous allons démontrer maintenant que la strophoïde a la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques, et sans altération de position, en prenant pour pôle l'un des points correspondants principaux, et pour puissance le carré de sa distance au point double.

Pour construire le lieu par points, nous pouvons déterminer ses deux points correspondants principaux, puis, de ces points, mener des couples de tangentes à un cercle variable dont le centre soit au point double; chaque cercle variable nous fournira quatre points nouveaux, sommets d'un quadrilatère inscriptible. En effet, les rayons qui vont du point double aux points correspondants principaux sont rectangulaires ; de plus, ils sont bissectrices des angles formés par les côtés opposés du quadrilatère dont les quatre sommets sont les points que nous venons de construire ; mais on sait que les angles de ces bissectrices sont respectivement demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère ; donc ces angles sont supplémentaires et le quadrilatère est inscriptible.

Soient donc (*fig.* 7) A, B les points correspondants principaux d'une strophoïde dont O est le point double ;

Fig. 7



nous venons de montrer que les quatre points P, Q, R, S, qui appartiennent à cette courbe, sont situés sur un cercle, et qu'en conséquence

$$BP \times BQ = BS \times BR,$$
$$AP \times AS = AQ \times AR.$$

Pour établir le théorème énoncé, il suffit de montrer que le produit $BP \times BQ$ est égal au carré de BO, et que $AQ \times AR$ est égal à celui de AO.

On voit facilement que l'angle POQ est la moitié de l'angle NOM, qui est lui-même le supplément de l'angle A ; donc

$$POQ = \frac{\pi}{2} - OAM,$$

$$PQO = OQM = \frac{\pi}{2} - QOM = \frac{\pi}{2} - QOB + MOB.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, en observant que les deux angles OAM, MOB sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$POQ + PQO = \pi - QOB,$$

d'où

$$QOB = OPB.$$

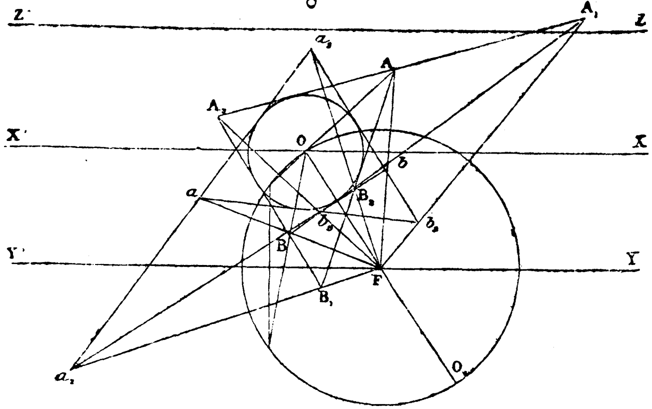
Dès lors, les deux triangles POB, QOB sont semblables, et l'on en déduit la première des égalités à démontrer :

$$\frac{PB}{OB} = \frac{OB}{BQ} \quad \text{ou} \quad \overline{OB}^2 = BP \times BQ.$$

La seconde s'établit de la même façon : la proposition est justifiée.

Soient (*fig.* 8) F le foyer d'une strophoïde, O son point double, X'X la direction asymptotique, A, B deux points correspondants. Décrivons, du point O comme centre, un cercle arbitraire, et menons-lui des tangentes des points A et B. Ces tangentes se coupent en quatre points A_1, B_1, A_2, B_2, qui appartiennent à la courbe et sont correspondants deux à deux. Nous avons vu que les quatre quadrilatères AA_1B_2F, BB_1B_2F, AA_2B_1F, A_1A_2BF sont inscriptibles. On peut établir ce fait de plusieurs autres manières : d'abord il résulte de la remarque faite sur le théorème IV que les quatre droites AA_2, AB_1, BA_2, BA_1 sont tangentes à une même parabole ayant F pour foyer et Fy pour axe; donc, d'après un théorème connu, les

Fig. 8



quatre cercles circonscrits aux triangles AA_1B_2, AA_2B_1, BA_1A_2, BB_1B_2 passent par le foyer F de cette parabole. En second lieu, nous avons vu que, si l'on transformait la strophoïde par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le foyer et pour puissance le carré de sa distance au point double, on obtenait une seconde strophoïde symétrique de la première par rapport à la droite OF. Soient a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 les points symétriques de A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 par rapport à OF; les points a, a_1, a_2 étant sur une même ligne droite, B, B_1, B_2, qui en sont les transformés, sont sur un cercle passant par le pôle F. Les quatre quadrilatères AA_1B_2F, BB_1B_2F, AA_2B_1F, A_1A_2BF sont donc inscriptibles dans des cercles respectivement transformés des quatres droites bb_1a_2, aa_1a_2, bb_2a_1, b_1b_2a. Or les quatre droites ba_2, aa_2, ba_1, b_1a sont tangentes au cercle de centre O; donc les quatre cercles transformés sont tangents à un même cercle transformé du cercle O. Ce cercle transformé a son centre sur OF et coupe orthogonalement le cercle transformé de la perpendiculaire à OF en O; donc la strophoïde peut être considérée comme le lieu des points communs des cercles passant par son foyer F et deux de ses points correspondants A, B, et tangents à un cercle variable dont le centre se meut sur OF, et qui coupe orthogonalement le cercle ayant OF pour diamètre.

Les quatre droites ba_2, aa_2, ba_1, b_1a sont aussi tangentes à une même parabole ayant F pour foyer et pour axe la droite symétrique de Y′Y par rapport à OF; donc les quatre cercles transformés sont tangents à la courbe transformée de cette parabole, courbe qui, d'après le corollaire II du théorème III, est un limaçon de Pascal.

Les droites ab, a_1b_1, a_2b_2, qui unissent deux points correspondants de la seconde strophoïde, enveloppent une parabole ayant pour foyer le point O_1 et pour directrice la symétrique de X′X par rapport à OF; donc les cercles transformés qui passent par le foyer de la première strophoïde et deux de ses points correspondants enveloppent une courbe transformée de la parabole fixe dont il vient d'être question.

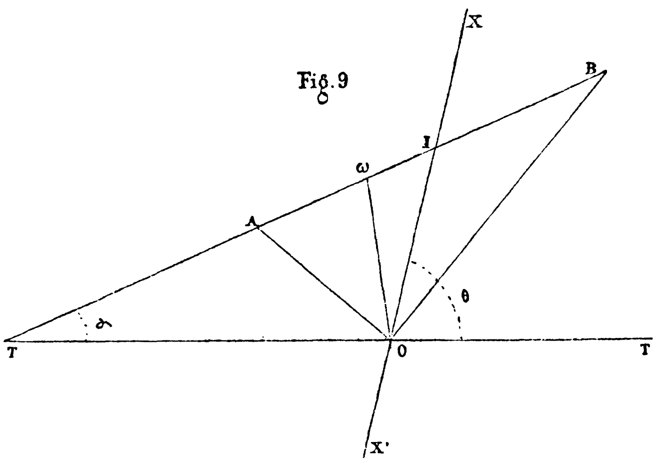
La courbe transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde, en prenant le point double pour pôle, est une hyperbole équilatère.

En effet, soient O le point double d'une strophoïde, A, B deux points correspondants fixes de la courbe, B_2 un point variable sur cette ligne. Les angles OB_2A, OB_2B sont égaux; on peut donc considérer la strophoïde comme le lieu du point commun de deux segments capables d'un même angle variable, respectivement décrits sur les droites fixes OA, OB. Si nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour pôle, nos deux cercles qui passent par le point O et par les deux points fixes A, B, en coupant les droites OA, OB sous un même angle, se transformeront en deux droites passant par les points transformés de A et B, que nous appellerons respectivement α et β, et qui feront avec $O\alpha$ et $O\beta$ des angles égaux, et, en conséquence, avec $\alpha\beta$ des angles dont la différence sera fixe. On sait que le lieu du sommet d'un triangle dont la base est fixe, ainsi que la différence des angles à la base, est une hyperbole équilatère : la proposition est ainsi démontrée.

Le lieu géométrique du point conjugué harmonique du foyer d'une strophoïde, par rapport aux deux points de rencontre de cette courbe avec une sécante issue du foyer, est une circonférence de cercle.

Soient, en effet (*fig.* 9), F et O le foyer et le point

Fig. 9



double d'une strophoïde, X′X la direction asymptotique; deux de ses points A, B, en ligne droite avec le foyer, sont placés aux extrémités de deux rayons rectangulaires issus du point O; l'angle AOB étant droit, pour construire le point ω conjugué harmonique du point F par rapport à A et B, il suffit de faire l'angle $AO\omega$ égal à l'angle AOF. Désignons par θ l'angle fixe XOT, et par α l'angle variable AFO : nous avons, dans le triangle $FO\omega$,

$$F\omega O = 2^d - \alpha - 2AOF,$$

et dans le triangle FAO, en observant que le triangle IAO est isoscèle,

$$IAO = \alpha + AOF = IOA = 2^d - \theta - AOF,$$

d'où

$$\theta = 2^d - \alpha - 2AOF = F\omega O;$$

le point ω est donc situé sur le cercle passant par F et O, et tangent à X'X.

J'ai été conduit, par cette étude des propriétés de la strophoïde, à mettre en évidence quelques propriétés de certaines figures ayant entre autres celle de se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques; bien que leur démonstration ne soit pas aussi indépendante de tout calcul que celle des précédentes, elle est encore assez simple pour être facilement lue par les élèves, et je pourrai en faire l'objet d'un second article.

SOLUTION DES QUESTIONS ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. G. LAUNOY,
Professeur au lycée de Tournon.

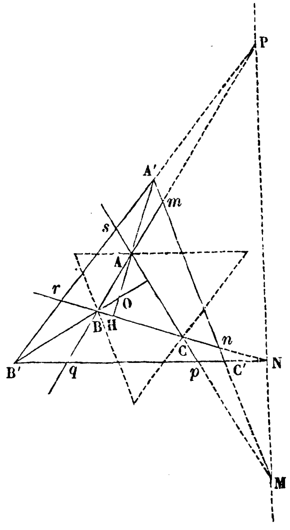
Solution de la question de Géométrie.

ABC (*fig.* 1) est le triangle proposé; m, n, p, q, r, s sont les points de contact des cercles exinscrits; A'B'C' est le triangle résultant.

1° La première partie se démontre sans difficulté.

2° La hauteur AH du triangle ABC rencontre les côtés $A'B'$, $A'C'$ de $A'B'C'$ en A' et A''.

Fig. 1.



Alors le triangle AHC et la transversale $A'B'$ donnent

$$\frac{A'A}{A'H} = \frac{sA}{rH};$$

de même, le triangle AHB et la transversale $A'C'$ donnent

$$\frac{A''A}{A''H} = \frac{mA}{nA};$$

il suffit alors de vérifier la proportion

$$\frac{sA}{rH} = \frac{mA}{nH} \quad \text{ou} \quad \frac{sA}{mA} = \frac{rH}{nH}.$$

Or

$$\frac{sA}{mA} = \frac{p-b}{p-c}$$

et

$$\frac{rH}{nH} = \frac{rB + BH}{nC + CH} = \frac{p - a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2b}}{p - a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}} = \frac{p - b}{p - c};$$

donc le théorème est démontré.

3° La considération des angles montre immédiatement que le point O, commun aux trois hauteurs du triangle ABC, est le centre de la circonférence circonscrite au triangle A'B'C'.

Remarque. — ABC et A'B'C' sont homologiques; O est le centre d'homologie, l'axe passe par les trois points (AB, A'B'), (AC, A'C'), (BC, B'C').

Solution de la question de Mécanique.

A, B, C,..., L est le système proposé des points dont le nombre est n; O est le centre de la sphère; m est la position d'équilibre cherchée. Remplaçons la sphère par une force mR passant par O; le point m entièrement libre est alors en équilibre sous l'action simultanée des efforts mA, mB,..., mR, et par conséquent il occupe la position du centre de gravité d'un système de $(n+1)$ points massifs égaux ayant leurs centres respectifs en A, B,..., R (Leibnitz). En second lieu, si l'on prolonge mR au delà de m de la $n^{ième}$ partie de sa longueur, on obtiendra le centre de gravité des n points massifs A, B,..., L, c'est-à-dire le centre des moyennes distances G du système proposé. Donc :

1° La position d'équilibre du point m est sur la droite OG;

2° La réaction sphérique est égale à $n.m$G.

Il est d'ailleurs évident que les points de la sphère pour lesquels la composante normale est donnée seront distribués symétriquement autour de la position d'équilibre : le lieu demandé sera donc une circonférence de pôle m tracée sur la sphère.

Remarque. — Le point m peut être assujetti à rester sur la sphère de trois manières différentes :

1° Il est fixé à l'extrémité d'un fil flexible et inextensible ou bien placé à l'intérieur d'une sphère creuse : une seule position d'équilibre entre O et G. L'équilibre est stable.

2° Il est posé simplement sur la sphère : une seule position d'équilibre au delà de O. L'équilibre est instable.

3° Enfin il est fixé à l'extrémité d'une tige rigide et sans poids : deux positions d'équilibre, l'une stable et l'autre instable.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 949

(voir 2e série, t. VIII, p. 335) ;

PAR M. C. HARKEMA.

Trouver toutes les courbes planes pour lesquelles la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. On compte la normale du point de la courbe à une droite fixe donnée, et le rayon vecteur du point de la courbe à un point fixe pris pour pôle.

Les coniques donnent une solution particulière.

(GENOCCHI.)

Prenons pour axes coordonnés le système orthogonal suivant : l'origine O au point fixe donné et l'axe OX parallèlement à la droite donnée MN. Soient P un point de la courbe ; PQ la normale comptée de la façon indiquée, $\widehat{POX} = \theta$, $(\widehat{PQ, MN}) = \psi$, $(\widehat{OP, PQ}) = \xi$, et la distance $OM = a$.

La condition du problème s'exprime, d'après cela, comme il suit :

$$(1) \qquad PQ \cos\xi = \text{const.} = k.$$

On a évidemment

$$\xi = \psi - \theta, \quad \tang\theta = \frac{y}{x}, \quad \tang\psi = -\frac{dx}{dy};$$

donc

$$\cos\xi = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

La longueur de la normale est, dans ce cas,

$$(y - a)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

L'équation (1) devient donc, après la substitution des valeurs trouvées,

$$(y - a)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = k,$$

ou bien, après quelques faciles transformations,

$$(2) \qquad (y - a)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} - k\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x} = 0.$$

Tout revient à intégrer cette équation différentielle. A cet effet, faisons la substitution $\frac{y}{x} = z$; il vient

$$(3) \qquad (xz - a)dz - k\sqrt{1 + z^2}\,\frac{dx}{x} = 0.$$

Posons maintenant

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{d\xi}{\xi^2};$$

l'équation (3) devient

$$\left(\frac{z}{\xi} - a\right) dz + k\sqrt{1 + z^2}\,\frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{dz} - \frac{a}{k\sqrt{1+z^2}}\,\xi = -\frac{z}{k\sqrt{1+z^2}}.$$

Cette équation est linéaire, et l'on peut trouver son intégrale d'après la formule connue exprimant l'intégrale d'une équation linéaire; mais nous préférons, pour faciliter l'intégration, faire encore la substitution suivante :

$$\sqrt{1+z^2} = z + \omega, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{1-\omega^2}{2\omega}, \quad dz = -\frac{1+\omega^2}{2\omega^2}\,d\omega.$$

D'après cela, nous aurons, au lieu de l'équation (4),

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{d\omega} + \frac{a}{k\omega}\,\xi = \frac{1-\omega^2}{2k\omega^2}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(6) \qquad \xi = \omega^{-\frac{a}{k}}\left(\frac{1}{2k}\int \frac{\omega^{\frac{a}{k}} - \omega^{\frac{a}{k}+2}}{\omega^2}\,d\omega + C\right).$$

Supposons pour un moment $k \gtrless a$; alors cette intégrale pourra s'écrire

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2k}\left(\frac{\omega^{-1}}{\frac{a}{k}-1} - \frac{\omega}{\frac{a}{k}+1}\right) + C\omega^{-\frac{a}{k}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a-k)\omega} - \frac{\omega}{a+k}\right] + C\omega^{-\frac{a}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue au lieu de ξ et ω leurs valeurs en x et y, à savoir $\frac{1}{x}$ et $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}$, on obtient l'équation intégrale de (2) :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(a-k)(\sqrt{x^2+y^2}-y)} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right] \\ &\quad + C\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right)^{-\frac{a}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation, dont le degré dépend du rapport $\frac{a}{k}$, représente les courbes cherchées. Dans le cas particulier $C = 0$, cette équation représente une conique. En effet, on a alors

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(a-k)(\sqrt{x^2+y^2}-y)} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right];$$

si l'on multiplie par $\sqrt{x^2+y^2}+y$ les deux termes de la première fraction entre parenthèses, on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{(a-k)x} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right],$$

et enfin, réduisant et faisant disparaître le radical,

$$(9)\quad k^2x^2 + (k^2-a^2)y^2 - 2(k^2-a^2)y - (k^2-a^2)^2 = 0.$$

Cette équation représente une ellipse si $k > a$, une hyperbole si $k < a$. Si $a \lessgtr 0$, $k = 0$, on a la droite $y - a = 0$, et la longueur de la normale s'annule. Dans le cas $a = 0$, $k \gtrless 0$, cette équation devient

$$x^2 + y^2 = k^2,$$

et représente un cercle de rayon k.

Supposons maintenant $k = a$, et reprenons la formule (6), nous aurons

$$\xi = \frac{1}{2k}\frac{\log\omega}{\omega} - \frac{1}{4k}\omega + \frac{C}{\omega},$$

ou bien

$$4k\omega\xi - 2\log\omega + \omega^2 - 4kC = 0.$$

La substitution des valeurs connues de ω et de ξ nous donne

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4k(\sqrt{x^2+y^2}-y)}{x^2} - 2\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right)^2 - 4kC = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est l'équation d'une courbe transcendante.

Note. — Cette question, dont la solution a été insérée dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. X, p. 42), fut résolue d'une manière incomplète, je dirais même fautive. En effet, par une solution particulière on entend une solution qui se déduit de la solution générale en attribuant à la constante arbitraire une valeur particulière. Or, de l'intégrale donnée par l'auteur de la solution (p. 43), on ne saurait déduire l'équation d'une conique, en attribuant à la constante C une valeur particulière. L'auteur déduit cette équation en supposant que le pôle est situé sur la droite donnée, ce qui n'est point indispensable.

Généralisation de la question 1069

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. KOEHLER.

Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois.

(E. LEMOINE.)

La propriété dont il s'agit peut être envisagée comme un corollaire d'un théorème plus général qui, je crois, n'a pas encore été remarqué.

Si l'on a trois droites α, β, γ passant par un point P, trois autres α', β', γ' passant par un point P', et trois coniques K_1, K_2, K_3 inscrites respectivement dans les quadrilatères $(\beta\beta'\gamma\gamma')$, $(\gamma\gamma'\alpha\alpha')$, $(\alpha\alpha'\beta\beta')$, six de leurs cordes communes concourent trois à trois.

Soient $D = 0$ l'équation de la droite PP'; $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ celles des droites qui joignent les points $(\beta.\gamma', \gamma.\beta')$, $(\gamma.\alpha', \alpha.\gamma')$, $(\alpha.\beta', \beta.\alpha')$.

On aura, si l'on multiplie les diverses équations par des coefficients numériques convenablement choisis, les relations

$$\beta\beta' - \gamma\gamma' = A.D, \quad \gamma\gamma' - \alpha\alpha' = B.D, \quad \alpha\alpha' - \beta\beta' = C.D,$$

et

$$A + B + C = 0,$$

cette dernière exprimant que A, B, C passent par un même point. L'équation de la conique K_1 peut s'écrire sous les deux formes

$$4l^2\beta\beta' = (D + l^2A)^2,$$
$$4l^2\gamma\gamma' = (D - l^2A)^2,$$

$D + l^2A = 0$ et $D - l^2A = 0$ représentant les deux cordes de contact correspondant aux angles circonscrits $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, cordes qui passent, comme on sait, par le point d'intersection de A et D, et forment avec ces droites un faisceau harmonique.

On aura de même, pour K_2, les deux formes

$$4m^2\gamma\gamma' = (D + m^2B)^2, \quad 4m^2\alpha\alpha' = (D - m^2B)^2,$$

et pour K_3

$$4n^2\alpha\alpha' = (D + n^2C)^2, \quad 4n^2\beta\beta' = (D - n^2C)^2.$$

Cela posé, un des systèmes de cordes communes à K_2 et K_3, celui dont le sommet est à l'intersection des cordes de contact $D - m^2B = 0$ et $D + n^2C = 0$, aura pour équation

$$\left(\frac{D + n^2C}{n}\right)^2 - \left(\frac{D - m^2B}{m}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1)\ -m^2nB + mn^2C + D(m+n) = 0, \quad (1')\ m^2nB + mn^2C + D(m-n) = 0.$$

Les deux systèmes analogues relatifs à (K_3, K_1) et (K_1, K_2) sont

$$(2)\quad -n^2lC + nl^2A + D(n+l) = 0, \qquad (2')\quad n^2lC + nl^2A + D(n-l) = 0,$$
$$(3)\quad -l^2mA + lm^2B + D(l+m) = 0, \qquad (3')\quad l^2mA + lm^2B + D(l-m) = 0.$$

Je considère les trois cordes $(1')$, (2) et (3).

En introduisant la condition $A + B + C = 0$, les trois équations deviennent

$$\begin{gathered}
m^2nB + mn^2C + D(m-n) = 0,\\
-nl^2B - (nl^2 + n^2l)C + D(l+n) = 0,\\
(lm^2 + l^2m)B + l^2mC + D(l+n) = 0.
\end{gathered}$$

Or le déterminant de ces trois équations est nul; il peut en effet s'écrire

$$-\frac{D}{l^2m^2n^2}\begin{vmatrix} m & n & \dfrac{m-n}{mn} \\ l & l+n & -\dfrac{l+n}{nl} \\ l+m & l & \dfrac{l+m}{ml} \end{vmatrix},$$

ou, en ajoutant aux éléments de la première ligne ceux des deux dernières,

$$-\frac{2D}{l^2m^2n^2}\begin{vmatrix} l+m & n+l & 0 \\ l & n+l & -\dfrac{n+l}{nl} \\ l+m & l & \dfrac{l+m}{ml} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2D(m+l)(n+l)}{l^3m^2n^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{l}{l+m} & 1 & -\dfrac{l+n}{n} \\ 1 & \dfrac{l}{n+l} & \dfrac{l+m}{m} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2D(m+l)(n+l)}{l^3m^2n^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{l}{l+m} & \dfrac{m}{l+m} & -\dfrac{l+n}{n} \\ 1 & -\dfrac{n}{l+n} & \dfrac{l+m}{m} \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi les droites (1′), (2), (3) se coupent en un même point. Il en est de même des deux autres groupes (2′), (3), (1) et (3′), (1), (2).

Pour passer de là au théorème de M. Lemoine, il suffit de supposer que les points P et P′ sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle.

Voici, du reste, la démonstration directe :

Soient (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) les coordonnées rectangulaires des trois foyers ; K_{23}, K_{31}, K_{12} les trois coniques qui ont deux à deux un foyer commun, et dont les axes focaux sont a, b, c.

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2&=\delta_1^2,\\
(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2&=\delta_2^2,\\
(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2&=\delta_3^2,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(2x-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)+(2y-\beta_2-\beta_3)(\beta_3-\beta_2)&=A_1,\\
(2x-\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)+(2y-\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_3)&=A_2,\\
(2x-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)+(2y-\beta_1-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)&=A_3,
\end{aligned}$$

les équations des coniques pourront s'écrire

$$K_{23}\left\{\begin{aligned}4a^2\delta_3^2&=(A_1-a^2)^2,\\4a^2\delta_2^2&=(A_1+a^2)^2,\end{aligned}\right.\qquad K_{31}\left\{\begin{aligned}4b^2\delta_1^2&=(A_2-b^2)^2,\\4b^2\delta_3^2&=(A_2+b^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$K_{12}\left\{\begin{aligned}4c^2\delta_2^2&=(A_3-c^2)^2,\\4c^2\delta_1^2&=(A_3+c^2)^2.\end{aligned}\right.$$

Les systèmes de cordes communes qui se coupent aux points d'intersection des directrices correspondantes seront

(1) $cA_2-bA_3-bc(b+c)=0$, (1′) $cA_2+bA_3-bc(b-c)=0$,

(2) $aA_3-cA_1-ca(c+a)=0$, (2′) $aA_3+cA_1+ca(c-a)=0$,

(3) $bA_1-aA_2-ab(a+b)=0$, (3′) $bA_1+aA_2+ab(a-b)=0$.

On verrait, comme ci-dessus, que les déterminants des équations (1′), (2), (3); (2′), (3), (1); (3′), (1), (2) sont nuls.

Question 1123

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. A. PELLISSIER.

Les conditions pour que l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0$$

soit de révolution sont, λ, μ, ν *étant les angles des axes et* a, b, $c > 0$,

$$\frac{a}{1 - \cos\lambda} = \frac{b}{1 - \cos\mu} = \frac{c}{1 - \cos\nu}.$$

On propose d'interpréter géométriquement ces relations. (A. DE SAINT-GERMAIN.)

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu - R^2 = 0$$

l'équation d'une sphère concentrique à l'hyperboloïde; l'équation générale des surfaces passant par l'intersection des deux premières sera

$$\begin{aligned} k(x^2 + y^2 + z^2) + yz(2k\cos\lambda + a) + zx(2k\cos\mu + b) \\ + xy(2k\cos\nu + c) - kR^2 + abc = 0. \end{aligned}$$

Si l'hyperboloïde est de révolution, on devra pouvoir déterminer k de telle sorte que cette équation représente deux plans parallèles, c'est-à-dire que les trois plans du centre

$$(1)\quad \begin{cases} x2k + y(2k\cos\nu + c) + z(2k\cos\mu + b) = 0, \\ x(2k\cos\nu + c) + y2k + z(2k\cos\lambda + a) = 0, \\ x(2k\cos\mu + b) + y(2k\cos\lambda + a) + z2k = 0 \end{cases}$$

devront se réduire à un seul.

On trouve ainsi les conditions

$$2k = 2k\cos\lambda + a = 2k\cos\mu + b = 2k\cos\nu + c,$$

et, pour que les valeurs de k fournies par ces équations soient identiques, il faut que

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu}.$$

L'un quelconque des plans (1) peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{a}{1-\cos\lambda}x + \frac{b}{1-\cos\mu}y + \frac{c}{1-\cos\nu}z = 0,$$

et il est clair que l'axe de révolution est perpendiculaire à ce plan. Or, en appelant α, β, γ les angles que fait cet axe avec Ox, Oy, Oz, l'équation du plan qui lui est perpendiculaire peut aussi s'écrire

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$

ce qui montre que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont respectivement proportionnels aux quantités $\frac{a}{1-\cos\lambda}$, $\frac{a}{1-\cos\mu}$, $\frac{c}{1-\cos\nu}$. Ces dernières étant égales, on en conclut que les angles α, β, γ sont égaux.

Remarquons maintenant que Ox, Oy, Oz sont trois génératrices du cône asymptote de l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy = 0,$$

et, comme ce cône est de révolution, il en résulte que l'axe fait un angle constant avec toutes ses génératrices, par suite aussi avec les génératrices de l'hyperboloïde, qui sont parallèles aux premières.

Donc les relations

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu}$$

ne sont que l'expression de la propriété bien connue de l'hyperboloïde de révolution.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

BIBLIOGRAPHIE.

Questions de Géométrie élémentaire; méthodes et solutions, par M. Desboves; 2e édition.

Extrait de la Préface.

Cette nouvelle édition diffère de la première par de nombreux changements et d'importantes additions.

La première Partie renferme des Chapitres entièrement nouveaux sur le Rapport anharmonique, l'Homographie, l'Involution, les Polaires réciproques, le Déplacement des figures, et sur les principes élémentaires de la Méthode infinitésimale, appliqués à la détermination des tangentes et à celle des maxima et minima.

Dans le dernier Chapitre, un théorème (161, p. 116), qui est l'analogue du théorème bien connu de *Fermat*, permet, non-seulement comme celui-ci, de résoudre des questions de maximum et de minimum, mais encore de suivre la variation de certaines expressions géométriques.

Dans la seconde Partie, de nombreuses questions ont été ajoutées. Je citerai en particulier des propositions nouvelles sur le cercle des neuf points, la solution du problème de *Malfatti*, la construction d'un quadrilatère, connaissant ses côtés et sa surface, des théorèmes et des problèmes sur les droites et les cercles faisant entre eux des angles donnés, et enfin des théorèmes nouveaux sur les volumes, parmi lesquels on remarquera celui qui donne une expression du segment sphérique à deux bases plus simple que l'expression connue.

L'ancienne division de la deuxième Partie en trois Chapitres consacrés respectivement aux théorèmes, aux lieux géométriques et aux problèmes a été conservée; mais, dans le premier et le troisième Chapitre, les matières ont été distribuées dans un ordre meilleur qui rend la lecture de l'ouvrage beaucoup plus facile. C'est ainsi, par exemple, que, dans le Chapitre des problèmes, on a réuni ensemble les problèmes relatifs à la construction des triangles, les problèmes sur les quadrilatères, sur les cercles, etc. On a aussi insisté, plus encore que dans la première édition, sur l'utilité des Porismes, dont quelques applications ont été données. Je dirai, à cette occasion, que mes élèves, qui ont pris goût aux Porismes, en ont souvent trouvé de remarquables. Comme preuve à l'appui, je citerai celui qui donne la deuxième solution du problème XVI (p. 328).

Une addition très-importante encore est celle des exercices proposés. J'ai voulu surtout donner des questions nouvelles et intéressantes; et, comme je ne pouvais suffire seul à cette tâche difficile, j'ai sollicité le concours de plusieurs géomètres distingués. Quelques-uns d'entre eux, dont on verra les noms dans le cours du Livre, ont répondu à mon appel : qu'ils veuillent bien recevoir ici mes sincères et vifs remerciements. Le bel ouvrage de M. Chasles sur les Porismes m'a été aussi d'une grande ressource par son inépuisable richesse.

Einleitung in die analytische Geometrie, von K. HATTENDORFF. Hannover, 1872 (*).

Comme le titre l'indique, l'ouvrage actuel n'est pas un Traité complet de Géométrie analytique. C'est un résumé des leçons que M. Hattendorff professe à l'École Polytechnique d'Aix-la-Chapelle. Le but de l'auteur est uniquement de fournir à ses auditeurs les connaissances nécessaires pour aborder ensuite l'étude du Calcul différentiel et intégral. A ce point de vue, M. Hattendorff a cru inutile d'entrer dans des développements superflus. C'est ainsi qu'il n'a presque pas dépassé la théorie des courbes du second degré dans la Géométrie plane, ni les surfaces du second ordre dans l'espace.

Cependant les limites que l'auteur s'est imposées ne l'em-

(*) *Introduction à la Géométrie analytique,* par M. Hattendorff, Hanovre, 1872.

pêchent pas de signaler, chaque fois que l'occasion s'en présente, les points plus élevés qui se rattachent aux théories qu'il traite. C'est ainsi qu'il cite en passant les coordonnées elliptiques, les coordonnées trilinéaires, en ajoutant cependant qu'il n'entre pas dans son programme d'en entretenir ses lecteurs. Nous avons trouvé, en outre, dans son ouvrage, les discussions de quelques courbes usuelles : les courbes paraboliques, la lemniscate, la logarithmique, les cycloïdes et les spirales (Chapitre VII).

Le Chapitre VI renferme la discussion générale des courbes du second ordre et quelques propriétés de ces courbes. De même, dans la Géométrie à trois dimensions, après avoir exposé séparément les propriétés des trois surfaces, l'auteur traite (Chapitre XI) quelques questions générales, entre autres la recherche du point de rencontre d'une droite avec une surface du second degré, et la discussion générale de l'équation complète du second degré.

Nous ne pouvons terminer sans faire remarquer le paragraphe 10 de l'ouvrage de M. Hattendorff. L'auteur, après avoir montré qu'un point est déterminé par deux équations, savoir :

1° En coordonnées polaires,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r = c, \\ \varphi = a\pi; \end{array} \right.$$

2° En coordonnées rectilignes,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a, \\ y = b, \end{array} \right.$$

remarque que cela revient à considérer, au lieu de (1), les équations

$$\begin{aligned} Ar + B\varphi &= C, \\ A'r + B'\varphi &= C', \end{aligned}$$

et, au lieu de (2), les équations

$$\begin{aligned} Ax + By &= C, \\ A'x + B'y &= C', \end{aligned}$$

dans lesquelles on considère les coordonnées du point (soit r, φ, ou bien x, y) comme des inconnues. Après cette remarque bien simple, M. Hattendorff arrive facilement à la théorie de la ligne droite. J. GRAINDORGE.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Fouret. — Dans le numéro des *Annales* du mois de mai 1873, se trouve reproduite une remarque de M. Bourguet, au sujet de la question 1109 dont l'énoncé serait incomplet, et devrait être complété en disant :

« Les points d'intersection des diamètres des paraboles, relatifs aux points de contact, avec les côtés du triangle, sont sur trois droites issues des trois sommets et concourantes, *ou bien sont trois points en ligne droite.* »

Or il est facile de voir que cette alternative n'existe pas ; le premier cas seul est vrai, et la démonstration de M. Poujade, qui se trouve au numéro d'avril de la même année, l'établit rigoureusement.

Le produit des trois radicaux $\sqrt{\frac{x}{x'}}$, $\sqrt{\frac{x'}{x''}}$, $\sqrt{\frac{x''}{x'''}}$ comporte à la vérité le double signe, ce qui a pu motiver l'erreur de M. Bourguet ; mais l'examen de la figure, comme le fait observer M. Poujade, montre clairement que « les points de division sont sur les côtés du triangle et non sur leurs prolongements. » Ce fait est évident si l'on considère que chaque point de division est l'intersection d'un diamètre de parabole avec un des côtés du triangle qui, par suite de la construction, est une corde de la même parabole.

Les droites qui joignent les points de division aux sommets opposés du triangle concourent donc en un même point.

ESSAI D'UNE CLASSIFICATION DES ENGRENAGES;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. Le premier pas qu'on fait en abordant l'étude de la théorie géométrique des mécanismes ou de la Cinématique appliquée (*) consiste toujours à établir une classification systématique des divers organes de transmission qui font l'objet de cette étude. L'importance d'une pareille classification est évidente; elle est du même ordre que celle des systèmes célèbres de Linné, de Candolle, de Jussieu, en Histoire naturelle, et de tant d'autres systèmes ayant pour but de rendre méthodique l'étude d'une nombreuse série d'objets de même nature et d'en faciliter une énumération complète. Une première classification des mécanismes a été ébauchée par Monge et exécutée par Hachette, Lanz et Bétancourt; elle demeura longtemps classique, jusqu'à ce que M. Willis, en 1841, en proposât une autre, beaucoup plus simple et naturelle, et presque généralement adoptée aujourd'hui (**).

(*) Ce nom, pour l'étude géométrique des transmissions, fut proposé par Bour, par opposition à celui de *Cinématique pure*, introduit par M. Resal, pour la partie théorique de la science qu'Ampère a définie dans son *Essai sur la Philosophie des sciences*, sous le titre général de *Cinématique*. C'est précisément la Cinématique pure que Wronski, comme M. Transon l'a démontré récemment dans ce journal (t. XIII, p. 315-318), avait définie, seize ans avant Ampère, sous le nom de *Phoronomie;* mais la priorité d'une définition complète de la Cinématique appliquée, dont une première idée seulement remonte à Monge, ne peut pas être contestée à Ampère.

(**) Tous les autres systèmes, à l'exception de celui de M. Ch. Laboulaye, ne sont que des modifications des classifications de Monge ou de M. Willis. On trouve une analyse détaillée et savante de tous ces sys-

Par les classifications de Monge et de Willis, tous les mécanismes se trouvent divisés en un certain nombre de classes et de genres; chaque genre renferme une série de types distincts, comme engrenages, excentriques, parallélogrammes, etc.; mais, parmi ces différents types, il y en a quelques-uns qui embrassent eux-mêmes un si grand nombre d'espèces particulières, qu'ils exigent à leur tour une classification spéciale, afin de pouvoir être étudiés d'une manière méthodique et complète.

Parmi ces derniers types figure en première ligne celui des engrenages, dont les systèmes admissibles sont en nombre infini, ce qui dépend de l'arbitraire très-large que comporte le problème fondamental de leur construction géométrique. Je me propose dans cette Note d'exposer une classification spéciale des engrenages, classification systématique et complète qui embrasse toutes les espèces possibles du type, c'est-à-dire non-seulement celles qui ont été proposées jusqu'à présent, mais aussi toutes celles qui sont admissibles, en général, d'après les conditions du problème fondamental. En partant de l'énoncé complétement général de ce dernier problème, renfermant la définition géométrique des engrenages, je commence par établir les caractères distinctifs sur lesquels doit reposer le classement en question; je fais suivre ensuite la classification même, et je finis par rappeler toutes les solutions proposées en théorie ou réalisées en pratique, en les citant consécutivement comme exemples des subdivisions particulières obtenues.

---

tèmes dans un travail récent de M. Reuleaux, intitulé : *Kinematische Mittheilungen*, et inséré dans les *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen*, 1871-1874, travail plein d'idées nouvelles et fécondes sur la composition des machines, et destiné peut-être à réformer complétement la Cinématique appliquée, ainsi que la science des machines en général.

2. Le problème général des engrenages s'énonce ainsi :

Étant donnés deux axes C, C_1 *situés d'une manière quelconque dans l'espace, trouver deux surfaces* (s), (s_1) *qui, étant liées invariablement, la première à l'axe* C, *la seconde à l'axe* C_1, *et tournant respectivement autour de ces axes avec des vitesses angulaires dont le rapport conserve constamment une même valeur donnée, restent toujours en contact pendant leur mouvement.*

Les deux surfaces (s), (s_1) ainsi déterminées, et que nous nommerons *surfaces* ou *dents conjuguées*, constituent par leur ensemble un *engrenage* au point de vue géométrique ou cinématique.

Les conditions principales et nécessaires énoncées dans le problème fondamental, pouvant être spécialisées davantage, laissent arbitraires plusieurs nouvelles conditions, compatibles avec les premières, ce qui conduit à établir les distinctions suivantes :

1° Les surfaces conjuguées peuvent être telles, que pendant la transmission de mouvement entre les deux axes leur mouvement relatif soit un roulement simple, ou bien telles, que ce mouvement relatif soit un glissement mixte, c'est-à-dire un mouvement composé d'un roulement et d'un glissement. A ce point de vue, tous les engrenages se subdivisent en *engrenages de roulement* et *engrenages de glissement*. Il est évident qu'en général la pratique doit préférer les premiers aux seconds, attendu que la résistance au roulement est très-peu considérable en comparaison du frottement de glissement ; néanmoins on ne connaît pas de systèmes de roulement satisfaisant en même temps à toutes les autres exigences pratiques, et la plupart des systèmes usités sont des engrenages de glissement.

2° Les surfaces conjuguées peuvent, pendant la transmission de mouvement, être constamment en contact par une ligne ou par un seul point. Dans les engrenages du premier genre, les dents en prise, agissant l'une sur l'autre simultanément en une infinité de points, peuvent supporter des efforts beaucoup plus considérables que dans les engrenages du second genre, où toute l'action mutuelle des dents en prise est concentrée en un point unique; c'est pourquoi, dans tous les cas où il s'agit de transmettre l'action de forces considérables entre deux axes, on emploie les engrenages du premier genre, appelés pour cette raison *engrenages de force;* tandis que les engrenages du second genre, aptes à ne transmettre que de faibles efforts, sont employés principalement dans les instruments de précision, ce qui leur a fait donner le nom d'*engrenages de précision.*

3° Enfin une troisième distinction essentielle se rapporte à la position relative des axes entre lesquels il s'agit d'établir une transmission de mouvement; à ce nouveau point de vue, trois cas sont possibles, les axes pouvant être : 1° non situés dans un même plan, 2° parallèles, 3° concourants. Toutes choses égales d'ailleurs, le type de l'engrenage sera différent dans chacun de ces trois cas; mais, le cas 1° embrassant les deux autres, il doit aussi exister entre les trois types respectifs d'engrenages une relation qui permet de déduire les types du deuxième et du troisième cas de celui du premier, de manière que, dans une théorie géométrique des engrenages, il suffirait de ne traiter en détail que le premier cas, et d'indiquer ensuite ce que deviennent les résultats obtenus pour les deux cas particuliers, lorsque l'angle entre les axes devient égal à zéro ou à 180 degrés, ou lorsque la plus courte distance des axes s'annule (*).

(*) Il y a lieu de faire bon marché de la distinction entre les engrenages *extérieurs, intérieurs* et à *crémaillère;* car, dans chaque cas par-

3. En adoptant comme premier élément d'une classification générale des engrenages la distinction 1°, comme deuxième élément la distinction 3°, et comme troisième élément la distinction 2°, on obtient le tableau synoptique suivant :

(A) Engrenages de glissement :	(*a*) *Axes non situés dans un même plan :*	(α) Engrenages de précision.	I
		(β) Engrenages de force.....	II
	(*b*) *Axes parallèles :*	(α) Engrenages de précision.	III
		(β) Engrenages de force.....	IV
	(*c*) *Axes concourants :*	(α) Engrenages de précision.	V
		(β) Engrenages de force.....	VI
(B) Engrenages de roulement :	(*a*) *Axes non situés dans un même plan :*	(α) Engrenages de précision.	VII
		(β) Engrenages de force.....	VIII
	(*b*) *Axes parallèles :*	(α) Engrenages de précision.	IX
		(β) Engrenages de force.....	X
	(*c*) *Axes concourants :*	(α) Engrenages de précision.	XI
		(β) Engrenages de force.....	XII

Par cette classification, tous les engrenages admissibles se subdivisent donc en douze variétés distinctes.

4. Il ne me reste qu'à citer des exemples de ces différentes variétés, ce que je ferai en donnant, dans l'ordre de la classification ci-dessus, une énumération de tous les systèmes proposés en théorie et employés en pratique.

Variété I. — 1° *Engrenage de précision dont les dents conjuguées sont les enveloppes d'une même surface quelconque qui se meut parallèlement à elle-même dans l'espace* et dont l'exécution mécanique consiste à tailler

---

ticulier, les deux derniers systèmes se déduisent trop facilement du premier, et conservent en même temps les propriétés essentielles de l'espèce. Cette distinction ne peut donc servir utilement d'élément à une classification des engrenages. Il est vrai que la distinction 3°, relative à la position des axes, donne lieu à trois systèmes dont les deux derniers se déduisent aussi du premier; mais, dans ce cas, les propriétés essentielles de l'espèce ne restent, en général, plus les mêmes après la transformation.

l'une des roues par une vis triangulaire, et l'autre par l'écrou de cette vis. Ce système fut proposé par Olivier, qui l'annonça à la Société d'encouragement pour l'Industrie en 1831, et en exposa ensuite la théorie dans son important ouvrage sur les Engrenages (*); plus tard, Olivier construisit même une machine spéciale pour l'exécution pratique de ces engrenages, qui est exposée au Conservatoire des Arts et Métiers.

2° *Engrenage de précision dont les dents conjuguées ont la forme d'hélicoïdes développables* servant d'enveloppes à un plan qui se meut parallèlement à lui-même dans l'espace. Ce système n'est qu'un cas particulier du précédent, savoir lorsque la surface enveloppée est un plan ; il fut aussi indiqué par Olivier (**), et reproduit ensuite avec plus de détails relatifs à sa réalisation pratique par M. Pützer (***).

3° *Engrenage de précision dans lequel les dents de l'une des roues sont des hélicoïdes développables et les dents de l'autre des cylindres dont les sections droites sont des développantes de cercle.* Cette solution, due à M. Pützer (****), est à son tour un cas particulier de la précédente, savoir quand le plan mobile est parallèle à l'un des deux axes de rotation.

4° *Engrenage de précision d'Olivier* (*****), *dans lequel les dents des deux roues sont des cylindres à développantes de cercle,* et que l'on obtient en faisant tourner

(*) *Théorie géométrique des engrenages*, Chap. III ; 1842.

(**) *Ibid.*

(***) Pützer, *Ueber den spiraloidischen Zahneingriff* (*Zeitschrift des Vereins der deutschen Ingenieure,* Band IV, p. 234 *et seq.*, 1860).

(****) *Ibid.*

(*****) Voir *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale,* 1829, p. 430, et 1830, p. 293.

l'une des roues d'un engrenage cylindrique à développantes autour de la droite parcourue par le point de contact de deux dents en prise. Ce système dérive de l'espèce 2°, en supposant le plan mobile parallèle à la fois aux deux axes de rotation.

VARIÉTÉ II. — 1° *Engrenage de force dans lequel les dents des deux roues sont des hélicoïdes développables.* Ce système, dû à Olivier (*), dérive de l'espèce 2° de la variété précédente, en admettant que les deux cylindres, sur lesquels sont tracées les hélices servant d'arêtes de rebroussement aux hélicoïdes développables conjugués, ont un même plan tangent perpendiculaire au plan enveloppé par les hélicoïdes.

2° *Engrenage de force dans lequel l'une des deux dents conjuguées est un hélicoïde développable, l'autre un cylindre à développantes de cercle.* Cette espèce provient de la précédente dans l'hypothèse particulière que le plan enveloppé par les hélicoïdes est parallèle à l'un des deux axes de rotation; elle est due à Olivier, qui la présenta à la Société d'Encouragement en 1830, et l'a beaucoup recommandée à la pratique.

3° *Engrenage à vis sans fin,* employé depuis Pappus (**) pour transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan et rectangulaires. Olivier a démontré (***) que le même système peut aussi servir à réunir deux axes non situés dans un plan et formant entre eux un angle aigu.

4° *Engrenage hélicoïdal* qui dérive de la vis sans fin

(*) *Théorie géométrique des engrenages*, p. 41 et 68.

(**) *Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones*, lib. VIII, prop. 24 Bonon., 1660.

(***) *Théorie géométrique des engrenages*, p. 14 et 87.

en augmentant le nombre des filets et le diamètre de cette vis, et réduisant en même temps son épaisseur (*).

5° *Système de deux hyperboloïdes primitifs*, représentant les lieux géométriques des axes instantanés des mouvements relatifs de deux systèmes invariables tournant autour des deux axes de rotation avec des vitesses angulaires dont le rapport reste constant. De ce système, indiqué par M. Willis (**), et dont une théorie correcte a été faite pour la première fois par M. Belanger (***), dérive, en couvrant deux troncs des hyperboloïdes primitifs par des stries rectilignes fines suivant les génératrices de contact des hyperboloïdes, une solution approximative, étudiée d'abord également par M. Belanger (****) et nommée *engrenage hyperboloïde*.

6° *Engrenage hyperboloïde à flancs paraboloïdes de M. Tessari* (*****), espèce proposée récemment et dont on a pu voir un modèle en relief à l'Exposition de Vienne en 1873. C'est la première solution rigoureuse pour le système *hyperboloïdique*, analogue aux solutions connues : engrenages à lanterne, à développantes, etc., dans les systèmes *cylindriques* et *coniques* (*voir* variétés IV et VI).

VARIÉTÉ III. — On ne saurait indiquer de systèmes

(*) Voir HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Traité théorique et pratique des engrenages*, p. 43, 1861. Il faut bien distinguer cette espèce de l'engrenage dit *de White*, que quelquefois l'on désigne sous le nom d'*engrenage hélicoïdal*, mais qui se rapporte aux variétés IX et XI de notre classification.

(**) WILLIS, *Principles of mechanism*, 1re édition, 1841.

(***) BELANGER, *Résumé d'une théorie de l'engrenage hyperboloïde* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861, p. 126).

(****) *Ibid.*, et *Traité de Cinématique* du même auteur, p. 159-161, 1864.

(*****) Voir DOMENICO TESSARI, *Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti* (*Annali del R. Museo industriale italiano*, 1871).

proposés appartenant à cette variété; mais on peut citer comme exemples plusieurs engrenages qui proviendraient des espèces 1-3 de la variété I, en y supposant l'angle des axes égal à zéro ou 180 degrés.

VARIÉTÉ IV. — *Engrenages cylindriques,* système bien connu et le plus répandu en pratique, qui embrasse les genres particuliers suivants :

1° *Engrenage à lanterne;*

2° *Engrenage à développantes;*

3° *Engrenage à flancs* (tracé simple et double);

4° *Engrenage à épicycloïdes* (tracé simple et double).

C'est par des recherches sur les systèmes de cette variété, la plus simple de toutes, que La Hire, Ch. Camus et Euler ont commencé l'étude géométrique des engrenages.

VARIÉTÉ V. — Ce qui a été dit plus haut sur les systèmes de la variété III se rapporte également aux espèces de la variété V, avec cette seule différence que, pour obtenir des exemples de ces dernières, il faut, dans les systèmes 1-3 de la variété I, supposer la plus courte distance entre les axes égale à zéro.

VARIÉTÉ VI. — *Engrenages coniques,* système également connu et répandu comme les engrenages cylindriques et admettant des genres particuliers analogues.

VARIÉTÉ VII. — 1° *Engrenage de roulement inventé par Olivier* en 1816, et dont on trouve la théorie et la description dans le Chapitre IV de son ouvrage sur les engrenages (*). Dans ce système, ainsi que dans ceux des variétés IX et XI, systèmes regardés pendant long-

(*) *Théorie géométrique des engrenages,* p. 100-114.

temps comme impossibles (*), les dents doivent être considérées non comme étant terminées par des surfaces, mais comme étant seulement des courbes (**). Les espèces des variétés VII, IX et XI représentent ainsi en quelque sorte des *solutions singulières* du problème fondamental des engrenages.

2° *Engrenage à tire-bouchon d'Olivier* (***).

VARIÉTÉ VIII. — La théorie prouve (****) qu'on ne peut construire aucun système de cette variété.

VARIÉTÉ IX. — *Engrenage à axes parallèles, dit de White* (*****), mais dont la première idée remonte au moins au D[r] Robert Hooke qui, en 1666, présenta un modèle du même engrenage à la Société royale de Londres, et en publia la description en 1674 (******).

(*) Voir *Théorie géométrique des engrenages*, p. 100. « Pendant longtemps on a cru que l'on ne pouvait pas construire un engrenage dans lequel le frottement fût de roulement, en même temps que le rapport des vitesses des axes était constant. Le Mémoire publié par Euler, dans lequel il avait démontré que, pour les engrenages cylindriques, le frottement est toujours de glissement lorsque le rapport des vitesses des axes est constant, avait contribué à maintenir cette erreur, et cela parce qu'on n'avait pas vu qu'Euler établissait, par le fait, la condition que le point de contact des deux courbes qui se conduisaient ne sortait pas du plan de ces courbes, et qu'il pouvait bien arriver qu'en prenant deux courbes à double courbure leur point de contact se mouvant dès lors dans l'espace, le frottement de glissement se trouvât transformé en frottement de roulement, en assujettissant le point de contact à parcourir dans l'espace une certaine ligne courbe ou droite. »

(**) Voir aussi le Mémoire cité de M. Pützer, § 18.

(***) Voir OLIVIER, *Note sur les engrenages de White* (*Journal de M. Liouville*, t. V, 1840).

(****) Voir OLIVIER, *Théorie géométrique des engrenages*, p. 103.

(*****) White a pris un brevet pour ce système en 1808, et l'a décrit d'abord dans une brochure publiée à part, et ensuite, en 1822, dans son *Century of inventions*.

(******) ROBERT HOOKE, *Cutlerian lectures*, n° 2, p. 70, 1674.

VARIÉTÉ X. — L'unique système possible de cette variété est celui des *cylindres de friction*.

VARIÉTÉ XI. — *Engrenage à axes concourants dit de White* (*).

VARIÉTÉ XII. — Les *cônes de friction* constituent le seul système possible de cette dernière variété.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. V. HIOUX.

Une circonférence homogène de masse totale m peut tourner autour d'un diamètre horizontal AA′ *comme charnière. Cette charnière fait corps en son milieu avec un axe vertical* BB′ *autour duquel le système tourne avec une vitesse constante et donnée. Par suite de cette rotation, l'anneau tend à se placer dans un plan horizontal; mais cette tendance est combattue par l'action de la pesanteur sur une masse additionnelle* M *fixée à l'extrémité* C *du diamètre perpendiculaire à la charnière. On propose :* 1° *de déterminer la position angulaire pour laquelle l'anneau resterait en repos relatif;* 2° *de trouver et de discuter pour une époque quelconque l'expression de la vitesse angulaire de l'anneau autour de la charnière.*

(*) La théorie des engrenages à axes parallèles et à axes concourants de White a été faite pour la première fois par Olivier dans deux Mémoires rédigés par lui depuis 1816, présentés en 1826 à l'Académie des Sciences, et insérés ensuite dans le *Journal de M. Liouville*, t. IV et V, 1839 et 1840.

Soient O le centre de l'anneau, R son rayon et G le centre de gravité du système des deux masses m et M. Le point G se trouve sur OC à une distance l du point O, telle que l'on ait

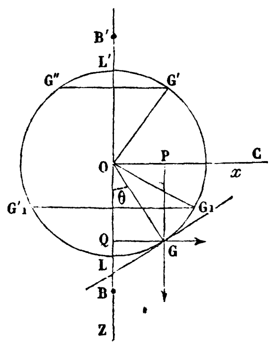
$$ml = \mathrm{M}(\mathrm{R} - l), \quad \text{d'où} \quad l = \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{M} + m}.$$

Cette longueur l est indépendante du temps et de la vitesse de rotation ω. Si l'on suppose le point G invariablement lié à l'anneau, la question se trouve ramenée à la suivante :

Un point matériel de masse $\mu = \mathrm{M} + m$ *décrit une circonférence dont le plan est vertical et qui tourne uniformément autour de l'axe* BB' *avec une vitesse donnée* ω : *étudier le mouvement de ce point matériel* G.

Prenons pour axe des z la droite OB (*fig.* 1) dirigée dans le sens de la pesanteur, et pour axe des x la direc-

Fig. 1.



tion OC perpendiculaire à Oz; désignons par θ l'angle BOG que fait le rayon OG avec Oz à l'époque t.

D'après le principe de Coriolis, le cercle OG de rayon l

pourra être considéré comme immobile si l'on joint à l'action de la pesanteur sur la masse μ les forces fictives dues à la rotation. La force centrifuge composée agit perpendiculairement à la vitesse relative dirigée suivant la tangente au cercle; l'effet de cette force est donc nul sur le mouvement du point G qui s'effectue dans la direction de cette tangente. Nous n'avons donc à tenir compte que de la force centrifuge $\mu\omega^2 l \sin\theta$ et du poids μg du point G.

Si l'on projette ces deux forces sur la tangente au point G, en remarquant que leur résultante est $\mu \frac{d^2 s}{dt^2}$ ou $\mu l \frac{d^2\theta}{dt^2}$, on a, pour l'équation différentielle du mouvement,

$$(1) \qquad l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin\theta + l\omega^2 \sin\theta \cos\theta,$$

en observant que la pesanteur agit de façon à diminuer l'angle θ, et que la force centrifuge produit l'effet opposé.

1° Le point G sera en repos relatif si l'on a

$$\mu l \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin\theta(l\omega^2 \cos\theta - g) = 0.$$

Si l'on pose $\sin\theta = 0$, d'où $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on voit qu'il y a possibilité de repos relatif quand le point G se trouve sur l'axe Oz soit en L, soit en L'.

Si l'on pose $l\omega^2 \cos\theta - g = 0$, d'où $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$, et si la valeur de $\cos\theta$ est admissible, c'est-à-dire égale ou inférieure à 1, il pourra y avoir repos relatif pour une valeur θ_1 de θ déduite de cette relation.

Soit $LOG_1 = \theta_1$; si l'on place le point G en G_1 sans vitesse initiale, il y restera en repos relatif, ce qui revient à dire que le point G décrit sur la sphère de rayon OG un parallèle déterminé dont le plan est perpendiculaire à l'axe Oz.

2° Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $2l\,d\theta$, et intégrons par rapport à θ, il vient

$$v^2 = 2gl\cos\theta + l^2\omega^2\sin^2\theta + c.$$

Pour déterminer la constante, supposons que, pour $t=0$, le mobile soit en L, point de repos relatif, avec une vitesse v_0. L'équation précédente donne alors, pour $\theta = 0$,

$$c = v_0^2 - 2gl.$$

L'expression de la vitesse est, par suite,

$$(2)\qquad v^2 = -\,l^2\omega^2\cos^2\theta + 2gl\cos\theta + l^2\omega^2 + v_0^2 - 2gl.$$

Nous sommes ainsi conduit à étudier les variations d'un trinôme du second degré en $\cos\theta$. Cette étude se fait aisément si l'on met l'expression (2) sous la forme

$$(3)\qquad v^2 = \frac{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}{\omega^2} - l^2\omega^2\left(\cos\theta - \frac{g}{l\omega^2}\right)^2.$$

Les racines du second membre sont données par la formule

$$\cos\theta = \frac{g \pm \sqrt{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}}{l\omega^2}.$$

On voit que la racine positive doit être rejetée, et que la racine négative n'est admissible que si l'on a

$$v_0^2 < 4gl \quad \text{ou} \quad 2g \times 2l.$$

Ainsi la vitesse du mobile G ne s'annulera jamais si la vitesse v_0 du point L est supérieure à celle qu'il acquerrait en tombant le long de Oz d'une hauteur égale à $2l$.

Si l'on a

$$v_0^2 = 4gl,$$

on a

$$v^2 = 0 \quad \text{pour} \quad \cos\theta = -1, \quad \text{ou} \quad \theta = \pi.$$

Le mobile décrit le demi-cercle LGL', s'arrête en L' et y demeure indéfiniment en éuqilibre relatif instable.

L'inégalité $v_0^2 < gl$ est indépendante de la vitesse de rotation ω. Faisons, dans l'équation (2), $\omega = 0$ et $v_0^2 = 4gl$, nous obtenons

$$v^2 = 2gl(1 + \cos\theta) = 4gl\cos^2\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\theta}{2},$$

et, par suite,

$$T = \left(-\log\operatorname{tang}\frac{\pi - \theta}{4}\right)_0^\pi \times \sqrt{\frac{l}{g}},$$

et enfin

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \times (-\log 0 + 0) \quad \text{ou} \quad T = \infty.$$

On peut donc dire que, dans ce cas, l'anneau n'atteindra jamais une position verticale, mais s'en rapprochera indéfiniment en marchant dans le même sens.

Discussion du trinôme.

Première hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ et $v_0^2 < 4gl$. — Le trinôme s'annule pour une valeur θ' de θ telle que

$$\cos\theta' = \frac{g - \sqrt{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}}{l\omega^2} = -h.$$

Si l'on fait varier θ d'une manière continue depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta'$, la valeur de v^2, d'abord égale à v_0^2, croît d'une manière continue, et prend une valeur *maximum* quand on a $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_1$.

La valeur de θ augmentant toujours, celle de v^2 diminue et devient nulle pour $\theta = \theta'$. Le point G atteint une position limite G′ qu'il ne peut dépasser.

Si l'on fait décroître θ depuis $\theta = \theta'$ jusqu'à $\theta = 0$, la vitesse v repassera par les mêmes valeurs, mais en sens inverse, et, comme le changement de θ en $-\theta$ n'altère pas le trinôme, le point G franchira le point L et décrira un arc GG″ symétrique de GG′. Le point G se mouvra par suite indéfiniment du point G′ au point G″, et inversement. Ainsi, dans ce cas, l'anneau a un mouvement oscillatoire dont l'amplitude angulaire est égale à $2\theta'$.

La vitesse v est deux fois nulle, deux fois maximum, et deux fois égale à v_0 en des couples de points correspondants sur les deux arcs GG′ et GG″.

Si l'on suppose $v_0^2 > 4gl$, le trinôme ne s'annule pour aucune valeur de θ; la valeur de v^2, maximum pour $\theta = \theta_1$, devient minimum pour $\theta = \pi$ ou $\cos\theta = -1$. L'anneau tourne indéfiniment dans le même sens autour de son axe AA′, d'un mouvement périodique.

Deuxième hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} = 1$, $v_0^2 < 4gl$. — Dans ce cas, on a $\theta_1 = 0$, et le point G_1 se confond avec le point L. Le maximum de v^2 est v_0^2; c'est la seule restriction qu'il faut apporter à l'étude de l'hypothèse précédente.

Troisième hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} > 1$. — Le point G ne peut encore être en repos relatif qu'au point L ou au point L′. Si l'on a $v_0^2 < 4gl$, le mouvement est oscillatoire, et le maximum de v^2 est v_0^2. Si, au contraire, on a $v_0^2 > 4gl$, la valeur de v^2 est minimum pour $\cos\theta = -1$, et ce minimum est égal à $v_0^2 - 4gl$. On a un mouvement périodique s'effectuant toujours dans le même sens.

SUR LES CONIQUES BITANGENTES A UNE AUTRE CONIQUE;

Par M. R. LEFÉBURE DE FOURCY.

La *Revue scientifique*, dans un de ses derniers Bulletins, mentionne un travail récent communiqué par M. Niewtschik à l'Académie de Vienne. Voici l'énoncé du problème :

Inscrire une ellipse à un cercle, étant donnés le centre et une tangente à cette ellipse.

Nous nous sommes attaché à résoudre ce problème par une méthode qui donne cette solution plus générale : construction d'une conique bitangente à une autre et déterminée d'ailleurs par trois autres conditions. Tel est le sujet que nous allons traiter.

Construction d'une ellipse déterminée par son centre, un cercle bitangent et un cercle tangent.

Si l'on suppose le problème résolu, on reconnaît facilement que le cercle peut être considéré comme la ligne de contour d'une sphère sur un plan horizontal passant par son centre; l'ellipse sera la projection d'une section plane, ayant son centre sur une normale au plan, et dont par suite la trace est le point donné, et de plus ayant une tangente commune avec une autre section de la même sphère, section qui fait deux dièdres égaux avec le plan horizontal puisqu'elle se projette suivant la corde donnée.

Le problème plan est ainsi ramené à un problème de l'espace qui se résout par la règle et le compas en projetant la figure sur différents plans, ou, ce qui revient au même, par des mouvements de rotation. Voici comment :

On aperçoit tout de suite que toute section de la sphère assujettie à toucher une autre section donnée a son centre sur un tore engendré par un cercle de rayon $\frac{R}{2}$, R étant le rayon de la sphère. De plus, ce tore est tangent à la sphère tout le long de la section donnée. Si donc nous voulons avoir la section particulière dont la projection donne l'ellipse cherchée, il suffit de prendre l'intersection du tore et de la droite qui se projette suivant un point. Cette droite, dans le cas de notre figure, étant perpendiculaire à l'axe du tore, la construction se fait avec la règle et le compas.

On voit ainsi que nous aurons en général quatre solutions.

Nous allons étudier les conditions de possibilité du problème; les résultats que nous obtiendrons seront la clef des conditions de possibilité pour les problèmes analogues auxquels nous devons passer bientôt.

La zone où doit se trouver le centre n'est autre que la projection du tore, puisqu'il faut qu'il y ait rencontre de la droite avec cette surface pour que le problème soit possible.

Nous aurons deux solutions seulement si le centre tombe dans l'un des deux cercles qui figurent la section horizontale du tore. En effet, la droite dont ce point est la trace ne rencontre que deux fois la surface.

Nous aurons quatre solutions dans la partie intermédiaire.

Parmi ces solutions, il faudra distinguer celles qui donnent des contacts effectifs de celles qui ne donnent que des contacts idéaux.

On trouverait pour ligne de séparation la projection d'une courbe gauche placée sur une certaine sphère, et, quel que soit le plan de projection, toujours d'un degré supérieur.

On traiterait sans difficulté à l'aide de procédés analogues notre problème, en y changeant les données de la façon suivante :

(2) Cercle, — centre, — point de la courbe;

(3) Cercle, — ligne du centre, — point avec sa tangente (*);

(4) Cercle, — ligne du centre, — deux points;

(5) Cercle, — trois points.

Quant aux combinaisons autres, on rencontre immédiatement des impossibilités.

Il est temps de généraliser, en passant, un cas où la conique à construire devient extérieure au cercle, ce qui aura lieu forcément quand la tangente ou un des points donnés seront eux-mêmes en dehors.

Prenons d'abord le problème de la tangente comme nous l'avons fait précédemment; cette fois elle est donnée extérieure au cercle bitangent.

Pour ne pas changer de méthode, nous sommes naturellement conduit à prendre notre figure plane comme projection d'une figure de l'espace. Le cercle sera le cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution, la droite une section verticale, le centre la trace d'une droite normale au plan de projection.

Supposons maintenant une autre section parallèle à la première : par les deux on fera passer un cône. Menons un plan tangent le long d'une directrice; il détermine dans l'hyperboloïde une section dont la projection sera bitangente au cercle de gorge, et tangente à chacune des sections projetées. Le centre se projette au centre de la

(*) Le point et sa tangente peuvent se remplacer par point et ellipse tangente en ce point, l'ellipse étant telle qu'on puisse la supposer la projection d'un cercle de la sphère. Un mouvement de rotation ramène au cas le plus simple.

génératrice, et, quand elle change de place, décrit une courbe semblable aux courbes directrices, et qui, par suite, comme elles, se projette suivant une droite. Il reste à déterminer la section arbitraire de telle sorte que cette droite rencontre le point.

On a deux cônes qui donnent chacun deux solutions.

Nous aurons encore les problèmes indiqués au chapitre de la sphère, c'est-à-dire

(2) Cercle, — centre, — point;

(3) Cercle, — ligne du centre, — point et sa tangente;

(4) Cercle, — ligne du centre, — deux points;

(5) Cercle, — trois points.

Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails. Prenons le n° (3).

Pour qu'une droite passant par le point donné contienne le centre de la courbe, il faut que la tangente à l'extrémité inconnue soit parallèle à la tangente donnée. Nous sommes ainsi conduit à chercher sur l'hyperboloïde le lieu des points tels que les tangentes à des sections verticales parallèles soient parallèles. On vérifie facilement que ce lieu se projette en ligne droite sur un plan vertical, ce plan étant déterminé par une ligne de terre parallèle à la droite donnée. Nous avons donc une section plane de l'hyperboloïde. Le centre cherché décrira une courbe semblable et moitié moindre; on prendra l'intersection avec le plan projetant de la ligne du centre, et, en revenant à la figure primitive, on aura les deux solutions.

(4) Cherchons les plans tangents à la surface en chaque point. Les tangentes aux sections se rencontrent deux à deux à l'intersection de ces plans. Le diamètre conjugué à la corde donnée passe par le point de rencontre de ces

tangentes. Il décrit donc un plan dans l'espace en passant par un point fixe.

Pour avoir le lieu du centre, nous sommes ramené à ce problème :

Par un point fixe, on mène une sécante à une conique : trouver le lieu du milieu de la corde. On sait que ce lieu est une conique.

Rien à dire du n° (5).

Il resterait à démontrer que notre méthode donne toutes les solutions des problèmes étudiés.

La démonstration est facile : il suffit de la signaler à l'attention.

Généralisation.

Nous avons traité le cas du cercle bitangent : nous allons démontrer que ce cercle peut être remplacé par une ellipse quelconque.

En effet, la courbe étant fermée, on pourra toujours par une projection orthogonale la déformer de telle sorte qu'elle devienne un cercle; dans cette opération, les droites, les points, le centre donnés prendront une position nouvelle et, quand on aura fait la construction sur cette figure, on reviendra à la primitive. Une seule chose sera changée, les axes seront devenus des diamètres conjugués. On peut par suite construire les nouveaux axes.

Si, au contraire, la courbe est à branches infinies, on ne pourra la fermer que par la projection perspective. Or on sait que les centres de deux sections non parallèles ne sont pas sur une même droite avec le sommet.

Cette difficulté ne nous permet pas d'étendre aux autres coniques ce que nous avons dit de l'ellipse, et nous ne pensons pas qu'on puisse y parvenir.

La généralisation subsiste pour le cas où les données sont trois points et une conique bitangente.

PROPOSITIONS RELATIVES A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. E. CATALAN.

I.

1. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 3(2n+1)^2,$$

dans laquelle les inconnues ne peuvent recevoir que des valeurs entières, nulles ou positives. L'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de $x + y + z$ *égale* $(2n+1)(-1)^n$.

2. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 24N + 3,$$

dans laquelle les valeurs des inconnues sont encore assujetties aux conditions précédentes. Si le second membre n'est pas le triple d'un carré, la somme $x + y + z$ *admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.* (JACOBI.)

3. *Le triple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés de la forme* $(6\mu \mp 1)^2$. *Si le nombre donné est* $3(2n+1)^2$, *il y a au moins autant de décompositions que l'indique le plus grand entier contenu dans* $\frac{2n+1}{6}$.

4. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 6(2n+1)^2 \; (*).$$

(*) Les conditions relatives aux valeurs que peuvent recevoir les inconnues sont les mêmes que précédemment.

L'excès du nombre des valeurs paires de

$$x+y+z+\frac{3y^2\mp y}{2},$$

sur le nombre des valeurs impaires, égale $(2n+1)(-1)^n$.

5. *Soit l'équation*

$$(6x\mp 1)^2+(6y\mp 1)^2+4(6z\mp 1)^2=24\mathrm{N}+6.$$

Si le second membre n'est pas le sextuple d'un carré, la quantité

$$x+y+z+\frac{3y^2\mp y}{2}$$

admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.

6. *Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme* $(6\mu\mp 1)^2$, *et le troisième la forme* $4(6\mu\mp 1)^2$.

7. *Soit l'équation*

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+16z^2=(2n+1)^2.$$

Soit, pour $z=0$, ε *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* $\frac{y(y+1)}{2}$. *Soit, semblablement,* ε' *l'excès du nombre des valeurs paires de* $\frac{y(y+1)}{2}+z$ *sur le nombre des valeurs impaires,* z *étant positif. On a*

$$\varepsilon+2\varepsilon'=(2n+1)(-1)^n.$$

8. *L'excès du nombre des valeurs paires de* x, *satisfaisant à l'équation*

$$4x^2+4y^2+(2z+1)^2=(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - 1}{4} \quad (*).$$

9. *Si un nombre premier,* P, *n'est pas la somme de deux carrés,* P^2 *est décomposable en trois carrés.*

10. *Si un nombre premier,* P, *est égal à la somme de trois carrés,* P^2 *est généralement égal aussi à la somme de trois carrés.*

11. *L'équation*

$$4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = 8N + 1,$$

dans laquelle le second membre n'est pas carré, est vérifiée par un même nombre de valeurs paires et de valeurs impaires de x (**).

12. *a étant le nombre des solutions de l'équation*

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 2(2n+1)^2,$$

l'excès du nombre des valeurs paires de z, *qui vérifient*

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 8z^2 = 2(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - a}{2}.$$

13. *Si l'on fait* $n = di$, *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \ldots + i_8^2 = 8n$$

(*) Dans l'application de ce théorème, on peut faire $y = 0$, mais non $x = 0$. En outre, à cause de la valeur de ε, *n doit être pair*. On peut donc remplacer l'équation par $4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = (4\mu+1)^2$, et alors la formule devient $\varepsilon = \mu$.

(**) On fait toujours abstraction de $x = 0$.

est égal à la somme des cubes des diviseurs d (*).

14. *Si, de plus,* $4n = i' + i''$, *alors*

$$\Sigma\left(\int i' \times \int i''\right) = 8\Sigma d^3 \ (^{**}).$$

15. *La somme des diviseurs d'un nombre impair, i, est égale à la somme des produits deux à deux des excès relatifs aux nombres impairs dont la somme est* $2i$ (***).

II.

Les propositions précédentes sont extraites d'un Mémoire intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis*. MM. Le Besgue et Chabanel ont fait voir que la proposition 10, corollaire du théorème 8, est tout simplement la *traduction* de l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 \ (^{****}).$$

Ce moyen de démonstration, basé sur de simples identités, est-il applicable à quelques-unes des propositions énoncées ci-dessus? Cela est désirable. Quoi qu'il en soit,

---

(*) $i, i_1, i_2, i_3, \ldots$ désignent des nombres *impairs*.

(**) La notation $\int p$, employée par Euler, représente la *somme des diviseurs de p*.

(***) J'appelle *excès relatif à un nombre impair* N l'excès du nombre des diviseurs de N, ayant la forme $4\mu + 1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu - 1$.

(****) En outre, comme le fait observer M. Chabanel : 1° *il est inutile que le nombre* $a^2 + b^2 + c^2$ *soit premier;* 2° on peut *permuter* les lettres *a, b, c*. Cette seconde remarque donne lieu, par exemple, aux trois décompositions suivantes :

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2,$$
$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 12^2 + 11^2,$$
$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 21^2 + 16^2 + 12^2.$$

voici quelques identités (*) qui se rapportent à la *décomposition, en quatre carrés, du carré d'une somme de trois carrés :*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2 \\ & +(ab-ac)^2+(a^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (c^2+a^2)^2+(bc+ba)^2 \\ & +(bc-ba)^2+(b^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(3\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (a^2+b^2)^2+(ca+cb)^2 \\ & +(ca-cb)^2+(c^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (a^2+2bc)^2+(ab-ac)^2 \\ & +(ab-ac)^2+(b^2-c^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (b^2+2ca)^2+(bc-ba)^2 \\ & +(bc-ba)^2+(c^2-a^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (c^2+2ab)^2+(ca-cb)^2 \\ & +(ca-cb)^2+(a^2-b^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (a^2-2bc)^2+(ab+ac)^2 \\ & +(ab+ac)^2+(b^2-c^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (b^2-2ca)^2+(bc+ba)^2 \\ & +(bc+ba)^2+(c^2-a^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (c^2-2ab)^2+(ca+cb)^2 \\ & +(ca+cb)^2+(a^2-b^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 = {} & (bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2 \\ & +(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2, \end{aligned} \right.$$

(*) Toutes ces relations sont des cas particuliers de l'égalité

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = {} & (aa'+bb'+cc'+dd')^2 \\ & +(ab'-ba'-cd'+dc')^2+(ac'+bd'-ca'-db')^2+(ad+cb'-bc'-da')^2 \end{aligned}$$

trouvée par Euler. Je ferai remarquer, en passant, que le second membre de celle-ci peut être écrit d'*au moins vingt-quatre manières différentes.*

$$(11)\quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (bc+ca-ab)^2+(a^2+bc)^2 \\ \qquad\qquad +(b^2+ca)^2+(c^2-ab)^2, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (ca+ab-bc)^2+(b^2+ca)^2 \\ \qquad\qquad +(c^2+ab)^2+(a^2-bc)^2, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (ab+bc-ca)^2+(c^2+ab)^2 \\ \qquad\qquad +(a^2+bc)^2+(b^2-ca)^2. \end{cases}$$

III.

Puisque l'occasion s'en présente, je rappellerai ici les énoncés de deux théorèmes d'Arithmétique démontrés dans des recueils peu répandus :

1° *a, b étant deux nombres entiers, premiers entre eux, la fraction*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b}$$

est réductible à un nombre entier.

2° *a, b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction*

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a \times (b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est réductible à un nombre entier.

NOTE RELATIVE AU RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE, EN VALEUR DES ARÊTES

(voir 2e série, t. XII, p. 370);

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

1. L'expression, sous forme de déterminant, du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en fonction des six arêtes de ce tétraèdre, peut s'obtenir immédiatement au moyen de l'équation (I) de la page 371. En effet, cette équation

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donne d'abord

$$4R^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous multiplions par les quantités respectives a, b, c d'abord les trois dernières colonnes, puis les trois dernières lignes du second membre, et que nous remarquions que le facteur de $4R^2$, multiplié par $a^2b^2c^2$ ou $a^2b^2c^2\Delta^2$, est égal à $36V^2$, nous voyons que

$$144V^2R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ b^2 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ c^2 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, retranchons la première colonne de chacune des trois suivantes, multiplions ensuite les trois dernières lignes par -2 et divisons la première colonne résultante par -2, il nous vient

$$576V^2R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & 2a^2 - 2ab\cos\nu & 2a^2 - 2ca\cos\mu \\ b^2 & 2b^2 - 2ab\cos\nu & 0 & 2b^2 - 2bc\cos\lambda \\ c^2 & 2c^2 - 2ca\cos\mu & 2c^2 - 2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons actuellement la première ligne à chacune des trois suivantes, et retranchons de même la première colonne des trois suivantes, nous trouvons que

$$576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & c^2+a^2-2ca\cos\mu \\ b^2 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & 0 & b^2+c^2-2ab\cos\lambda \\ c^2 & c^2+a^2-2ca\cos\mu & b^2+c^2-2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, il nous suffira de remplacer les éléments $b^2+c^2-2bc\cos\lambda$, $c^2+a^2-2ca\cos\mu$, $a^2+b^2-2ab\cos\nu$ par les carrés des arêtes latérales a', b', c', pour avoir l'équation demandée

$$\text{(I)} \qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Autre forme de ce déterminant.* — Multiplions les trois dernières colonnes par les quantités respectives b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2, le déterminant sera multiplié par le produit $b^2c^2.c^2a^2.a^2b^2 = a^4b^4c^4$, et nous obtiendrons

$$576\,a^4b^4c^4\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2 & 0 & a^2c^2c'^2 & a^2b^2b'^2 \\ b^2 & b^2c^2c'^2 & 0 & b^2a^2a'^2 \\ c^2 & c^2b^2b'^2 & c^2a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix};$$

divisons ensuite les quatre lignes respectivement par $a^2b^2c^2$, a^2, b^2, c^2; le déterminant sera divisé par le produit $a^4b^4c^4$, et il nous viendra aussi

$$\text{(II)} \qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. *Troisième forme de déterminant* (I). — Dans ce dernier déterminant, multiplions les quatre lignes par les quantités respectives $aa'bb'cc'$, aa', bb', cc'; le déterminant se trouve multiplié par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, de sorte que nous avons

$$576\,a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' \\ aa' & 0 & aa'c^2c'^2 & aa'b^2b'^2 \\ bb' & bb'c^2c'^2 & 0 & bb'a^2a'^2 \\ cc' & cc'b^2b'^2 & cc'a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Divisons ensuite les trois dernières colonnes respectivement par $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$; le déterminant se trouve divisé par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, et nous trouvons encore que

$$\text{(III)}\qquad 576\mathrm{V}^2\mathrm{A}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

4. *Transformation du déterminant en produit.* — Dans ce dernier déterminant, remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; le déterminant ne change pas de valeur, et il vient, en divisant la première colonne résultante par $aa' + bb' + cc'$,

$$576\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa'+bb'+cc' & 0 & cc' & bb' \\ aa'+bb'+cc' & cc' & 0 & aa' \\ aa'+bb'+cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(aa'+bb'+cc')\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ 1 & cc' & 0 & aa' \\ 1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

Donc le déterminant (III) est divisible par

$$aa' + bb' + cc'.$$

Dans le même déterminant, de la somme des deux premières colonnes retranchons la somme des deux dernières ; nous obtenons

$$576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & aa' & bb' & cc' \\ aa' - bb' - cc' & 0 & cc' & bb' \\ bb' + cc' - aa' & cc' & 0 & aa' \\ bb' + cc' - aa' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (bb' + cc' - aa')\begin{vmatrix} 1 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ -1 & cc' & 0 & aa' \\ -1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix};$$

par suite, le déterminant est aussi divisible par

$$bb' + cc' - aa'.$$

On verrait de même qu'il est encore divisible par

$$cc' + aa' - bb',$$

et par

$$aa' + bb' - cc'.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} 576\,V^2R^2 = {} & (aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa') \\ & \times (cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc') \times q. \end{aligned}$$

Or, dans le déterminant (III), le produit des éléments situés sur la diagonale de droite à gauche est $-c^4c'^4$; il est aussi $-c^4c'^4$ dans le produit des facteurs qui précèdent q; donc on a $q = 1$, de sorte que

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} 576\,V^2R^2 = {} & (aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa') \\ & \times (cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc'). \end{aligned} \right.$$

CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE PAR UN DIVISEUR QUELCONQUE A;

PAR M. JOSEPH LUBIN,
Élève du collége Stanislas.

Nous avons trois cas à considérer, suivant que A est inférieur, égal ou supérieur à 10.

1er Cas. — $A < 10$.

Puisque A est < 10, je puis poser $A = 10 - \alpha$, d'où $\alpha = 10 - A$ et $A + \alpha = 10$.

Théorème I. — *Toute puissance de* 10 *est égale à un multiple de* A *augmenté d'une puissance de* α *dont l'exposant est égal au sien.*

En effet, on a successivement

$$10 = A + \alpha,$$

$$10^2 = (A + \alpha)^2 = A^2 + 2\alpha A + \alpha^2 = \text{mult. } A + \alpha^2,$$

$$10^3 = 10^2 \times 10 = (\text{mult. } A + \alpha^2)(A + \alpha) = \text{mult. } A + \alpha^3, \ldots,$$

$$10^{(n+1)} = 10^n \times 10 = (\text{mult. } A + \alpha^n)(A + \alpha) = \text{mult. } A + \alpha^{(n+1)}.$$

Corollaire. — Le nombre formé d'un chiffre significatif, suivi d'un certain nombre de zéros, est égal à un multiple de A, augmenté du produit de ce chiffre par une puissance de α marquée par le nombre de zéros qui le suivent.

Théorème II. — *Tout nombre est égal à un multiple de* A *augmenté de la somme des produits de chacun de ses chiffres par une puissance de* α *marquée par le nombre de chiffres qui le suivent.*

IIe Cas. — $A = 10$ (résultat connu).

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit divisible par 10 est qu'il soit terminé par un zéro.*

Corollaire. — Le reste de la division d'un nombre par 10 est le même que le chiffre de ses unités.

IIIe Cas. — $A > 10$.

Puisque A est > 10, je puis poser $A = 10 + \alpha$, d'où $A - \alpha = 10$.

Théorème I. — *Toute puissance de* 10 *est égale à un multiple de* A *augmenté ou diminué (suivant que l'exposant de cette puissance est pair ou impair) d'une puissance de* α *d'exposant égal au sien.*

En effet, on a

$$10 = A - \alpha,$$
$$10^2 = (A - \alpha)^2 = A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 = \text{mult.}\,A + \alpha^2,$$
$$10^3 = 10^2 \times 10 = (\text{mult.}\,A + \alpha^2)(A - \alpha) = \text{mult.}\,A - \alpha^3, \ldots,$$
$$10^{2n} = 10^{(2n-1)} \times 10 = (\text{mult.}\,A - \alpha^{(2n-1)})(A - \alpha) = \text{mult.}\,A + \alpha^{2n},$$
$$10^{(2n+1)} = 10^{2n} \times 10 = (\text{mult.}\,A + \alpha^{2n})(A - \alpha) = \text{mult.}\,A - \alpha^{(2n+1)}.$$

Corollaire. — Le nombre formé d'un chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros est égal à un multiple de A, augmenté ou diminué (suivant que le nombre de zéros est pair ou impair) du produit de ce chiffre par une puissance de α marquée par le nombre de zéros qui le suivent.

Théorème II. — *Tout nombre est égal à un multiple de* A *augmenté de la différence de la somme des produits de chacun de ses chiffres de rangs impairs à partir de la droite sur la somme des produits de chacun de ses* *chiffres de rangs pairs, par une puissance de α marquée par le nombre de chiffres qui le suivent.*

Applications. — Chercher le caractère de la divisibilité d'un nombre par 2 et par 5.

Pour cela, je remarque que, quand, au lieu d'avoir $A + \alpha = 10$, on a $kA + \alpha' = 10$, il suffit, pour avoir le reste de la division du nombre par A, de prendre les puissances de α' et non pas les puissances de α. En effet, $\alpha = (k-1)A + \alpha'$; or les puissances de α se composeront de deux parties, dont l'une sera un multiple de A (qui disparaîtra en opérant la division), et l'autre une puissance de α' d'exposant égal à l'exposant considéré de la puissance de α; donc il suffit de prendre les puissances de α', ce qui démontre l'énoncé.

Cela posé, je remarque que $10 = 5 \times 2$, ou que

$$10 = \text{mult.}\,2 + 0 \quad \text{et} \quad 10 = \text{mult.}\,5 + 0.$$

Or les puissances de α' seront aussi égales à zéro, et, par suite, leurs produits par les chiffres du nombre; et tous les chiffres du nombre étant multipliés par des puissances de α, excepté le chiffre des unités qui est multiplié par 1, il suffira de considérer le chiffre des unités et de le diviser par 2 ou par 5, pour avoir le reste de la division du nombre par 2 ou par 5.

THÉORÈMES;

PAR M. L. SANCERY, à Nice.

On sait (voir *Nouvelles Annales*, 2^e^ série, t. I, p. 19, ligne 3) que les bissectrices des angles opposés d'un quadrilatère complet ABCDEF, tant intérieurs qu'extérieurs, mais pris simultanément : 1° de même espèce, 2° d'espèces différentes, sont les sommets de deux quadrilatères complets PQRSTV, HIKLGJ. Céla étant, on propose de démontrer les théorèmes qui suivent :

I. — *Sur chacun des côtés de l'un quelconque des quadrilatères* ABCD, PQRS, HIKL *se croisent, et par quatre groupes différents, deux côtés des deux autres quadrilatères.*

II. — *Sur chacune des diagonales de l'un quelconque des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ *se croisent, et par deux groupes différents, deux diagonales appartenant aux deux autres.* La diagonale du premier quadrilatè reest ainsi divisée harmoniquement : elle l'est aussi par les diagonales restantes des deux autres. On peut encore dire, si l'on préfère : *Huit diagonales des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ *déterminent sur la neuvième une involution de six points, dans laquelle les extrémités de cette dernière diagonale sont les points doubles.*

III. — *Les triangles diagonaux des trois quadrilatères sont semblables et homologiques entre eux.* Ils ont pour centre d'homologie le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal relatif au quadrilatère donné ABCDEF.

IV. — *Les cercles circonscrits aux triangles diagonaux des quadrilatères dérivés passent par le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal du premier quadrilatère.*

V. — *Les cercles circonscrits aux quadrilatères formés par les couples des diagonales des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV *d'une part, et* ABCDEF, HIKLGJ *de l'autre, qui comprennent des angles égaux entre eux, forment deux séries de cercles orthogonaux ayant* *pour axes radicaux les droites qui passent par les milieux des diagonales des deux quadrilatères* PQRSTV, HIKLGJ.

VI. — *Le quadrilatère proposé* ABCD *étant inscriptible, le quadrilatère* PQRS, *dont les sommets sont les points de rencontre des bissectrices des angles opposés intérieurs ou extérieurs, est également inscriptible.*

Les diagonales intérieures de l'un des deux quadrilatères ABCD, PQRS *sont parallèles aux diagonales de l'autre, et la troisième diagonale de l'un passe par les milieux des diagonales de l'autre.*

VII. — *Le quadrilatère proposé* ABCD *étant inscriptible et* $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ *étant les quadrilatères inscriptibles obtenus en menant :* 1° *les bissectrices des quatre angles du quadrilatère* ABCD ; 2° *les bissectrices des suppléments de ces angles, le diamètre du cercle* O', *circonscrit à* $A'B'C'D'$, *est égal à la somme des rayons des cercles* A', C', *moins la somme des rayons des cercles* B', D', *tangents à trois des côtés du quadrilatère* ABCD. (Le point A' est supposé l'intersection des bissectrices des angles aigus A et B, A étant plus petit que B.)

Le diamètre du cercle O'' *circonscrit à* $A''B''C''D''$ *est égal à la somme des rayons des quatre cercles* A'', B'', C'', D'' *tangents à trois des côtés du quadrilatère.*

On a les mêmes relations pour les cercles O_1, O_2 circonscrits aux quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, obtenus en menant les bissectrices de deux angles opposés et les bissectrices des suppléments des deux autres angles.

VIII. — *Le centre* O *du cercle circonscrit à* ABCD *est le milieu des distances* $O'O''$, O_1O_2.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. E. Lemoine. — Dans le numéro de juillet dernier, M. Doucet revient sur cette question déjà résolue : *Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.* Il en donne une solution très-élégante et je ne fais d'observations à son sujet que parce que, de même que dans les solutions déjà données, la nature connue et étudiée de la courbe enveloppe n'est pas mise en évidence.

On sait que la corde dont on cherche l'enveloppe est la symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée du point de contact M; or il est évident que, si l'on considère le cercle ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse et dont la projection sur le plan de l'ellipse est cette ellipse, l'enveloppe de la droite symétrique de la tangente à ce cercle, par rapport à l'ordonnée du point de contact dans ce cercle, aura pour projection l'enveloppe cherchée.

Occupons-nous de trouver cette enveloppe dans le cercle. Soient OA, OB' (*) deux diamètres rectangulaires de ce cercle. Soit M' un point du cercle, la tangente au cercle en M' coupe OA en S, la symétrique de M'S par rapport à l'ordonnée $M'\mu$ coupe OA en J. Menons OK bissectrice de l'angle B'OA et OH perpendiculaire à OK. Soient K et H les points où M'J coupe OK et OH. Appelons α l'angle M'OA, on a

$$M'OH = M'OA + AOH = \alpha + 45^\circ;$$

on a aussi

$$\begin{aligned} OHJ &= 180^\circ - HOJ - OJH \\ &= 180^\circ - 45^\circ - M'JS = 180^\circ - 45^\circ - M'SO, \end{aligned}$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

car, puisque M'J est symétrique de M'S, on a

$$M'JS = M'SO;$$

mais $M'SO = 90^\circ - \alpha$ il : vient donc

$$OHJ = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \alpha = 45^\circ + \alpha.$$

Donc $OHJ = M'OH$, le triangle OM'H est isoscèle; par suite, dans le triangle *rectangle* KOH, M' est le centre du cercle circonscrit et l'on a $KH = 2M'O$. Les extrémités de la droite KH de longueur constante glissent donc sur les deux droites fixes rectangulaires OK, OH, et par suite la droite KH enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, etc.

Extrait d'une Lettre de M. Haton de la Goupillière. — La livraison de septembre contient, à la page 447, le théorème suivant :

L'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui s'appuie par ses extrémités sur deux lignes rectangulaires, a une développée semblable à elle-même.

Cette propriété est remarquable, mais elle n'est pas nouvelle. Elle résulte de ce que la figure en question n'est autre que l'épicycloïde engendrée par un cercle qui roule dans un autre d'un diamètre quadruple (Duhamel, *Cours d'Analyse*, IIe Partie, p. 50, 1847) ou plus grand dans le rapport de 4 : 3, d'après le double mode de génération de ces lignes (*ibid.*, 2e édition, t. I, p. 188). Elle participe dès lors aux propriétés si nombreuses et si intéressantes de ces courbes, notamment à celle d'avoir une développée semblable à elle-même. C'est d'ailleurs ce qui résulte directement, pour cette courbe en particulier, de la recherche de sa développée faite par Salmon

(*Treatise on the higher plane curves*, p. 106), en partant de son élégante équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Indépendamment des propriétés communes à toutes les épicycloïdes, cette ligne, que M. Montucci a nommée *cubo-cycloïde* et employée à la résolution des équations numériques (*Comptes rendus*, t. LX, p. 440 et 846; t. LXIX, p. 526), en possède qui lui sont particulières et parmi lesquelles on pourrait citer les suivantes dans le but de vulgariser la connaissance de cette courbe remarquable :

Enveloppe des ellipses co-axales dont la somme des axes est constante (Desgranges, *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XX, p. 351);

Lieu du sommet d'une parabole qui glisse entre deux droites rectangulaires en se déformant de telle manière que le foyer décrive un cercle autour de leur point de rencontre (Rispal, *ibid.*, t. IV, p. 331);

Lieu du point qui a pour coordonnées rectangulaires les *rayons de courbure* des extrémités des diamètres conjugués de l'ellipse (Brassine, *ibid.*, 2e série, t. II, p. 12); ou encore les *courbures* des extrémités d'une corde focale quelconque dans la parabole (Pigeon, *ibid.*, t. III, p. 60);

Enveloppe des cordes communes à une ellipse et à ses cercles osculateurs, lorsqu'on a incliné les ordonnées de la cubo-cycloïde sous l'angle des diamètres conjugués égaux (Lemoine, *ibid.*, t. XIII, p. 334);

Courbe telle que le cube de son arc soit proportionnel au carré de l'ordonnée de l'extrémité de cet arc (Haton de la Goupillière, *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIIe Cahier, p. 141);

Courbe telle que l'ordonnée du centre de gravité de son arc soit égale aux deux cinquièmes de l'ordonnée extrême (*ibid.*, p. 142);

Courbe telle que si une barre pesante, homogène ou non, s'y appuie tangentiellement en butant par son extrémité contre une droite verticale, elle reste en équilibre indifférent dans toutes ses situations (William Walton, *Problèmes de Mécanique rationnelle*, du P. Jullien, t. I, p. 151);

Courbe tautochrone pour une force perpendiculaire à une droite et proportionnelle à la racine cubique de la distance à cette droite (*) (*ibid.*, p. 338);

On peut citer encore deux articles de M. Breton de Champ, dont le premier concerne les polygones semi-réguliers circonscrits à cette ligne (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. IV, p. 135), et le second appelle l'attention sur certains rapports qui existent entre elle et la développée de l'ellipse (*ibid.*, t. II, p. 223);

La courbe plus générale dont la cubo-cycloïde forme un cas particulier, et qui est l'enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant par ses extrémités sur deux droites *quelconques*, a été envisagée par M. Merlieux (*ibid.*, t. I, p. 265), qui a ébauché la recherche de

---

(*) Il est remarquable que la cubo-cycloïde présente ainsi un double tautochronisme. On sait, en effet, qu'indépendamment du précédent qui lui est propre, toute épicycloïde est isochrone pour les forces centrales proportionnelles à la distance (Newton, *Livre des Principes*, Proposition LI). J'ai même montré que cet isochronisme n'est altéré ni par le frottement ni par une résistance proportionnelle à la vitesse, et, en outre, que la réunion de toutes les influences précédentes constitue le cas le plus général qui soit renfermé dans la formule de Lagrange pour le tautochronisme, lorsqu'à l'action centrale, en raison de la distance et à l'influence du frottement, on joint une résistance d'après une fonction *indéterminée* de la vitesse (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t, XIII, p. 204).

son équation, effectuée plus tard par M. Joachimsthal (*ibid.*, t. VI, p. 260). M. Bouteiller a, d'un autre côté, étudié sa polaire réciproque (*ibid.*, t. VI, p. 263).

Extrait d'une lettre de M. B. Niewenglowski. — Dans son *Algèbre*, M. H. Laurent donne un moyen très-élégant pour calculer la somme des puissances négatives des racines de l'équation $f(x) = 0$. La méthode indiquée pour les puissances positives me semble moins simple; or il n'y a qu'à copier textuellement le premier cas.

Si α désigne une racine quelconque, on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x-\alpha} = \frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \ldots + \frac{S_k}{x^{k+1}} + \ldots;$$

donc si l'on fait la division de $f'(x)$ par $f(x)$, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, S_k sera le coefficient de $\frac{1}{x^{k+1}}$.

Avant de terminer, je vous prie de m'accorder encore quelques lignes. Dans l'intéressant exposé de la méthode des équipollences que vous venez de publier, se trouve la démonstration d'un théorème sur le quadrilatère inscriptible. Or celui-là est bien facile, et sa réciproque se trouve démontrée dans tous les Traités.

Il n'en est pas de même du théorème relatif au rapport des deux diagonales. La réciproque de ce dernier ne se trouve, à ma connaissance, que dans la *Géométrie* de M. Compagnon. Or la méthode des équipollences donne facilement le théorème et sa *réciproque* : il suffit de partir de l'identité algébrique

$$(x+y)[xy+z(x+y+z)] = (y+z)[yz+x(x+y+z)],$$

qui donne pour quatre points A, B, C, D, formant un quadrilatère convexe, l'équipollence

$$AC(AB \times BC + DA \times DC) \triangleq BD(AB.AD + BC.CD),$$

que l'on peut écrire

$$AB \times BC + DA \times DC \triangleq \frac{BD}{AC}(AB.AD+BC.CD).$$

Si

$$\text{incl.}\,(AB.BC) = \text{incl.}\,(DA.DC),$$

on aura

$$\text{gr.}(AB.BC + DA.DC) = \text{gr.}\,\frac{BD}{AC}\,(AB.AD + BC.CD),$$

et réciproquement. Or l'égalité relative aux inclinaisons peut s'écrire

$$\text{incl. } AB - \text{incl. } DA = \text{incl. } DC - \text{incl. } BC,$$

ou

$$180^\circ - \text{angle } DAB = \text{angle } BCD.$$

On trouverait de même la relation analogue relative au quadrilatère croisé.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — Dans votre numéro d'octobre 1873, page 451, vous donnez la solution de la question 1006. D'après M. Moret-Blanc, l'énoncé de cette question est inexact : c'est une erreur, l'énoncé est parfaitement exact. Au reste, voici une solution très-simple.

Si l'on faisait rouler un polygone sur la droite AB, on aurait, pour l'accroissement de l'aire correspondant à une rotation autour d'un sommet M,

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\,OM^2\alpha + t,$$

t étant le triangle OMN. Par conséquent, à la limite, c'est-à-dire lorsque le polygone se change en courbe, on a

$$(1) \qquad dA = \tfrac{1}{2}\rho^2 d\alpha + \tfrac{1}{2}\rho^2 d\beta,$$

ρ étant la distance du point de contact au point générateur, $d\alpha$ l'angle de contingence et $d\beta$ la rotation de ρ.

Cherchons ces trois éléments. On a d'abord

$$(2) \qquad \rho^2 = a^2 + b^2 - rr';$$

puis, en appelant γ l'angle que fait la normale avec les rayons focaux r, r',

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{rr'}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{a}\sin\gamma = \frac{c}{a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{rr'}},$$

d'où

$$(3) \qquad d\alpha = -\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'} - \frac{1}{a^2}\right)}}.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 - rr'};$$

d'où

$$\frac{c}{a}\cos\beta = \frac{\sqrt{a^2 - rr'}}{\rho}, \quad \frac{c}{b}\sin\beta = \frac{\sqrt{rr' - b^2}}{\rho},$$

$$\frac{c^2}{a^2 b^2}\rho^4 d\beta \sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{2}drr';$$

d'où

$$(4) \qquad \rho^2 d\beta = \frac{1}{2}\frac{ab\,drr'}{\sqrt{(a^2 - rr')(rr' - b^2)}}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$dA = -\frac{1}{4}\frac{(a^2 + b^2 - rr')\,d\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'} - \frac{1}{a^2}\right)}} + \frac{1}{4}\frac{ab\,drr'}{\sqrt{(a^2 - rr')(rr' - b^2)}};$$

d'où

$$(5) \qquad dA = -\frac{1}{4}\frac{(a^2+b^2)d\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'}-\frac{1}{a^2}\right)}},$$

d'où

$$(6) \qquad A = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\arccos\frac{\frac{2a^2b^2}{rr'}-(a^2+b^2)}{c^2}.$$

La valeur de A correspondant à une demi-révolution sera

$$(7) \qquad A = \tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'équation (6) conviendra à l'hyperbole en y changeant r' en $-r'$, b^2 en $-b^2$; mais alors A représente la différence entre l'aire limitée par la courbe, deux normales et sa développée, et l'aire limitée par cette développée, les deux normales et la droite AB. La formule (6) devient alors

$$(8) \qquad A = \frac{1}{4}(a^2-b^2)\arccos\frac{\frac{2a^2b^2}{rr'}-(a^2-b^2)}{c^2},$$

et, en intégrant entre les limites $rr' = b^2$ et $rr' = \infty$, on a

$$(9) \qquad A = \frac{1}{4}(a^2-b^2)\arccos\frac{b^2-a^2}{c^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a $dA = 0$; cela prouve que le point correspondant de la développée est le milieu de ρ, propriété vraiment remarquable de la courbe.

La courbe décrite par le centre est un ovale, tandis que sa développée se compose de deux accolades asymptotiques à la droite AB. La différence entre les aires de ces deux courbes est donc

$$(10) \qquad A = (a^2-b^2)\arccos\frac{b^2-a^2}{c^2};$$

ces deux aires sont égales, dans le cas de l'hyperbole équilatère.

La recherche de A n'est pas plus difficile lorsque le point générateur est un point quelconque de l'axe focal. Soient d la distance de ce point au centre, ρ' la distance de ce point à un point quelconque de la courbe, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho'^2 = (x-d)^2 + y^2 = \rho^2 + d^2 - 2\frac{d}{e}(a-r),\\ &\rho'^2 = \rho^2 + d^2 - 2\frac{d}{e}\sqrt{a^2 - rr'}. \end{aligned}\right.$$

Appelons S le secteur elliptique correspondant, on aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} dA = &-\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + d^2 - rr')\,d\frac{1}{rr'}\\ &-\frac{1}{2}\frac{dab}{e}\frac{drr'}{rr'\sqrt{rr' - b^2}} + dS, \end{aligned}\right.$$

et

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A = &\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + d^2)\arccos\frac{\frac{2a^2b^2}{rr'} - (a^2+b^2)}{c^2}\\ &-\frac{1}{4}ab\arccos\frac{2rr' - (a^2+b^2)}{c^2}\\ &-\frac{1}{2}\frac{da}{e}\gamma + S, \end{aligned}\right.$$

et pour l'aire correspondant à une demi-révolution

$$(14)\qquad A = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + d^2).$$

Si le point est l'un des foyers,

$$A = \pi a^2;$$

s'il est un sommet,

$$A = \tfrac{1}{2}\pi(2a^2 + b^2).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. Maximilien Marie, répétiteur à l'École Polytechnique.

Nos lecteurs connaissent les travaux mathématiques de M. Maximilien Marie sur les périodes des intégrales simples, doubles ou d'ordre quelconque, et sur la condition de convergence de la série de Taylor. L'auteur réunit en volumes les Mémoires qu'il a publiés à diverses époques dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, dans le *Journal de l'École Polytechnique* et dans les *Annales de l'École Normale*.

La théorie des fonctions de variables imaginaires formera trois volumes grand in-8° de 280 à 350 pages.

Le premier volume est en vente, il est intitulé : *Nouvelle Géométrie analytique*, ou extension des méthodes de la Géométrie de Descartes à l'étude des lieux qui peuvent être représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.

Ce volume contient l'exposition de la méthode que l'auteur s'est créée il y a trente ans et qui lui a permis de traiter depuis les plus hautes questions de l'Analyse transcendante.

La *Nouvelle Géométrie analytique* est à la *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ce que la *Géométrie de Descartes* était à la *Théorie des fonctions de variables réelles*.

Les deux derniers volumes paraîtront en mars et en décembre 1875. Les questions que l'auteur y aborde étant entièrement neuves, nous croyons que les jeunes professeurs y trouveront de nombreux sujets de thèses et de travaux personnels.

Par convention spéciale avec M. Gauthier-Villars, éditeur, le prix de l'ouvrage complet, fixé à 20 francs, est abaissé à 15 en faveur des personnes qui y souscriront pendant l'impression.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tome VII (1874).

Janvier. — Intorno alla vita ed ai lavori scientifici di Guglielmo Giovanni Macquorn Rankine. Memoria di *Mariano Quercia.*

Février. — Intorno alla vita ed ai lavori scientifici di Guglielmo Giovanni Macquorn Rankine. Memoria di *Mariano Quercia* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Mars. — Notice sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas; par *D. Bierens de Haan.*

Intorno ad una iscrizione posta sulla tomba di *Ludolf Van Ceulen.* Lettera del sig. *Eugenio Catalan,* professore nell' Università di Liege a *D.-B. Boncompagni.*

Avril. — *Procli diadochi* || in || primum Euclidis elementorum || Librum || commentarii || ex recognitione || Godofredi Friedlein. || Lipsiæ || in ædibus B.-G. Teubnerii, mdccclxxiii. In-12, vii et 507 pages. (Bibliotheca scriptorum græcorum et romanorum Teubneriana.) — *Th. H. Martin.*

Intorno al comento di Proclo sub primo libro degli *Elementi di Euclido.* — *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Mai. — Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all' Euler, del Dre *Sigismondo Günther*. Traduzione del tedesco del Dre *Alfonso Sparagna*.

Intorno ad un metodo per la determinazione approssimativa degl' irrazionali di secundo grado. Brano di Lettera del Dre *F. Wœpcke* a *D.-B. Boncompagni*, in data di « Paris, rue Bréa, 22, ce 5 décembre 1861 ».

Tirages a part. — Procli diadochi in primum *Euclidis Elementorum*, etc.

Intorno al comento di Proclo, etc.

Il Commre profre *Benedetto* viale prelà, cenni biografici del profre *Vincenzo Diorio*, seguiti da un catalogo dei lavori del medesimo Commre profre B. viale prelà, compilato da *B. Boncompagni*. (Estratto dagli *Atti dell' Accademia pontificia de' nuovi Lincei*, anno xxvii, sessione Va, del 26 aprile 1874. — *Roma*. Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via lata, numo 211, A.)

QUESTION.

1154. Considérons le cône circonscrit à une surface du troisième ordre à quatre nœuds S (*), et ayant pour sommet un point M de cette surface; ce cône se décompose en deux cônes du second degré, dont chacun touche S le long d'une cubique gauche. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent S suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point M. (Laguerre.)

(*) Cette surface est la réciproque de la surface romaine de Steiner. Son équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

(*Note de la Rédaction.*)

SUR UN CAS PARTICULIER D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0$;

PAR M. C. HARKEMA.

On sait qu'une équation différentielle du premier ordre peut être considérée comme *intégrable* si elle se ramène à une équation homogène, les variables pouvant dès lors être séparées. S'il était possible de trouver dans chaque cas particulier les substitutions qui rendent homogène une équation différentielle donnée, l'intégration des équations n'offrirait aucune difficulté *théorique*. Or ceci n'est possible que dans un nombre de cas très-restreint.

Je veux considérer dans cette Note une substitution fréquemment employée en Analyse et établir les formules exprimant les conditions suffisantes pour qu'une équation différentielle du premier ordre à termes algébriques puisse être rendue homogène en employant cette substitution.

Soit une équation différentielle

$$(1)\qquad f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy = 0,$$

dans laquelle $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ sont de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y) = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + \ldots + a_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m}, \\ \varphi(x,y) = b_1 x^{\gamma_1} y^{\delta_1} + b_2 x^{\gamma_2} y^{\delta_2} + \ldots + a_n x^{\gamma_n} y^{\delta_n}, \end{cases}$$

a, b désignant des coefficients quelconques, α, β, γ, δ des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, mais *commensurables*.

Faisons la substitution

$$x = u^\lambda, \quad y = v^\mu,$$

λ et μ étant des nombres constants et indéterminés. L'équation (1) se transforme en celle-ci

$$(3)\left\{\begin{array}{l}(a_1 u^{\lambda\alpha_1} v^{\mu\beta_1} + a_2 u^{\lambda\alpha_2} v^{\mu\beta_2} + \ldots + a_m u^{\lambda\alpha_m} v^{\mu\beta_m})\,\lambda\, u^{\lambda-1} du \\ + (b_1 u^{\lambda\gamma_1} v^{\mu\delta_1} + b_2 u^{\lambda\gamma_2} v^{\mu\delta_2} + \ldots + b_n u^{\lambda\gamma_n} v^{\mu\delta_n})\,\mu\, v^{\mu-1} dv = 0.\end{array}\right.$$

Pour que cette équation soit homogène, il faut qu'on ait

$$(a) \qquad [m]\ldots \lambda(\alpha_i + 1) + \mu\beta_i - 1 = \mathrm{D},$$

$$(b) \qquad [n]\ldots \lambda\gamma_k + \mu(\delta_k + 1) - 1 = \mathrm{D}.$$

Dans ces formules, D désigne la dimension de l'équation (3) supposée homogène; les indices i et k peuvent prendre respectivement les valeurs $1, 2, \ldots, m$; $1, 2, \ldots, n$. Les nombres $[m]$ et $[n]$ placés à côté de ces formules indiquent le nombre des équations distinctes renfermées dans chacune.

Les quantités λ, μ, ainsi que D, sont indéterminées; mais on voit que, λ et μ étant une fois choisis, D devient déterminé. Le nombre des équations (a) et (b) étant $m + n$, on voit que le nombre des conditions auxquelles doivent satisfaire les exposants des fonctions f et φ est égal à $m + n - 2$. Si, par exemple, l'équation proposée contient trois termes, les conditions trouvées se réduisent à une seule.

Les relations (a) et (b) peuvent être exprimées en forme de déterminants. En effet, éliminant D entre les équations d'un même groupe, on peut écrire, au lieu de (a) et (b),

$$(a') \qquad [m-1]\ldots \lambda(\alpha_i - \alpha_m) + \mu(\beta_i - \beta_m) = 0,$$

$$(b') \qquad [n-1]\ldots \lambda(\gamma_k - \gamma_n) + \mu(\delta_k - \delta_n) = 0.$$

A ces équations s'applique la même remarque qu'aux précédentes. Il faut ajouter aux équations (a') et (b') celles qui résultent de l'élimination de D entre les équations des groupes différents, savoir :

$$(c') \qquad [1]\ldots \lambda[(\alpha_i + 1) - \gamma_k] + \mu[\beta_i - (\delta_k + 1)] = 0.$$

En vertu des équations (a') et (b'), la formule (c') n'est équivalente qu'à une seule condition. Comme λ et μ ne peuvent être égaux à zéro, il faut, pour que ces équations soient compatibles, qu'on ait identiquement

$$(d) \qquad [m-2]\ldots \begin{vmatrix} \alpha_i - \alpha_m & \beta_i - \beta_m \\ \alpha_{i+1} - \alpha_m & \beta_{i+1} - \beta_m \end{vmatrix} = 0,$$

$$(e) \qquad [n-2]\ldots \begin{vmatrix} \gamma_k - \gamma_n & \delta_k - \delta_n \\ \gamma_{k+1} - \gamma_n & \delta_{k+1} - \delta_n \end{vmatrix} = 0,$$

ensuite

$$(f) \quad [1]\ldots \begin{vmatrix} (\alpha_i + 1) - \gamma_k & \beta_i - (\delta_k + 1) \\ (\alpha_{i+1} + 1) - \gamma_{k+1} & \beta_{i+1} - (\delta_{k+1} + 1) \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(g) \qquad [1]\ldots \begin{vmatrix} \alpha_i - \alpha_m & \beta_i - \beta_m \\ \gamma_k - \gamma_n & \delta_k - \delta_n \end{vmatrix} = 0.$$

On voit au premier abord que, en vertu des expressions (d) et (e), chacune des formules (f) et (g) est équivalente à une seule condition.

Le nombre total des conditions à satisfaire est donc $m + n - 2$, ce qui s'accorde avec le nombre trouvé plus haut. (Si l'équation proposée ne contient que deux termes, le nombre des conditions s'annule, ce qui veut dire que toute équation à deux termes peut être rendue homogène; ceci est évident.)

Si les conditions (d), (e), (f) et (g) sont remplies, il suffit, pour rendre homogène l'équation donnée (1), de faire la substitution

$$x = u^{\beta_i - \beta_m}; \quad y = v^{\alpha_m - \alpha_i}.$$

Les formules que nous venons d'établir offrent peu d'intérêt dans le cas où les polynômes f et φ renferment un nombre considérable de termes. Je ne veux que montrer leur application au cas d'une équation de trois et de quatre termes.

I. Soit proposée l'équation

$$dy + dx(a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}) = 0.$$

Dans ce cas, on a $m = 2$, $n = 1$ et les déterminants (d), (e), (g) s'annulent; il ne reste que le déterminant (f), qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + 1 & \beta_1 - 1 \\ \alpha_2 + 1 & \beta_2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette condition est remplie, on peut faire la substitution

$$x = u^{\beta_1 - \beta_2}, \quad y = v^{\alpha_2 - \alpha_1},$$

et l'équation proposée devient homogène.

II. Soit encore donnée l'équation

$$(a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}) dx + (b_1 x^{\gamma_1} y^{\delta_1} + b_2 x^{\gamma_2} y^{\delta_2}) dy = 0.$$

Nous avons maintenant $m = 2$, $n = 2$; les déterminants (d) et (e) s'annulent et il ne reste que (f) et (g); ceux-ci deviennent

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 + 1) - \gamma_1 & \beta_1 - (\delta_1 + 1) \\ (\alpha_2 + 1) - \gamma_2 & \beta_2 - (\delta_2 + 1) \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 & \delta_1 - \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si ces conditions sont remplies par les exposants de l'équation, celle-ci peut être rendue homogène par la même substitution que nous avons employée dans l'exemple précédent.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, QUAND DEUX LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES;

Par M. VACHETTE, à Mouy (Oise).

I. — *Préliminaires.*

Le nombre total des permutations de $2q$ lettres, égales deux à deux, est $T_{2q} = \frac{P_{2q}}{(P_2)^q}$.

Soit $B_{q,2}$ le nombre cherché; les permutations rectilignes de cette espèce, désignée par la même notation $B_{q,2}$, seront telles que la dernière et la première lettre y seront distinctes.

Les autres espèces, contenant un ou plusieurs binaires aa, bb, ..., ou groupes de deux lettres consécutives pareilles, seront désignées par la notation $M_q(r)$, s'appliquant à la fois à l'espèce et au nombre, r étant le nombre des binaires. $B_{q,2}$ pourrait s'écrire $M_q(0)$; r variant de zéro à q inclusivement, on a les diverses espèces ici considérées.

Le nombre q des lettres distinctes est l'*ordre* de l'espèce. On *abaisse l'ordre* quand le calcul du nombre des permutations d'une espèce désignée d'un certain ordre s'obtient par le calcul d'un ou de plusieurs nombres de permutations d'espèces désignées, mais d'un ordre moindre.

On nomme *tournante* une figure circulaire qui renferme plusieurs permutations rectilignes différentes, mais où l'ordre des lettres consécutives reste le même. Ainsi la même figure circulaire renferme toutes les permutations différentes qu'on obtient avec

$$a\,\underline{bb}\,ca\,\underline{dd}\,ece,$$

en changeant de lettre initiale. La tournante est *complète*, si elle donne lieu à $2q$ permutations distinctes; les espèces $M_q(r)$, quand r n'est pas nul, n'offrent que des tournantes complètes, car il y a au moins deux lettres consécutives pareilles, ce qui ne permet point aux lettres d'y occuper deux à deux des positions symétriques. Dans l'espèce $B_{q,2}$, il y a des *tournantes incomplètes* : ainsi

$$abcdeabcde,$$

où les lettres occupent deux à deux des positions symétriques, est une tournante incomplète ne contenant que q permutations distinctes.

Le nombre des tournantes complètes de l'espèce $M_q(r)$ est $\frac{1}{2q}M_q(r)$.

Le nombre des tournantes de l'espèce $B_{q,2}$ est

$$\frac{B_{q,2}+P_q}{2q};$$

car P_q est le nombre des tournantes incomplètes, à q permutations distinctes, de sorte qu'en ajoutant P_q à $B_{q,2}$ on détruit l'effet des tournantes incomplètes dans la supputation de ce nombre.

L'espèce $M_1(1)$ est une exception; elle ne présente qu'une permutation et qu'une tournante *aa*.

Les *variétés* d'une même espèce d'ordre q dépendent des q systèmes de places occupées par les q systèmes de deux lettres pareilles. En général, une variété comprend P_q tournantes, puisqu'on peut y placer les q lettres distinctes, dans les q systèmes de places, d'un nombre de manières égal à P_q; mais, dans certaines variétés, une permutation peut se diviser en x parties, qui ne changent pas les q systèmes de places, si la permutation commence à l'une quelconque des x parties; ainsi

$$\underline{aa}\,cd\,\underline{bb}\,cd$$

en donne un exemple; les deux parties étant $\underline{aa}\,cd$ et $\underline{bb}\,cd$, le nombre des tournantes d'une pareille variété est $\frac{1}{x}\,P_q$; x est un nombre entier plus petit que q, pour toutes les espèces $M_q\,(r)$, car chaque partie x doit contenir au moins deux lettres; il est donc diviseur de P_q et $\frac{1}{x}\,P_q$ est entier.

Les variétés à P_q tournantes sont *asymétriques;* les variétés à $\frac{1}{x}\,P_q$ tournantes sont *symétriques de fraction* $\frac{1}{x}$.

Si, dans une espèce $M_q\,(r)$, on trouve n variétés asymétriques et n' variétés symétriques de fraction $\frac{1}{x'}$, n'' de fraction $\frac{1}{x''}$, ..., on aura

$$M_q\,(r) = 2q\,P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

Une formule de vérification sera

$$T_{2q} = B_{q,2} + \sum_{1}^{q} M_q\,(r).$$

II. — *Exemples de calcul direct.*

1° L'espèce $M_q\,(q)$ n'a qu'une variété symétrique de fraction $\frac{1}{q}$, puisque les q binaires sont consécutifs,

$$\underline{aa}\,\underline{bb}\,\underline{cc}\,\underline{dd}\,\underline{ee};$$

donc

$$\frac{2q\,P_q}{q}\,1 = M_q(q),$$

d'où

$$(q) \qquad M_q(q) = 2P_q.$$

2° Chaque variété de l'espèce $M_q(q-1)$ contient $q-1$ binaires, et deux lettres pareilles isolées f, f; il y a pour ces deux lettres, entre deux binaires consécutifs, $q-1$ places disponibles. Toutes les variétés sont asymétriques, si q est pair; en effet, il y a un nombre impair de binaires, et la permutation ne peut se diviser en parties symétriques, comprenant chacune le même nombre de binaires. Pour une place occupée par l'une des lettres f, la seconde peut en occuper $q-2$, ce qui donne $\frac{q-2}{2}$ systèmes de places, puisque chacun des systèmes est répété deux fois; on a donc $\frac{q-2}{2}$ variétés, et il en résulte

$$M_q(q-1) = \frac{q-2}{2}\,2q\,P_q,$$

d'où

$$(q-1) \qquad M_q(q-1) = q(q-2)\,P_q.$$

Cette formule convient encore au cas où q est impair. Sur les $q-2$ systèmes de places occupées par les lettres f, $q-3$ répondent à des variétés asymétriques et sont répétés deux fois, ce qui donne, pour le nombre A_1, des permutations correspondant à ces $\frac{q-3}{2}$ variétés,

$$2q\,P_q\,\frac{q-3}{2} = A_1,$$

ou

$$A_1 = q(q-3)\,P_q.$$

Le dernier système de places répond à une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$,

$$\underline{aa}f\,\underline{bb}\,\underline{cc}\,\underline{dd}f\,\underline{ee}\,\underline{gg},$$

et l'on a, pour le nombre A_2 correspondant à cette variété,

$$A_2 = 2q\,P_q\,\frac{1}{2},$$

d'où

$$A_2 = q\,P_q;$$

alors

$$M_q(q-1) = q(q-3)P_q + q\,P_q = q(q-2)P_q.$$

Remarque. — Pour $q=1$, la formule (q) est en défaut, car

$$M_1(1) = 1.$$

III. — *Abaissement d'ordre de* $B_{q,2}$.

Les permutations de l'espèce $T_{2(q-1)}$ servent à former les T_{2q}, en introduisant un nouveau couple de deux lettres pareilles h dans chacune des $T_{2(q-1)}$. Si l'on suppose les places numérotées depuis 1 jusqu'à $2q$, l'une des lettres h ayant un de ces numéros, l'autre aura un des $2q-1$ numéros restants, ce qui donne $\frac{2q(2q-1)}{2}$ systèmes de places, puisqu'on peut commencer chaque système par l'un ou l'autre de ses deux numéros : ainsi

$$T_{2q} = \frac{2q(2q-1)}{2}T_{2(q-1)} = \frac{2q(2q-1)}{2}\,\frac{P_{2q-2}}{(P_2)^{q-1}} = \frac{P_{2q}}{(P_2)^q}.$$

Ce moyen sert à former les $B_{q,2}$; mais à cette formation ne peuvent concourir que les $B_{q-1,2}$, les $M_{q-1}(1)$ et les $M_{q-1}(2)$, parce que l'introduction des deux h ne peut détruire que deux binaires.

Une $B_{q-1,2}$ offre $2q$ numéros à chacune des lettres h; si l'on en donne un à la première, la seconde, ne pouvant avoir un numéro immédiatement voisin, n'en prendra que $2q-3$, d'où $\frac{2q(2q-3)}{2}$ systèmes de places. La part fournie par les $B_{q-1,2}$ sera

$$q(2q-3)B_{q-1,2}.$$

Pour une tournante de l'espèce $M_{q-1}(1)$, on ferme le binaire avec la première h, et l'autre peut occuper $2q-3$ places; on obtient ainsi $2q-3$ tournantes de l'espèce cherchée; comme il y en a $\frac{1}{2(q-1)}M_{q-1}(1)$ de l'espèce génératrice, on en a $\frac{2q-3}{2(q-1)}M_{q-1}(1)$: pour avoir la part fournie en permutations, on multiplie par $2q$, ce qui donne

$$\frac{q(2q-3)}{q-1}M_{q-1}(1).$$

Pour une tournante d'espèce $M_{q-1}(2)$, il n'y a qu'une manière de fermer les binaires; la part en tournantes est $\frac{1}{2(q-1)}M_{q-1}(2)$, et en permutations

$$\frac{1}{q-1}M_{q-1}(2).$$

On ajoute les trois parts, on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, et l'on a la formule

$$\frac{q-1}{q}B_{q,2}=(q-1)(2q-3)B_{q-1,2}$$
$$+(2q-3)M_{q-1}(1)+M_{q-1}(2).$$

IV. — *Décomposition des* T_{2q} *pour* $q = 2$ et $q = 3$.

1° On trouve directement

$$B_{2,2} = 2 \quad \left\{ \begin{matrix} ab\,ab \\ ba\,ba \end{matrix} \right.$$

$$M_2(1) = 0$$

$$M_2(2) = 4 \qquad \underline{aa}\,\underline{bb} \text{ tournante complète,}$$

$$6 = T_{2\times 2} = \frac{1.2.3.4}{2^2}.$$

Dans $M_2(2)$, il n'y a qu'une seule variété

$$\underline{aa}\,\underline{bb}$$

symétrique de fraction $\frac{1}{2}$; elle donne donc, en permutations, le nombre $2q\,P_q\,\frac{1}{2} = 2.2.2.\frac{1}{2} = 4$, pour $q = 2$.

2° On trouve

$$B_{3,2} = 24 = 4P_3 \quad \text{par la formule } B_{q,2},$$

$$\tfrac{2}{3}\,B_{3,2} = 2.3\,B_{2,2} + M_2(2) = 12 + 4 = 16,$$

$$M_3(2) = 18 = 3P_3 \quad \text{par la formule } (q-1),$$

$$M_3(3) = 12 = 2P_3 \quad \text{par la formule } (q).$$

Comme $T_{2\times 3} = \frac{1.2.3.4.5.6}{2^3} = 15P_3$, on doit obtenir $M_3(1) = 6P_3$: il n'y a qu'une variété asymétrique

$$\underline{aa}\,bc\,bc,$$

d'où, en permutations,

$$M_3(1) = 6P_3.1 = 6P_3.$$

V. — *Formule du nombre* $M_q(r)$, *cas de* $r = 1$ *et de* $r = 2$.

1° L'espèce $M_q(r)$ contient $\frac{1}{2q}M_q(r)$ tournantes; si l'on commence chaque permutation par un des r binaires, on évaluera $\frac{r}{2q}M_q(r)$ permutations.

Si l'on enlève ce binaire initial, les lettres qui l'entourent sont ou non les mêmes, et les deux figures

$$\underline{aa}\,b\,\underline{ee}\,d\,\underline{cc}\,db, \quad \underline{aa}\,b\,\underline{ee}\,bd\,\underline{cc}\,d$$

donnent deux figures correspondantes, permutations d'ordre $q-1$,

$$\underline{b}\,\underline{ee}\,d\,\underline{cc}\,d\underline{b}, \quad b\,\underline{ee}\,bd\,\underline{cc}\,d,$$

appartenant aux espèces respectives

$$M_{q-1}(r), \quad M_{q-1}(r-1).$$

La somme des nombres de permutations ainsi comptées, étant relative à une seule des q lettres distinctes (la lettre a qu'on en a enlevée), devra être multipliée par q. Or, dans l'espèce $M_{q-1}(r)$, on ne compte que r des $2(q-1)$ permutations d'une tournante, celles qui commencent par la seconde lettre d'un binaire, $\frac{r}{2(q-1)} M_{q-1}(r)$; dans l'espèce $M_{q-1}(r-1)$, on n'en compte que $2q-r-1$, les $2(q-r)$ qui commencent par une des $2(q-r)$ lettres isolées, et les $r-1$ qui commencent par l'initiale d'un des $r-1$ binaires, $\frac{2q-r-1}{2(q-1)} M_{q-1}(r-1)$. On multiplie par q la somme des deux parts, et l'on a la formule, après les réductions,

$$(r) \quad \frac{r(q-1)}{q^2} M_q(r) = (2q-r-1) M_{q-1}(r-1) + r M_{q-1}(r).$$

2° Si l'on y fait $r=1$ et $r=2$, on a les deux formules suivantes, préparées pour le calcul de $B_{q,2}$:

$$(1) \qquad \frac{q-1}{q^2} M_q(1) = 2(q-1) B_{q-1,2} + M_{q-1}(1),$$

$$(2) \quad \frac{2(q-1)}{q^2} M_q(2) = (2q-3) M_{q-1}(1) + 2 M_{q-1}(2).$$

Pour $q = 3$, on vérifie $M_3(1) = 6P_3$; en effet

$$\frac{2}{q} M_3(1) = 4B_{2,2} = 8, \quad \text{d'où} \quad M_3(1) = 36.$$

VI. — *Problème nouveau résolu à l'aide de la formule* $M_q(r)$.

« Trouver le nombre $B_{2q'+r}$ des permutations rectilignes de $2q'+r$ lettres, dont $2q'$ sont deux à deux pareilles, les r autres étant distinctes entre elles et distinctes des premières, quand deux lettres consécutives ne sont jamais les mêmes. »

Une tournante d'espèce $M_q(r)$,

$$i\,\underline{aa}\,efge\,\underline{hh}\,gi\,\underline{bb}\,f\,\underline{dd}\,\underline{cc},$$

devient une tournante d'espèce $B_{2(q-r)+r} = B_{2q'+r}$ pour $q' = q - r$,

$$i\,\underline{a}\,efge\,\underline{h}\,gi\,\underline{b}\,f\,\underline{dc},$$

si l'on y suppose tout binaire $\underline{aa}$ condensé en une seule lettre a. Or

$$B_{2q'+r} = \frac{2q-r}{2q} M_q(r) = \frac{2q'+r}{2(q'+r)} M_{q'+r}(r);$$

car, sur les $2q$ permutations de l'ancienne tournante, il y en a r, celles où un binaire occupe les places extrêmes, qui ne donnent rien de plus, pour les permutations bonnes de la nouvelle espèce, que les r permutations où ce même binaire est en tête.

Ces $B_{2q'+r}$ sont des tournantes complètes; il ne peut exister entre les lettres la symétrie qui rend tournantes incomplètes certaines permutations de l'espèce $B_{q,2}$.

VII. — *Applications numériques.*

En appliquant les formules, on trouve :

1° Décomposition des $T_{2\times 4} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4} = 105 P_4$:

$$\begin{aligned} B_{4,2} &= 31 P_4 \\ M_4(1) &= 40 P_4 \\ M_4(2) &= 24 P_4 \\ M_4(3) &= 8 P_4 \\ M_4(4) &= 2 P_4 \\ \hline & \quad 105 P^4 \end{aligned}$$

2° Décomposition des $T_{2\times 5} = P_5 \frac{6.7.8.9.10}{2^5} = 945 P_5$:

$$\begin{aligned} B_{5,2} &= 293 P_5 \\ M_5(1) &= 360 P_5 \\ M_5(2) &= 205 P_5 \\ M_5(3) &= 70 P_5 \\ M_5(4) &= 15 P_5 \\ M_5(5) &= 2 P_5 \\ \hline & \quad 945 P_5 \end{aligned}$$

3° Décomposition des

$$T_{2\times 6} = T_{2\times 5} \frac{11.12}{2} = 945 P_5 . 11.6 = 10395 P_6 :$$

$$\begin{aligned} B_{6,2} &= 3326 P_6 \\ M_6(1) &= 3948 P_6 \\ M_6(2) &= 2190 P_6 \\ M_6(3) &= 740 P_6 \\ M_6(4) &= 165 P_6 \\ M_6(5) &= 24 P_6 \\ M_6(6) &= 2 P_6 \\ \hline & \quad 10395 P_6 \end{aligned}$$

4° **Décomposition des**

$$T_{2\times 7} = T_{2\times 6}\frac{13.14}{2} = 10395 P_6 . 13.7 = 135135 P_7 :$$

$$\begin{aligned}
B_{7,2} &= 44189 P_7 \\
M_7(1) &= 51170 P_7 \\
M_7(2) &= 27888 P_7 \\
M_7(3) &= 9380 P_7 \\
M_7(4) &= 2135 P_7 \\
M_7(5) &= 336 P_7 \\
M_7(6) &= 35 P_7 \\
M_7(7) &= 2 P_7 \\
\hline
& 135135 P_7
\end{aligned}$$

EXPRESSION EN DÉTERMINANT

de la surface d'un quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets consécutifs;

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

PROBLÈME I. — *Un quadrilatère* ABCD *a son sommet* A *à l'origine des coordonnées; calculer la surface* Q *du quadrilatère en valeur des coordonnées* x', y', x'', y'', x''', y''' *des trois autres sommets* B, C, D.

Supposons que les droites AB, AC, AD forment des angles croissants avec l'axe des x; nous avons

$$2Q = 2ABC + 2ACD,$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

Retranchons du second membre le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{vmatrix},$$

multiplié par zéro; nous obtenons

$$2Q = 1 \times \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix};$$

il viendra donc

$$\text{(I)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

Problème II. — *Déterminer la surface* Q *d'un quadrilatère* ABCD *en valeur des coordonnées* $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ *de ses quatre sommets consécutifs* A, B, C, D.

Transportons l'origine des coordonnées au sommet A, et appelons $x', y', x'', y'', x''', y'''$ les coordonnées des trois autres sommets B, C, D par rapport à cette nouvelle origine, de sorte que

$$x_1 = x + x', \quad x_2 = x + x'', \quad x_3 = x + x''',$$
$$y_1 = y + y', \quad y_2 = y + y'', \quad y_3 = y + y'''.$$

Dans la formule (I), remplaçons les coordonnées x', y', x'', y'', x''', y''' par leurs valeurs tirées de ces égalités; nous obtenons

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix},$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 0 & 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix}.$$

Si, dans ce déterminant, nous ajoutons la première ligne à chacune des trois autres, la valeur du déterminant ne sera pas altérée, et nous aurons

$$\text{(II)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

pour la double surface du quadrilatère.

Autre expression de cette surface. — Si l'on développe le déterminant (II), on trouve que

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Or le second et le quatrième de ces déterminants, étant égaux et de signes contraires, s'entre-détruisent; il vient, par suite,

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$2Q = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$
$$+ 1 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est le développement suivant les déterminants mineurs du troisième ordre d'un déterminant du quatrième ordre, dont la première colonne a pour éléments 1, 0, 1, 0. On a donc

$$\text{(III)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Aire du quadrilatère Q en valeur des quatre côtés consécutifs a, b, c, d et des deux diagonales m, n. — La formule (I) nous donne

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 0 & x'-x''' & y'-y''' \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x'-x''' & y'-y''' \end{vmatrix},$$

et, en élevant au carré, puis en multipliant chaque colonne par 2,

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2(x''^2+y''^2) & 2(x'x''+y'y'')-2(x''x'''+y''y''') \\ 2(x'x''+y'y'')-2(x''x'''+y''y''') & 2(x'''^2+y'''^2) \end{vmatrix}.$$

Or il est évident que

$$2(x''^2+y''^2) = 2m^2, \quad 2(x'-x''')^2+2(y'-y''')^2 = 2n^2;$$

ensuite, puisque

$$a^2 = x'^2+y'^2, \quad b^2 = x'^2+y'^2+x''^2+y''^2-2(x'x''+y'y''),$$
$$c^2 = x''^2+y''^2+x'''^2+y'''^2-2(x''x'''+y''y'''),$$
$$d^2 = x'''^2+y'''^2,$$

il vient

$$2(x'x''+y'y'')-2(x''x'''+y''y''') = a^2-b^2+c^2-d^2.$$

Substituant dans la valeur de $16Q^2$, on obtient

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2m^2 & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2n^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2mn & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2mn \end{vmatrix},$$

pour le carré de la quadruple surface du quadrilatère.

En développant, on trouve la formule

$$16Q^2 = 4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2,$$

que nous avons donnée dans ces *Annales*, t. VII, p. 69, 1848.

TÉTRAÈDRE DONT LES SIX ARÊTES SONT TANGENTES A UNE MÊME SPHERE;

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

1. Supposons que le tétraèdre SABC soit circonscriptible par les arêtes à une sphère, dont nous désignerons le rayon par ρ. Posons $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ et $BC = a'$, $CA = b'$, $AB = c'$, et soient A′, B′, C′, A″, B″, C″ les points de contact de ces arêtes. Nous avons évidemment

$$AA' = AB'' = AC'' = \alpha, \quad BB' = BC'' = BA'' = \beta,$$
$$CC' = CA'' = CB'' = \gamma, \quad SA' = SB' = SC' = \delta,$$

de sorte que

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= AA' + SA' = \alpha + \delta, \\ b &= BB' + SB' = \beta + \delta, \\ c &= CC' + SC' = \gamma + \delta; \\ a' &= BA'' + A''C = \beta + \gamma, \\ b' &= CB'' + B''A = \gamma + \alpha, \\ c' &= AC'' + C''B = \alpha + \beta. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, nous obtenons les relations

$$a + a' = b + b' = c + c' = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Donc, *dans tout tétraèdre circonscriptible par les arêtes, les sommes des arêtes opposées sont égales entre elles.*

2. Désignons par θ, θ', θ'' les inclinaisons mutuelles des arêtes opposées a et a', b et b', c et c'. Nous avons prouvé dans ce journal (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 452) que

$$2aa' \cos\theta = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2, \ldots.$$

Si nous remplaçons les arêtes par les segments tangentiels (I), nous trouvons les expressions

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(\delta - \alpha)(\beta - \gamma)}{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma)}, \\ \cos\theta' &= \frac{(\delta - \beta)(\gamma - \alpha)}{(\delta + \beta)(\gamma + \alpha)}, \\ \cos\theta'' &= \frac{(\delta - \gamma)(\alpha - \beta)}{(\delta + \gamma)(\alpha + \beta)}; \end{aligned} \right.$$

nous en tirons

$$\tang^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma) - (\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma) + (\delta - \alpha)(\delta - \beta)},$$

ou bien

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \tang^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta}, \\ \tang^2 \frac{\theta'}{2} &= \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta + \gamma\delta}, \\ \tang^2 \frac{\theta''}{2} &= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\beta\gamma + \alpha\delta}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre, et extrayons la racine carrée du résultat; il nous vient

$$\text{(IV)} \qquad \tang\frac{\theta}{2}\tang\frac{\theta'}{2}\tang\frac{\theta''}{2} = 1.$$

3. Soit O le centre de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre; représentons par φ l'inclinaison commune de la droite SO sur les trois arêtes contiguës SA, SB, SC. Si l'on pose l'angle

$$BSC = \lambda, \quad CSA = \mu, \quad ASB = \nu,$$

et que l'on désigne par x, y, z les coordonnées du centre O, on a les relations

$$\begin{aligned}
&-\rho + x\cos\varphi + y\cos\varphi + z\cos\varphi = 0,\\
&-\rho\cos\varphi + x + y\cos\nu + z\cos\mu = 0,\\
&-\rho\cos\varphi + x\cos\nu + y + z\cos\lambda = 0,\\
&-\rho\cos\varphi + x\cos\mu + y\cos\lambda + z = 0,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{vmatrix}
1 & \cos\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi\\
\cos\varphi & 1 & \cos\nu & \cos\mu\\
\cos\varphi & \cos\nu & 1 & \cos\lambda\\
\cos\varphi & \cos\mu & \cos\lambda & 1
\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
\cos^2\varphi\,[\sin^2\lambda &+ 2(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\
&+ \sin^2\mu + 2(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\\
&+ \sin^2\nu + 2(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] = \Delta^2,
\end{aligned}$$

Δ^2 ayant la valeur

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Cette égalité peut s'écrire, en intervertissant les membres,

$$\Delta^2 = \cos^2\varphi\,[\Delta^2 + 2(1-\cos\lambda)(1-\cos\mu)(1-\cos\nu)],$$

et donne

$$\text{(V)}\quad \tang^2\varphi = \frac{2(1-\cos\lambda)(1-\cos\mu)(1-\cos\nu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

ou encore

$$\text{(VI)}\quad \tang\varphi = \frac{2\sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}}.$$

Tel est l'angle φ que fait avec trois axes obliques la droite également inclinée sur ces axes.

4. Le triangle SBC donne

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda,$$

ou

$$(\beta+\gamma)^2 = (\beta+\delta)^2 + (\gamma+\delta)^2 - 2bc\cos\lambda,$$

de sorte qu'on a

$$\text{(VII)}\quad \cos\lambda = 1 - \frac{2\beta\gamma}{bc},\quad \cos\mu = 1 - \frac{2\gamma\alpha}{ca},\quad \cos\nu = 1 - \frac{2\alpha\beta}{ab},$$

et, par suite,

$$\text{(VIII)}\quad \sin^2\frac{\lambda}{2} = \frac{\beta\gamma}{bc},\quad \sin^2\frac{\mu}{2} = \frac{\gamma\alpha}{ca},\quad \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{\alpha\beta}{ab},$$

d'où

$$\text{(IX)}\quad \sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'expression (VI) et que nous remplacions tangφ par son équivalent $\frac{\rho}{\delta}$, nous obtenons

$$\text{(X)} \qquad \rho = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{abc\Delta} = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{3V},$$

pour *l'expression du rayon de la sphère tangente aux six arêtes du tétraèdre dont le volume est* V.

5. Si la sphère tangente aux arêtes BC, CA, AB touchait extérieurement les arêtes SA, SB, SC aux points A_1, B_1, C_1, on aurait toujours

$$a' = \beta + \gamma, \quad b' = \gamma + \alpha, \quad c' = \alpha + \beta;$$

mais il viendrait

$$a = \delta' - \alpha, \quad b = \delta' - \beta, \quad c = \delta' - \gamma,$$

ou

$$\delta' = SA_1 = SB_1 = SC_1.$$

On trouverait alors que

$$\text{(XI)} \qquad \alpha + \beta + \gamma - \delta' = a' - a = b' - b = c' - c,$$

c'est-à-dire que *les différences des arêtes opposées seraient égales entre elles.*

Le rayon de la sphère serait, dans ce cas, $\rho' = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta'}{3V}$.

6. Pour le *tétraèdre régulier,* on a $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{a}{2}$ et $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; il vient, par suite,

$$\text{(XII)} \qquad \rho = \frac{a}{2\sqrt{2}};$$

et, comme les rayons des sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite, sont

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

on voit que

$$\text{(XIII)} \qquad \rho^2 = \frac{a^2}{8} = \mathrm{R}r.$$

Donc, *dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.*

LOIS NOUVELLES DES PUISSANCES DES NOMBRES;

Par M. G. DE CONINCK, à Dinan.

Lois I et II. — *Lois des séries des puissances des nombres.*

Loi III. — Le carré du *complément d'un nombre* se compose, à droite, d'autant de chiffres identiques à ceux du *carré du nombre* qu'il y a de chiffres dans ce *nombre.*

Démonstration du carré de l'hypoténuse résultant de la loi IV.

Loi IV. — La différence entre le *carré* d'un *nombre* et le *carré* du *complément de ce nombre* est égale à la différence entre le *nombre* et son *complément* multipliée par la puissance de 10 égale à la quantité des chiffres du *nombre.*

Loi V. — La différence entre le *carré* d'un *nombre* et le *carré* de la différence (K) de ce nombre à un *nombre quelconque* plus grand est égale à la différence entre le *nombre* et cette différence (K) multipliée par ce *nombre quelconque.*

Loi VI. — La différence du *carré* d'un *nombre* et du *carré* de son *complément* est exprimée par le produit de 10, élevé à la puissance égale à la quantité de chiffres du *nombre*, par cette même puissance de 10.

EXEMPLE. *Nombre* = 61. *Complément* 100 — 61 = 39. *Carré du nombre* = 3721. *Carré du complément* = 1521.

On a, d'après la loi,

$$C^2 - N^2 = (\overline{10}^2 - 2N) \times \overline{10}^2 = (\overline{10}^2 - 122) \times \overline{10}^2$$
$$= 22 \times 100 = 2200.$$

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES;

PAR M. G. DE CONINCK, à Dinan.

LOI I. — En dehors de 1 ou de 9 pour le premier chiffre à droite du dénominateur, toute fraction dont, le numérateur étant l'unité, le dénominateur est un nombre *premier*, a pour premier chiffre, à droite de la période, le chiffre même qui termine le dénominateur à droite.

Lorsque le premier chiffre à droite du dénominateur est un 1 ou un 9, le premier chiffre à droite de la période est *inversement* un 9 ou un 1, alors même que le dénominateur n'est pas *premier*.

LOI II. — Toute fraction, 1 divisé par un nombre, fournissant une fraction périodique dont les chiffres de la période sont en nombre pair, jouit de la propriété suivante :

Partageant la *période* en deux parties égales, si l'on fait glisser la partie de droite au-dessous de la partie de gauche, et que l'on additionne les chiffres correspondants des deux moitiés, le résultat de l'addition est composé d'autant de 9 qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des chiffres de la période. Il en découle :

Loi III. — La somme des *restes* de la division est égale à la moitié du nombre des *restes* multipliée par le dénominateur A de la fraction $\frac{1}{A}$ qui a donné la fraction périodique, ou à la moitié du nombre des chiffres de la *période* multipliée par le dénominateur A.

Loi IV. — *La somme des chiffres de la période,* augmentée de la *somme des restes,* égale le dénominateur A augmenté de 9, multiplié par la moitié du *nombre des chiffres* de la période.

Loi V. — La somme des chiffres de la période égale la moitié du *nombre des chiffres* de la période multipliée par 9.

Loi VI. — La somme des chiffres de la période est toujours un multiple de 9.

Loi VII. — Toute fraction périodique $\frac{1}{A}$, dont la période a un nombre pair de chiffres, offre la propriété suivante :

Écrivant sur une même ligne horizontale tous les *restes,* en nombre pair, de gauche à droite, dans l'ordre où ils sont obtenus; partageant cette ligne de nombres en deux parties égales, autant de nombres à gauche qu'à droite, si l'on fait glisser la partie de droite sous la partie de gauche, et que l'on additionne les nombres correspondants, on trouve pour résultat de toutes ces additions une somme *constante* égale au dénominateur A de la fraction.

Loi VIII. — Faisant glisser la moitié de droite sous la moitié de gauche, puis additionnant les nombres correspondants, on obtient une somme *constante* égale au dénominateur A de la fraction, augmenté de 9.

Loi IX. — Lorsque le dénominateur (nombre premier) est terminé à droite par un 9, tous les *restes* de la division ont pour premier chiffre, à droite, le chiffre correspondant de la période.

Loi X. — La période ayant un nombre pair ou impair de chiffres, soit A le dénominateur de la fraction $\frac{1}{A}$. On obtiendra la période d'une fraction $\frac{M}{A}$ par la règle suivante :

Retranchez la période p de la fraction $\frac{m}{A}$ $\left(\text{que l'on obtient après avoir dégagé les entiers de } \frac{M}{A}\right)$ d'un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans cette période.

Plaçant les entiers devant cette fraction périodique, on aura le nombre fractionnaire $\frac{M}{A}$ converti en fraction décimale périodique.

NOTE SUR L'ENVELOPPE D'UN SYSTÈME DE COURBES PLANES;

PAR M. A. LAISANT.

La recherche de l'enveloppe d'un système de courbes planes ne se fait ordinairement que dans les cours d'Analyse infinitésimale. Par un détour bien simple, il me semble cependant qu'elle peut être présentée de manière à trouver place dans l'enseignement des Mathématiques spéciales, et cela de la manière suivante.

Soit $f(x, y, \alpha) = 0$ une équation renfermant un paramètre arbitraire α, et représentant, par suite, un système de courbes. Nous pourrons la considérer comme représentant une surface, en regardant α comme une troisième variable. Chaque équation obtenue pour une valeur particulière de α représente la projection mn, sur le plan XY, d'une section MN de la surface, parallèle à ce plan et se projetant en vraie grandeur.

Le point de l'enveloppe que nous cherchons est la limite de l'intersection p de deux courbes voisines $m_1 n_1$, mn, lorsque la première tend indéfiniment à se rapprocher de la seconde. Or soient MN, $M_1 N_1$ les courbes correspondantes de l'espace, P et P_1 les points, respectivement situés sur ces courbes, ayant p pour projection commune. Lorsque $M_1 N_1$ se rapprochera indéfiniment de MN, la corde $P_1 P$ tendra à devenir tangente à la surface, sans cesser d'être parallèle à l'axe des α. Donc, à la limite, le plan tangent au point cherché sera parallèle à cet axe, c'est-à-dire que l'enveloppe sera la trace, sur le plan XY, d'un cylindre circonscrit à la surface et parallèle à l'axe des α.

Comme les cosinus des angles du plan tangent en x, y, α, avec les axes, sont respectivement proportionnels à

$$f'_x(x, y, \alpha), \quad f'_y(x, y, \alpha), \quad f'_\alpha(x, y, \alpha),$$

il en résulte que nous devrons avoir

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

En combinant cette équation avec celle exprimant que le point (x, y, α) est situé sur la surface

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

et en éliminant α entre les deux, nous obtiendrons le contour apparent, c'est-à-dire l'enveloppe cherchée.

On retombe ainsi sur les résultats bien connus de la théorie des enveloppes.

N. B. — Nous avons supposé les axes OX, OY, Oα rectangulaires, en disant que les cosinus des angles du plan tangent avec les axes étaient proportionnels aux dérivées partielles; mais il est bien aisé de voir que la conclusion est la même pour des axes quelconques, puisque l'équation du plan tangent est toujours de la forme

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (A - \alpha)f'_\alpha = 0.$$

SUR LA LOXODROMIE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION QUELCONQUE;

PAR M. A. LAISANT.

Étant donnée une surface de révolution à méridien quelconque, on peut se proposer d'étudier la courbe qui rencontre tous les méridiens sous un angle constant donné. Nous la nommerons *loxodromie* de cette surface de révolution, par analogie avec la sphère.

L'axe de la surface étant pris pour axe des z, et les coordonnées étant rectangulaires, nous nous proposons de faire voir comment on peut toujours obtenir, sous forme différentielle, l'équation en coordonnées polaires de la projection de la courbe sur le plan des xy.

Soit $z = f(r)$ la relation qui existe entre le z d'un point quelconque M de la surface et le rayon MI du parallèle correspondant, équation qui fixe la forme du méridien. Appelons α l'angle donné. Soient, au point M de la courbe cherchée, MT, MT_1 les tangentes au méridien et à cette courbe. Soit enfin TT_1 une perpendiculaire à MT. Dans le plan tangent MTT_1, projetons le triangle MTT_1 sur le plan des xy en mtt_1.

Il est clair que MT se projette suivant le rayon vecteur Om et MT_1 suivant la tangente à la projection cherchée. Donc l'angle $tmt_1 = \nu$ est l'angle que forme le rayon vecteur avec la tangente ; par suite,

$$\tang \nu = \pm \frac{r}{r'_\omega}.$$

Or

$$\tang \nu = \frac{tt_1}{mt},$$

$$\tang \alpha = \frac{TT_1}{MT} = \frac{tt_1}{MT}.$$

Ainsi

$$\tang \nu = \tang \alpha \frac{MT}{mt}.$$

Or, dans le plan méridien considéré, l'équation de la courbe méridienne est $z = f(r)$. Donc

$$\frac{MT}{mt} = \sqrt{1 + [f'(r)]^2},$$

$$\frac{r}{r'_\omega} = \tang \alpha \sqrt{1 + [f'(r)]^2} = r\omega'_r,$$

$$\omega_r = \tang \alpha \frac{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}}{r}.$$

Toutes les fois qu'on pourra remonter à la fonction primitive, on aura donc, sous forme finie, l'équation cherchée.

1° Si $\alpha = 90°$, $\omega'_r = \infty$, $r'_\omega = 0$, $r = \text{const.}$, on retrouve dans ce cas un parallèle.

2° Si $\alpha = 0$, $\omega'_r = 0$, $\omega = \text{const.}$, la courbe se réduit à un méridien.

3° Lorsque le méridien est une droite, c'est-à-dire que la surface est conique, $f'(r) = \text{const.}$, et ω'_r prend la forme $k\frac{1}{r}$, d'où $\omega = k \log \frac{r}{C}$, $r = Ce^{\frac{\omega}{k}}$; de sorte que la projection est une spirale logarithmique.

4° Dans le cas d'une sphère, $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, et il vient

$$\omega'_r = R \tang \alpha \frac{1}{r\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

En remontant à la fonction primitive,

$$\omega = \tang \alpha \log \frac{\frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{r}}{C};$$

d'où l'on tire l'équation connue

$$r = 2R \frac{Ce^{\omega \cot \alpha}}{1 + C^2 e^{2\omega \cot \alpha}}.$$

Une dernière remarque importante consiste en ce qu'une telle courbe peut toujours être rectifiée lorsque le méridien est lui-même rectifiable; car chaque élément étant incliné d'un angle constant sur le méridien est égal à l'élément correspondant du méridien, divisé par le cosinus de cette inclinaison. Il en est donc de même pour un arc fini compris entre deux parallèles de la surface; et cet arc est égal à l'arc du méridien compris entre les mêmes parallèles divisé par $\cos \alpha$.

N. B. — Le nom de *loxodromie* employé ici pourrait tout aussi bien être remplacé par celui d'*hélice*, car ces courbes se définissent comme l'hélice cylindrique, et la loxodromie proprement dite n'est autre chose qu'une *hélice sphérique*.

QUESTION D'EXAMEN;

Par M. S. REALIS.

En désignant par m une quantité positive, la substitution $z = x^m$ dans l'intégrale $\int \frac{dz}{\log z}$ donne le résultat

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{\log x}.$$

On a de même, par le changement de m en n,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{\log x},$$

en sorte que l'on serait conduit à conclure que la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\,dx}{\log x}$$

est nulle. Or cette conclusion est inadmissible, car on sait, à n'en pas douter, que l'on a

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\,dx}{\log x} = \log\frac{m}{n}.$$

En quoi consiste le paralogisme?

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — C'est encore une critique que je vous envoie. Elle a trait à la solution de la question nos 970 et 1028.

D'abord le résultat n'est pas exact : il faut mettre b à l a place de a, et *vice versâ*, en dehors de la parenthèse ; puis ce résultat se décompose en deux facteurs, en sorte que la conique fait partie du lieu, comme il était facile de le prévoir ; puis, il n'y a pas de discussion de la courbe.

Voici une solution de la même question. Soient

$$o = F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dzx + 2Eyz + Fz^2$$

l'équation de la conique en coordonnées homogènes, (x_1, y_1, z_1) un point du lieu, (x_2, y_2, z_2) le point de contact opposé ; on aura, pour les deux tangentes issues de (x_1, y_1, z_1),

$$(1) \qquad 4FF_1 - (xF'_{x_1} + \ldots)^2 = o,$$

et pour les deux hauteurs correspondantes

$$(2) \quad 4FF_1 - (xF'_{x_1} + \ldots)^2 + \lambda(xF'_{x_1} + \ldots)(xF'_{x_2} + \ldots = o).$$

Si, dans l'équation (1), nous changeons x en y, y en $-x$ et z en o, nous aurons deux droites parallèles aux deux droites (2). Exprimons que les coefficients sont proportionnels et l'on aura

$$\frac{4AF_1 - F'^2_{x_1} + \lambda F'_{x_1} F'_{x_2}}{4CF_1 - F'^2_{y_1}} = \frac{8BF_1 - 2F'_{x_1}F'_{y_1} + \lambda(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2})}{-8BF_1 + 2F'_{x_1}F'_{y_1}} = \ldots$$

et de là

$$\begin{aligned}
&[4(A + C)F_1 - F'^2_{x_1} - F'^2_{y_1}] \\
&= \frac{-\lambda[F'_{x_1}F'_{x_2}(8BF_1 - 2F_{x_1}F_{y_1}) + (4CF_1 - F'^2_{y_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + \ldots)]}{8BF_1 - 2F'_{x_1}F'_{y_1}} \\
&= \frac{-\lambda[F'_{y_1}F'_{y_2}(8BF_1 - 2F'_{x_1}F'_{y_1}) + (4AF_1 - F'^2_{x_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2})]}{8BF_1 - 2F'_{x_1}F'_{y_1}}.
\end{aligned}$$

On a pour une partie du lieu

$$4(A + C)F_1 - F'^2_{x_1} F'^2_{y_1} = o,$$

qui représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

L'autre partie du lieu sera donnée au moyen de l'équation

$$(2)\left\{\begin{aligned} &2F'_{x_1}F'_{x_2}(4BF_1 - F'_{x_1}F'_{y_1}) + (4CF_1 - F'^2_{y_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2})\\ &\quad = 2F'_{y_1}F'_{y_1}(4BF_1 - F'_{x_1}F'_{y_1}) + (4AF_1 - F'^2_{x_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2}),\end{aligned}\right.$$

combinée avec l'équation de la normale, qui est

$$(4)\qquad (x_1 - x_2)F'_{y_2} - (y_1 - y_2)F'_{x_2} = 0,$$

et l'équation de la conique

$$F_2 = 0.$$

Remarquons d'abord que l'équation (3) représente une courbe du troisième degré en (x_1, y_1), et qui passe par le point (x_2, y_2); donc la conique fait partie du lieu; ce sont les deux autres points d'intersection de (3) et (4) qui donnent le lieu proprement dit. Déterminons ces deux points, et pour cela prenons pour axes la tangente et la normale à la conique au point (x_2, y_2). Appelons $2h$ la corde interceptée sur la normale par la conique, α et β les coordonnées du centre, nous aurons sans difficulté

$$(5)\qquad y_1^2 - 2y_1\left(\frac{\alpha^2}{\beta - h} + \beta\right) + 3\frac{\alpha^2}{\beta - h}h = 0.$$

Cette équation permettra de construire les deux points avec élégance. On obtiendra d'abord $\frac{\alpha^2}{\beta - h}$ en joignant le centre de la conique au milieu de $2h$ et en menant une perpendiculaire par le centre à cette droite. Le reste de la construction est connu. Remarquons que les deux racines de cette équation sont toujours réelles; que, dans le cas où $\beta > h$, cas de l'ellipse, les deux racines sont de même signe, l'une plus petite que $2h$ et l'autre plus grande. L'un des points est donc à l'intérieur de l'ellipse et correspond aux triangles imaginaires ayant un sommet réel et l'autre au lieu proprement dit.

Cherchons le coefficient angulaire de la tangente rapportée à ces deux axes, et, pour cela, représentons par φ le premier membre de l'équation (5); on a

$$\varphi'_{y_1} dy_1 + \varphi'_\beta d\beta + \varphi'_\alpha d\alpha + \varphi'_h dh = 0.$$

Mais, d'un autre côté, si l'on représente par s, t, u les distances du centre de courbure de la conique aux points $(0, y_1)$, $(0, \beta)$, $(0, h)$, par γ la cotangente de l'angle que fait la tangente à la conique au point $(0, 2h)$ avec l'axe des y et par ω l'angle de contingence, on aura

$$\varphi'_{y_1} dy_1 + \varphi'_\beta \alpha\omega + \varphi'_\alpha t\omega + \varphi'_h \gamma u\omega = 0,$$
$$dx_1 = -s\omega;$$

donc

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\alpha\varphi'_\beta + t\varphi'_\alpha + \gamma u \varphi'_h}{s}.$$

De la discussion précédente, il ressort que la courbe se compose de deux boucles, dont l'une est intérieure à l'ellipse et l'autre extérieure.

Cherchons à présent l'équation de cette courbe rapportée aux deux axes de l'ellipse. Si nous transportons cette hypothèse dans les équations (3) et (4), elles deviennent

$$b^2 y_1 x_2 [a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 - (c^2 x_1^2 - a^4)]$$
$$= a^2 y_2 x_1 [a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 + (c^2 y_1^2 + b^4)],$$
$$(x_1 - x_2) a^2 y_2 - (y_1 - y_2) b^2 x_2 = 0,$$

et, en éliminant x_2, y_2 entre ces deux équations et l'équation $a^2 y_2^2 + b^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0$, on trouve sans difficulté, en posant

$$S = a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2, \quad U = c^2 x_1^2 - a^4, \quad V = c^2 y_1^2 + b^4,$$

pour l'équation de la courbe

$$a^2 y_1^2 \left(\frac{S + U}{S - U}\right)^2 + b_2 x_1^2 \left(\frac{S - V}{S + V}\right)^2 = a^2 b^2,$$

qui est satisfaite par $S = 0$, et se décompose par conséquent en deux facteurs; le lieu est du huitième degré.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIII, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Algèbre.

Trigonométrie

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Correspondance.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XIII, 2e SÉRIE.)

Pages.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.