

E. CATALAN

**Sur l'intégration des différentielles  
rationnelles**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1873), p. 423-424

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1873\\_2\\_12\\_423\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_423_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES;

PAR M. E. CATALAN.

Tous les Traités de Calcul intégral contiennent la formule de réduction

$$(A) \quad Z_p = \frac{2p-3}{2p-2} Z_{p-1} + \frac{z}{(2p-2)(1+z^2)^{p-1}},$$

dans laquelle

$$Z_p = \int \frac{dz}{(1+z^2)^p} (*).$$

A cause de  $Z_0 = \text{arctang } z$ , cette formule fait connaître successivement  $z_1, z_2, \dots$ . Mais il y a plus : on en peut conclure, par un calcul très-simple, la valeur générale de  $Z_p$  (\*\*).

En effet, il est visible que

$$(B) \quad Z_p = a \text{ arctang } z + \sum_1^{p-1} a_i \frac{z}{(1+z^2)^i},$$

$a, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  étant des coefficients inconnus. Prenant les dérivées, on a donc

$$(C) \quad \frac{1}{(1+z^2)^p} = a \frac{1}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} a_i \left[ \frac{z}{(1+z^2)^i} \right]'$$

On tire de l'égalité (A)

$$\left[ \frac{z}{(1+z^2)^i} \right]' = 2i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - (2i-1) \frac{1}{(1+z^2)^i},$$

(\*) Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*.

(\*\*) Abstraction faite, bien entendu, de la constante arbitraire.

de sorte que (C) devient

$$\frac{1}{(1+z^2)^p} = a \frac{1}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} 2i a_i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - \sum_1^{p-1} (2i-1) a_i \frac{1}{(1+z^2)^i},$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z^2)^p} &= (a - a_1) \frac{1}{1+z^2} + (2a_1 - 3a_2) \frac{1}{(1+z^2)^2} \\ &\quad + (4a_2 - 5a_3) \frac{1}{(1+z^2)^3} + \dots \\ &\quad + [(2p-4)a_{p-2} - (2p-3)a_{p-1}] \frac{1}{(1+z^2)^{p-1}} \\ &\quad + (2p-2)a_{p-1} \frac{1}{(1+z^2)^p}. \end{aligned}$$

Identifiant les deux membres, on trouve

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{p-1} &= \frac{1}{2p-2}, \\ a_{p-2} &= \frac{2p-3}{(2p-2)(2p-4)}, \\ a_{p-3} &= \frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 = a &= \frac{3.5 \dots (2p-3)}{2.4.6 \dots (2p-2)}. \end{aligned} \right.$$

Soit, comme application,  $p = 5$ . D'après les formules (B) et (D),

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1+z^2)^5} &= \frac{3.5.7}{2.4.6.8} \operatorname{arctang} z + \frac{3.5.7}{2.4.6.8} \frac{z}{1+z^2} \\ &\quad + \frac{5.7}{4.6.8} \frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{7}{6.8} \frac{z}{(1+z^2)^3} \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{z}{(1+z^2)^4} + \text{const.} \end{aligned}$$