GAMBEY

Solution analytique de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1872 (voir 2e série, t. XI, p. 450)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 92-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__92_1>

SOLUTION ANALYTIQUE

de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'Agrégation de 1872

(voir 2e série, t. XI, p. 450);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Prenons pour origine des coordonnées le milieu O de la plus courte distance $2d$ de Δ, Δ', la direction de cette plus courte distance pour axe des x, la bissectrice de l'angle formé par les parallèles à Δ, Δ' menées par l'origine pour axe des z, et enfin, pour axe des y, une perpendiculaire au plan xOz.

I. Les équations des droites données seront

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} x - d = 0, \\ y - mz = 0; \end{cases}$$

$$(\Delta') \qquad \begin{cases} x + d = 0, \\ y + mz = 0; \end{cases}$$

m étant un coefficient donné ainsi que d.

L'équation d'une surface du second ordre passant par Δ, Δ' sera

$$\begin{aligned}(x+d)[\lambda(x-d)+\mu(y-mz)] \\ +(y+mz)[\lambda_1(x-d)+\mu_1(y-mz)] = 0,\end{aligned}$$

ou, en effectuant les calculs et ordonnant,

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \lambda x^2 + \mu_1 y^2 - m^2\mu_1 z^2 + m(\lambda_1 - \mu) zx + (\lambda_1 + \mu) xy \\ \qquad - d(\lambda_1 - \mu) y - dm(\lambda_1 + \mu) z - \lambda d^2 = 0, \end{cases}$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant des indéterminées.

Les coordonnées du centre satisfont aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\lambda x + (\lambda_1 + \mu) y + m(\lambda_1 - \mu) z = 0, \\ (\lambda_1 + \mu) x + 2\mu_1 y - d(\lambda_1 - \mu) = 0, \\ (\lambda_1 - \mu) x - 2m\mu_1 z - d(\lambda_1 + \mu) = 0. \end{cases}$$

Or on voit sans peine que, si l'on y fait $x = 0$, l'une des trois équations est alors une conséquence des deux autres. Donc le plan $x = 0$ contient tous les centres, et les relations (1) se réduisent à

$$(2) \qquad \begin{cases} 2\mu_1 y - d(\lambda_1 - \mu) = 0, \\ 2m\mu_1 z + d(\lambda_1 + \mu) = 0. \end{cases}$$

Nous aurons deux autres relations entre les indéterminées λ, λ_1, μ, μ_1, en nous servant de l'équation en S.

On sait que si l'on appelle généralement ρ la longueur algébrique de l'un des axes de la surface à centre

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy = \mathrm{H},$$

les axes des coordonnées étant rectangulaires, on a

$$S = \frac{H}{\rho^2}.$$

L'équation en S devient alors

$$\begin{vmatrix} A - \frac{H}{\rho^2} & B'' & B' \\ B'' & A' - \frac{H}{\rho^2} & B \\ B' & B & A'' - \frac{H}{\rho^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Appelons h^2 la somme et $-l^6$ le produit des carrés des longueurs algébriques des axes; l'équation ci-dessus nous donnera

$$(3)\left\{\begin{aligned} & h^2(AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'') \\ & \quad = H(AA' + A'A'' + A''A - B^2 - B'^2 - B''^2), \\ & -l^6(AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'') = H^3. \end{aligned}\right.$$

Mais si l'on rapporte la surface (S) à son centre, son équation devient

$$\begin{aligned} & \lambda x^2 + \mu_1 y^2 - m^2\mu_1 z^2 + m(\lambda_1 - \mu)zx \\ & \quad + (\lambda_1 + \mu)xy = \frac{d^2}{\mu_1}(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu). \end{aligned}$$

En faisant les substitutions dans les équations (3) et effectuant les calculs, on obtient

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned} & 4m^2\mu_1^2(h^2 - d^2) - d^2(1 + m^2)(\lambda_1^2 + \mu^2) \\ & \qquad + 2d^2(1 - m^2)(2\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) = 0, \\ & d^6(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)^2 - l^6 m^2\mu_1^4 = 0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination se fait maintenant facilement entre les équations (2) et (4). On trouve

$$(\mathrm{A})\quad d(y^2 + m^4 z^2) - m^2 d(h^2 - d^2) \mp ml^3(1 - m^2) = 0.$$

Le lieu est donc composé de deux ellipses concentriques situées dans le plan yOz.

Pour $m = 1$, ce qui correspond au cas où Δ et Δ' sont rectangulaires, les deux ellipses se réduisent à un cercle

$$y^2 + z^2 = h^2 - d^2.$$

II. Si o, β, γ sont les coordonnées du centre particulier I de l'une des surfaces (S), les équations de la droite DD′ seront

$$x = p(z - \gamma),$$
$$y - \beta = p(z - \gamma),$$

avec les conditions

$$(5) \qquad \begin{cases} p(\beta - m\gamma) + d(q - m) = 0, \\ p(\beta + m\gamma) - d(q + m) = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées des points D et D′ sont alors

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} x = d, \\ y = \dfrac{m(d + p\gamma)}{p}, \\ z = \dfrac{d + p\gamma}{p}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{cases} x = -d, \\ y = \dfrac{m(d - p\gamma)}{p}, \\ z = -\dfrac{(d - p\gamma)}{p}. \end{cases}$$

Le carré de DD′ sera donc, après réductions,

$$4d^2 + 4m^2\gamma^2 + \frac{4d^2}{p^2},$$

qui devient, en éliminant p au moyen des relations (5),

$$4d^2 + \frac{4(\beta^2 + m^4\gamma^2)}{m^2},$$

quantité constante, si l'on tient compte de (A); pour $m = 1$,

$$DD' = 2h.$$

III. Les plans menés en D, D', perpendiculairement à Δ et Δ', sont évidemment parallèles à l'axe des x. Le lieu de leur intersection est donc un cylindre parallèle à cet axe.

Du reste, les équations des deux plans étant

$$(6) \qquad \begin{cases} p(my + z) - (1 + m^2)(d + p\gamma) = 0, \\ p(my - z) - (1 + m^2)(d - p\gamma) = 0, \end{cases}$$

et β et γ vérifiant l'équation (A), on obtient, en éliminant β, γ, p et q entre les équations (A), (5) et (6), l'équation du lieu, qui est

$$(B) \quad dm^4(y^2 + z^2) = m(m^2 + 1)^2[md(h^2 - d^2) \pm l^3(1 - m^2)].$$

Pour $m = 1$, elle devient

$$y^2 + z^2 = 4(h^2 - d^2).$$