NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Expression de la différence d'ordre nième d'une fonction, au moyen de la dérivée du même ordre de cette fonction

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 418-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__418_0>

EXPRESSION DE LA DIFFÉRENCE D'ORDRE $n^{ième}$ D'UNE FONCTION,

au moyen de la dérivée du même ordre de cette fonction;

PAR M. A. PICART.

Soit $y=f(x)$: on donne successivement à la variable les valeurs x, $x+h$, $x+2h,\ldots$, $x+nh$; la fonction prend les valeurs correspondantes $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h),\ldots,f(x+nh)$; sa différence $n^{ième}$ est alors

$$\begin{aligned}\Delta^n y = f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) &+ \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h)\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f(x+\overline{n-3}\,h)+\ldots\\ &+(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}f(x+\overline{n-p}\,h)+\ldots.\end{aligned}$$

Il s'agit d'exprimer cette différence au moyen de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $f(x)$. Posons

$$\frac{f(x+nh)-nf(x+\overline{n-1}\,h)+\frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h)-\ldots}{h^n}=\mathrm{A},$$

ou

$$\begin{aligned}f(x+nh)-nf(x+\overline{n-1}\,h)+\frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h)-\ldots\\ +(-1)^n f^n(x)-\mathrm{A}h^n=0,\end{aligned}$$

ou, en remplaçant h par $\frac{\mathrm{X}-x}{n}$,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&f(\mathrm{X})-nf\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-x}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}f\left[\mathrm{X}-\frac{2(\mathrm{X}-x)}{n}\right]-\ldots\\ &\qquad+(-1)^n f(x)-\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-x}{n}\right)^n=0,\end{aligned}\right.$$

et considérons la fonction

$$\varphi(z)=f(\mathrm{X})-nf\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}f\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right]-\ldots$$
$$+(-1)^n f(z)-\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^n.$$

Elle s'annule pour $z=x$, en vertu de (1), et pour $z=\mathrm{X}$; car elle devient, pour cette valeur de z,

$$f(\mathrm{X})\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\right),$$

et la quantité entre parenthèses est égale à zéro; donc sa dérivée s'annule pour une valeur z_1 de z intermédiaire entre x et X (on suppose la fonction $f(x)$ finie et continue dans l'intervalle de x à X). Or

$$\varphi'(z)=-f'\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+(n-1)f'\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f'\left(\mathrm{X}-3\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+\ldots$$
$$+\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^{n-1}.$$

Cette fonction $\varphi'(z)$ s'annule aussi pour $z=\mathrm{X}$; donc la dérivée $\varphi''(z)$ doit s'annuler pour une valeur z_2 de z comprise entre z_1 et X (pourvu que $f'(x)$ soit continue dans l'intervalle de x à X). Or

$$\varphi''(z)=-\frac{1}{n}f''\left(\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)+(n-1)f''\left(\mathrm{X}-2\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f''\left(\mathrm{X}-3\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)\frac{3}{n}+\ldots$$
$$-\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{X}-z}{n}\right)^{n-2}\frac{n-1}{n},$$

ou

$$n\varphi''(z) = -f''\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f''\left(X - 2\,\frac{X-z}{n}\right)2$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f''\left(X - \frac{X-z}{n}\right)3 + \ldots$$
$$-(n-1)\,A\left(\frac{X-z}{n}\right)^{n-2}.$$

Cette dérivée seconde s'annule aussi pour $z = X$; car elle devient, pour cette valeur de z,

$$\frac{-f''(X)}{n}\left[1 - \frac{n-1}{1}2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}4 + \ldots\right],$$

et l'on sait que l'expression

$$1 - (n-1)\,2^p + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,3^p$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^n n^p$$

est nulle pour toutes les valeurs entières et positives de p inférieures à $n-1$, et égale à $1.2\ldots(n-1)(-1)^{n-1}$, pour $p = n-1$; donc la dérivée tierce s'annule pour une valeur z_3 de z comprise entre z_2 et X [pourvu que $f''(x)$ soit continue de x à X].

Or

$$n^2\varphi'''(z) = -f'''\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f'''\left(X - 2\,\frac{X-z}{n}\right)2^2$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f'''\left(X - 3\,\frac{X-z}{n}\right)3^2 + \ldots$$
$$+(n-1)(n-2)\,A\left(\frac{X-z}{n}\right)^{n-3}.$$

Cette dérivée s'annule aussi pour $z = X$; donc la dérivée quatrième s'annulera pour une valeur z_4 de z comprise entre z_3 et X. En continuant ainsi, on verra que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $\varphi(z)$ doit s'annuler pour une valeur z_n de z comprise entre x et X. Or on a

$$n^{n-1}\varphi^{(n)}z = -f^{(n)}\left(X - \frac{X-z}{n}\right) + (n-1)f^{(n)}\left(X - 2\,\frac{X-z}{n}\right)2^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}\left(X - 3\,\frac{X-z}{n}\right)3^{n-1} + \dots$$
$$- (-1)^n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1\,A,$$

donc

$$A = (-1)^{n-1}\,\frac{f^n\left(X - \frac{X-z_n}{n}\right) - (n-1)f^{(n)}\left(X - 2\,\frac{X-z_n}{n}\right)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}\left(X - 3\,\frac{X-z_n}{n}\right)3^{n-1} - \dots}{1.2\dots(n-1)},$$

ou, en mettant, à la place de z_n, $x + \theta nh$ ($0 < \theta < 1$), et à la place de X, $x + nh$,

$$A = (-1)^{n-1}\,\frac{f^{(n)}[x+(n-1)h+\theta h] - (n-1)f^n(x+\overline{n-2}\,h+2\theta h)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^{(n)}(x+\overline{n-3}\,h+3\theta h)3^{n-1} - \dots}{1.2\dots(n-1)},$$

et l'on a ainsi la formule remarquable

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,h) - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}f(x+\overline{n-3}\,h) + \dots \\ & = h^n(-1)^{n-1}\,\frac{f^{(n)}(x+\overline{n-1}\,h+\theta h) - (n-1)f^n(x+\overline{n-2}\,h+2\theta h)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}f^n(x+\overline{n-3}\,h+3\theta h)3^{n-1} - \dots}{1.2.3\dots(n-1)}, \end{aligned}\right.$$

θ étant un nombre positif plus petit que 1.

On en déduit, lorsqu'on fait tendre h vers o,

$$\lim \frac{f(x+nh) - nf(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x+\overline{n-2}\,h) - \ldots}{h^n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{f^{(n)}(x)\left[1 - (n-1)2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}4^{n-1} + \ldots\right]}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{f^{(n)}(x).1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$= f^{(n)}(x),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x). \tag{2}$$

La formule (1) n'a été établie que dans l'hypothèse où la fonction $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées sont continues, et la $n^{ième}$ déterminée, dans l'intervalle de x à X; par suite, la formule (2) implique que la fonction $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées soient continues pour la valeur de x que l'on considère, et que la $n^{ième}$ dérivée soit déterminée.