CH. RUCHONNET

Propriété caractéristique de la droite rectifiante

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 315-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__315_1>

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA DROITE RECTIFIANTE;

PAR M. CH. RUCHONNET.

Le plan mené par la tangente en un point d'une courbe non plane perpendiculairement au plan osculateur a été appelé *plan rectifiant* (*); parce que, si l'on considère ce plan en tous les points de la courbe, son enveloppe est une surface qui, par son développement, la transforme en une ligne droite. La génératrice de cette surface, qui est l'intersection limite des plans rectifiants en deux points de la courbe infiniment voisins, s'appelle la *droite rectifiante*. Cette droite jouit d'une propriété caractéristique dont voici l'énoncé :

De toutes les droites qu'on peut conduire par un point M *d'une courbe, la rectifiante est la plus également inclinée sur les tangentes en deux points* M *et* M′ *infiniment voisins; en d'autres termes, la différence des angles que cette droite fait avec les deux tangentes est*

(*) Par Lancret, au commencement de ce siècle.

infiniment petite par rapport à la même différence relative à toute autre droite menée par M.

Soient MT la tangente en M, MT′ la parallèle menée par M à la tangente en M′, et MS une droite dirigée à volonté. Posons

$$\text{angle TMS} = a, \quad \text{angle T}'\text{MS} = a + \omega;$$

il s'agit de montrer que la valeur que reçoit ω quand MS coïncide avec la droite rectifiante est infiniment petite par rapport à la valeur qu'il prend dans tout autre cas.

Dans tout ce qui va suivre, l'angle des tangentes en M, M′ sera représenté par ε, et celui des plans osculateurs en ces mêmes points par η.

J'aurai à faire usage des deux théorèmes suivants, dont le premier est bien connu :

I. *La droite rectifiante fait avec la tangente un angle* α *qui est donné par la relation* $\tang\alpha = \lim\frac{\varepsilon}{\eta}$. *Le plan osculateur et le plan normal au point* M *forment par leur intersection quatre dièdres droits. La droite rectifiante passe dans celui de ces dièdres où se trouve le point* M′.

II. *Le plan* TMT′ *fait avec le plan osculateur un angle égal à* $\frac{1}{2}\eta$, *à une quantité près d'ordre supérieur à celui de* η.

Pour le faire voir, par un point quelconque O conduisons des parallèles à toutes les tangentes de la courbe : ces parallèles forment par leur ensemble un cône dont les plans tangents sont parallèles aux plans osculateurs de la courbe. Soit m un point quelconque pris sur la génératrice parallèle à la tangente MT : le plan mené par m perpendiculairement à Om coupe le cône suivant une courbe C qui rencontre en un point m' la génératrice parallèle à la tangente en M′ à la courbe donnée. Soit t le point de rencontre des tangentes en m et en m' à la courbe C : l'angle de ces tangentes est, en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur au sien, égal à l'angle des plans tangents au cône suivant Om et Om', lequel est précisément égal à η. Les angles tmm', $tm'm$ formés par les tangentes en m, m' avec la corde mm' sont dès lors égaux à $\frac{1}{2}\eta$; mais le premier de ces deux angles est égal à celui des plans Omt, mOm', c'est-à-dire à l'angle que le plan osculateur en M fait avec le plan TMT′. Ce dernier est donc égal à $\frac{1}{2}\eta$, et c'est là ce qu'il s'agissait de prouver.

Retournons maintenant à notre objet. Les trois droites MT, MT′, MS peuvent être envisagées, à partir de M, dans deux directions différentes, et il sera bon de préciser pour chacune celle que nous choisirons. Nous appellerons MT celle des deux directions de la tangente en M qui fait un angle aigu avec la corde MM′ considérée comme tirée de M vers M′, et nous appellerons MT′, MS celles des directions des deux autres droites qui sont situées par rapport au plan osculateur en M du même côté que le point M′. Alors l'angle TMT′ est égal à l'angle infiniment petit ε.

Désignons par A l'angle dièdre dont l'arête est MT et qui est formé par les deux plans TMS, TMT : la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donne

$$\cos(a+\omega) = \cos a \cos\varepsilon + \sin a \sin\varepsilon \cos A,$$

d'où, en se rappelant que $\cos\varepsilon = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$,

$$(1)\qquad \cos a - \cos(a+\omega) = 2\cos a \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin a \sin\varepsilon \cos A.$$

Or une autre formule bien connue donne

$$(2)\qquad \cos a - \cos(a+\omega) = 2\sin\left(a+\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}.$$

Substituons au premier membre de (1) sa valeur fournie par la relation (2). Dans l'égalité ainsi obtenue, on n'altérera le premier membre que d'une quantité d'ordre supérieur au sien, si l'on y remplace $\sin\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$ par $\sin a$, et $\sin\frac{\omega}{2}$ par $\frac{\omega}{2}$. Divisant en outre par $\sin a$, il vient

$$(3)\qquad \omega = 2\cot a \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin\varepsilon \cos A,$$

et il s'agit de déterminer l'ordre infinitésimal du second membre de cette équation. Nous considérons l'arc MM', et par suite aussi les angles ε et η, comme étant du premier ordre.

A cet effet, supposons d'abord que MS ne soit pas situé dans le plan rectifiant. Alors, comme le plan TMT' se confond à la limite avec le plan osculateur, l'angle A est différent d'un angle droit, son cosinus ne tend pas vers zéro, et par conséquent $\sin\varepsilon \cos A$ est du premier ordre; mais l'autre terme du second membre de l'équation (3) est du second ordre : donc ω est du premier ordre. Ainsi ω est du premier ordre toutes les fois que la droite MS n'est pas contenue dans le plan rectifiant.

Supposons maintenant que la droite MS soit contenue dans ce plan. Le plan TMT' fait avec le plan osculateur un angle égal à $\frac{1}{2}\eta$ (II), et, comme ce dernier plan passe par MT, l'angle A, dans le cas qui nous occupe, est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\eta$; alors on a

$$\cos A = \sin\tfrac{1}{2}\eta, \quad \text{ou} \quad \cos A = \tfrac{1}{2}\eta.$$

Remplaçant en outre $2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$ par $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, l'équation (3) devient

$$\omega = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cot a - \tfrac{1}{2}\varepsilon\eta,$$

et chacun des deux termes n'est fautif que d'une quantité d'ordre supérieur au second. Cette valeur de ω est du second ordre, si les deux termes ne sont pas des infiniment petits égaux, par conséquent toutes les fois que l'on n'a pas $\operatorname{tang} a = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$. Or $\operatorname{tang} a = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$ est la valeur de $\operatorname{tang} a$ relative à la droite rectifiante (I) ; donc, si MS est situé dans le plan rectifiant sans être la droite rectifiante, ω est du second ordre.

Mais si MS se confond avec cette droite, les deux termes du second membre de la dernière équation étant des infiniment petits égaux, ω est d'un ordre supérieur au second, ce qui achève de démontrer la proposition énoncée.